

К вопросу о погрешности метода частичных емкостей

© А.Н. Деленив

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет,
197376 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 24 декабря 1997 г.)

Предложен аналитический метод для вычисления емкости планарного конденсатора, выполненного в виде двухслойной структуры. Метод использован для вычисления емкости планарного конденсатора, содержащего сегнетоэлектрическую пленку. Ряд расчетов выполнен для проверки точности метода частичных емкостей. Выполненные расчеты позволяют определить пределы применимости метода частичных емкостей при допустимой погрешности расчета в пределах $\pm 3\%$.

Введение

Сегнетоэлектрики являются весьма привлекательными материалами как основа управляемых сверхвысокочастотных (СВЧ) устройств. Большая величина диэлектрической проницаемости сегнетоэлектриков позволяет использовать эти материалы в элементах СВЧ техники в виде тонких пленок с толщиной порядка $1 \mu\text{m}$ [1]. Существенное значение имеет возможность надежного расчета параметров планарных структур, содержащих тонкую пленку с большой диэлектрической проницаемостью. Основой расчета в квазистатическом приближении служит метод частичных емкостей (МЧЕ). Метод частичных емкостей был впервые использован в работах Э.С. Кочанова [2,3]. Использование этого метода для расчета планарных структур требует оценки его точности. Первоначально такая оценка была сделана в [3] путем сопоставления с расчетом, выполненным на аналоговой вычислительной машине: погрешность не превышала 1–2%. Позже метод был включен в справочник [4] и рекомендовался для расчетов как априори надежный. МЧЕ также применяется при определении диэлектрических характеристик сегнетоэлектрической пленки [5], при этом планарный конденсатор, содержащий сегнетоэлектрическую пленку, используется как элемент метрологии, а все расчеты проводятся с использованием МЧЕ.

Основной целью данной работы является проверка достоверности МЧЕ в отношении расчета емкостей планарных структур, аналогичных показанной на рис. 1. Предложен метод, объединяющий методы конформных и зеркальных отображений и позволяющий с хорошей точностью вычислять емкости планарных структур. Для упрощения расчета электроды конденсатора предполагаются полубесконечными, что не является принципиальным.

Описание метода

Обратимся к структуре, представленной на рис. 1. Благодаря симметрии рассматриваемой структуры в плоскости симметрии может быть расположена электрическая стенка: рис. 2, а. Используем метод конформных

отображений [6]. Чтобы трансформировать исходную плоскость во внутреннюю область плоскопараллельного конденсатора, необходимы два последовательных отображения. Первая отображающая функция

$$W = \sin \left[\frac{\pi T}{2(h_1 + h_2)} \right] \quad (1)$$

связывает полубесконечную полосу плоскости T с квадрантом плоскости W . Для краткости мы не приводим соответствующие графические построения. Для второго отображения используем трансформацию Кристоффеля–Шварца

$$L = \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}} \quad (2)$$

с модулем

$$k = \left[\operatorname{ch} \left(\frac{s\pi}{4(h_1 + h_2)} \right) \right]^{-1}.$$

Трансформация связывает квадрант плоскости W с внутренней областью плоского конденсатора на плоскости L (рис. 2, б). Здесь $K(k)$ — эллиптический интеграл первого рода. Цифры на рис. 2 соответствуют эквивалентным точкам преобразованной структуры. Граница раздела между диэлектриками преобразуется в кривую в плоскости L , вид и положение которой определяют емкость исследуемой структуры. Поскольку координаты кривой связаны между собой неявно (через координаты x, y плоскости T), то для дальнейших расчетов целесообразно описать эту кривую в координатах w, f (рис. 2). Представим функцию $w(f)$, описывающую границу раздела диэлектриков в виде разложения в ряд

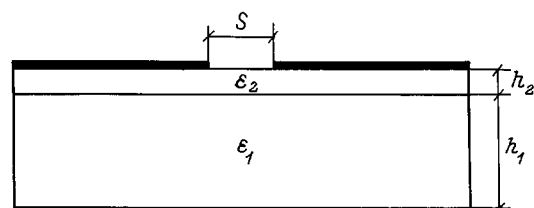


Рис. 1. Двухслойный планарный конденсатор с пленкой сегнетоэлектрика (исходная структура).

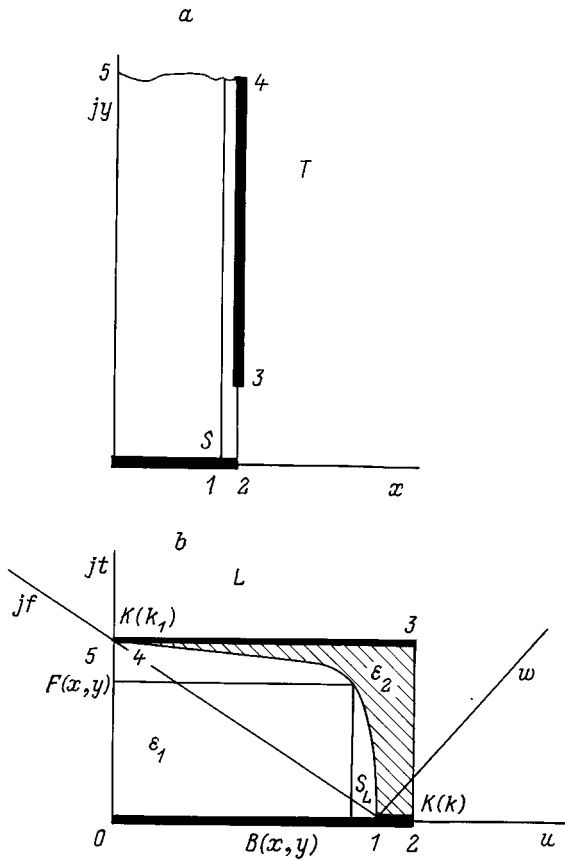


Рис. 2. Преобразование исходной структуры: *a* — конденсатор разделен пополам идеально проводящей стенкой, *b* — результат конформного преобразования на плоскость $L \subset w + jt$. В полученном плоском конденсаторе выделена поверхность, разделяющая области с разной диэлектрической проницаемостью.

Фурье по синусам на отрезке длиной T , где T — расстояние между точками 1–4 на рис. 2,

$$w(f) = \sum_{n=1}^M D_n \sin(n2\pi f/T), \quad (3)$$

где

$$T = 2\sqrt{S_L^2 + K(k_1)^2},$$

$$S_L = \int_0^{\sin(0.5h_1\pi/(h_1+h_2))} \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}},$$

$$k_1 = \sqrt{1-k^2}.$$

Здесь $K(k)$ — эллиптический интеграл первого рода. Коэффициенты разложения D_m находятся путем численного интегрирования соотношений, полученных в результате конформного отображения границы раздела диэлектриков.

Электростатическое поле, являющееся решением для данной замкнутой области, должно удовлетворять граничным условиям и однородному уравнению

$$\text{div}\{\varepsilon(f, w) \text{grad}[\varphi(f, w)]\} = 0.$$

Используя формулы векторного анализа, это уравнение можем переписать в следующем виде:

$$\text{grad}[\varepsilon(f, w)] \text{grad}[\varphi(f, w)] + \varepsilon(f, w)\Delta\varphi(f, w) = 0. \quad (4)$$

Первое слагаемое в уравнении (4) обращается в нуль для однородной среды (уравнение (4) превращается в уравнение Лапласа) или приводит к появлению дельта-функции на границе раздела сред для рассматриваемого нами случая. Формально можно полагать, что (4) является уравнением Пуассона, в котором первое слагаемое описывает заряд, распределенный в бесконечно тонком слое на границе раздела сред. Учитывая вышесказанное, можно резюмировать, что введение поверхностного заряда оказывает такое же влияние на поле плоского конденсатора, что и граница раздела между диэлектриками. Таким образом, интересующее нас электростатическое поле будет представлять собой суперпозицию двух составляющих: внешнего однородного поля, определяемого напряжением 1 В, приложенным к электродам конденсатора,

$$E_{\text{ext}}(u, t) = \frac{1}{jK(k_1)} \quad (5)$$

и поля поверхностных зарядов $E_\sigma(u, t)$. Следовательно, решение задачи сводится к нахождению поверхностного заряда $\sigma(f)$ и отвечающего ему поля $E_\sigma(u, t)$.

Распределение поверхностного заряда $\sigma(t)$ должно удовлетворять граничным условиям для нормальных компонент поля на границе раздела диэлектриков

$$\frac{E_{\text{ext}}^n(f) + E_\sigma^n(f) + \sigma(f)/2\varepsilon_0}{E_{\text{ext}}^n(f) + E_\sigma^n(f) - \sigma(f)/2\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \quad (6)$$

где ε_0 — проницаемость вакуума; $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — относительные проницаемости подложки и слоя сегнетоэлектрика соответственно; $E_{\text{ext}}^n(f)$ — нормальная компонента внешнего поля на границе раздела; $E_\sigma^n(f)$ — нормальная компонента поля, обусловленная распределением заряда $\sigma(f)$ на границе; $\sigma(f)/2\varepsilon_0$ — составляющая, обеспечивающая разрыв нормальной компоненты напряженности электрического поля.

Распределение поля линейного заряда на границе раздела диэлектриков при заданных граничных условиях

Выделим на границе раздела сред полоску шириной $d\lambda$, перпендикулярную плоскости чертежа (рис. 3). Рассмотрим эту полоску как равномерно заряженную нить с погонной плотностью заряда $d\tau = \sigma(f_a)d\lambda$ [C/m] в точке с координатами $f_a, w(f_a)$. Для решения поставленной

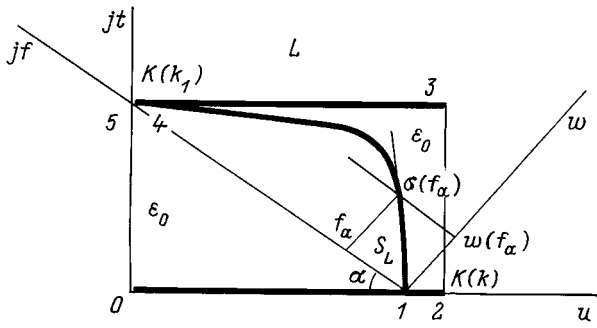


Рис. 3. Та же структура, что на рис. 2, с тем отличием, что диэлектрическое заполнение однородно, на границе раздела находится электрический заряд с поверхностной плотностью $\sigma(f)$.

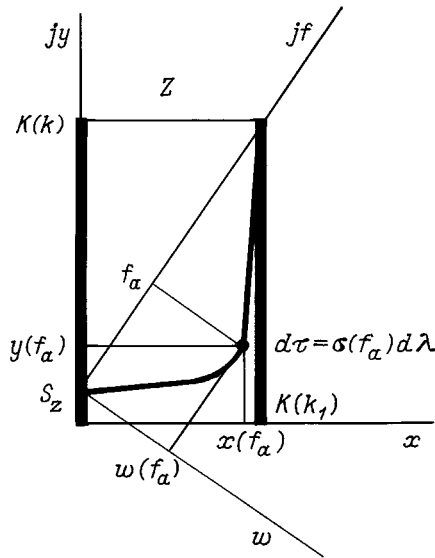


Рис. 4. Рассматриваемая структура преобразована для удобства нахождения электростатического поля, наведенного заряженной нитью, расположенной вдоль линии с координатами $x(f_a)$, $y(f_a)$.

задачи необходимо найти функцию Грина для области, ограниченной двумя электрическими и двумя магнитными стенками, в плоскости L . Чтобы воспользоваться готовым решением, преобразуем исходную координатную плоскость L по правилу $Z = (K(k) - L) \exp(j\pi/2)$ (рис. 4). Расчет потенциала и поля линейного заряда, помещенного между проводящими плоскостями, рассмотрен в [7]. Решение для потенциала, созданного одиночной заряженной нитью между проводящими плоскостями, записывается в виде комплексной функции

$$d\omega(Z, f_a) = \ln \left[\frac{\sin \pi \left(\frac{Z + \bar{Z}(f_a)}{2K(k_1)} \right)}{\sin \pi \left(\frac{Z - Z(f_a)}{2K(k_1)} \right)} \right] \times \frac{\sigma(f_a) d\lambda}{2\pi}, \quad (7)$$

$Z(f) = x(f) + jy(f)$; $\bar{Z}(f) = x(f) - jy(f)$; Z — комплексное число, образованное координатами, задающими точку наблюдения.

Комплексная функция $Z(f)$ устанавливает соответствие кривой $w(f)$ (рис. 4) координатам x , y на плоскости $Z(f) = x(f) + jy(f)$. Решение для интересующего нас случая образует бесконечный ряд удаленных на одинаковые расстояния одна от другой пар, равных по знаку зарядов нитей, которые расположены симметрично относительно магнитных стенок. Таким образом, для потенциала, созданного одиночной заряженной нитью между проводящими плоскостями и магнитными стенками, можно записать

$$d\psi(Z, f_a) = \sum_{n=0}^{\infty} \ln \left[\frac{\sin \pi ([Z - j2Kn + \bar{Z}(f_a)]/2K_1) \times \sin \pi ([Z - j2K(n+1) + Z(f_a)]/2K_1)}{\sin \pi ([Z - j2Kn - Z(f_a)]/2K_1) \times \sin \pi ([Z - j2K(n+1) - \bar{Z}(f_a)]/2K_1)} \times \frac{\sin \pi ([Z + j2Kn + Z(f_a)]/2K_1) \times \sin \pi ([Z + j2K(n+1) + \bar{Z}(f_a)]/2K_1)}{\sin \pi ([Z + j2Kn - \bar{Z}(f_a)]/2K_1) \times \sin \pi ([Z + j2K(n+1) - Z(f_a)]/2K_1)} \right] \times \frac{\sigma(f_a) d\lambda}{2\pi}. \quad (8)$$

Поскольку ряд является быстро сходящимся, то для расчетов достаточно ограничиться 5–6 членами. Для удобства дальнейшего изложения перепишем (8) в следующем виде:

$$d\psi(Z, f_a) = D(Z, f_a) \sigma(f_a) d\lambda. \quad (9)$$

Выражение (9) задает электрический потенциал, созданный заряженной нитью. Теперь можно найти напряженность поля, созданного заряженной нитью,

$$dE(Z, f_a) = \left| \frac{dD(Z, f_a)}{dZ} \right| \times \exp \left(-j \arg \left(\frac{dD(Z, f_a)}{dZ} \right) \right) \sigma(f_a) d\lambda. \quad (10)$$

Определение неизвестного распределения поверхностного заряда $\sigma(f)$

Условие (6) может быть переписано в следующем виде:

$$H\sigma(f) + E_{\text{ext}}^n(f) + E_{\sigma}^n(f) = 0, \quad (11)$$

$$H = \frac{\epsilon_2 + \epsilon_1}{2\epsilon_0(\epsilon_1 - \epsilon_2)}. \quad (12)$$

Все три слагаемых уравнения (11) представим в виде гармонических рядов Фурье по косинусам с периодом T

$$E_{\text{ext}}^n(f) = \sum_{n=0}^m C_n \cos \left(\frac{2\pi n f}{T} \right). \quad (13)$$

Коэффициенты ряда могут быть непосредственно вычислены, поскольку известно уравнение кривой, описывающей границу раздела диэлектриков, и, следовательно, известна ее крутизна. Функция $E_\sigma^n(f)$ связана с неизвестным распределением заряда $\sigma(f)$ следующей операцией интегрирования:

$$E_\sigma^n(f) = \int_0^{T/2} \sigma(f') \operatorname{Re} \left(\frac{dD(Z(f), f')}{dZ} \exp(j\beta(f)) \right) \times \frac{df'}{\cos(\vartheta(f'))}, \quad (14)$$

где $\vartheta(f)$ — угол, задающий наклон касательной к границе раздела в координатной плоскости $f-w$; $\beta(f) = \vartheta(f) + \alpha$, где α — угол между координатными осями f, w и t, u (рис. 3).

Представим (14) как интегральное преобразование с ядром $K(f, f')$

$$K(f, f') = \operatorname{Re} \left(\frac{dD(Z(f), f')}{dZ} \frac{\exp(j\beta(f))}{\cos(\vartheta(f'))} \right). \quad (15)$$

При описании ядра $K(f, f')$ следует использовать разложение (3), определяющее координаты границы раздела $f_1, w(f_a)$.

Учитывая, что поверхностный заряд представляется в виде

$$\sigma(f) = \sum_{n=0}^m A_n \cos \left(\frac{2\pi n f}{T} \right), \quad (16)$$

получим

$$E_\sigma^n(f) = \sum_{n=0}^m A_n \int_0^{T/2} \cos \left(\frac{2\pi n f'}{T} \right) K(f, f') df'. \quad (17)$$

Представим $E_\sigma^n(f)$ также в виде ряда

$$E_\sigma^n(f) = \sum_{k=0}^m B_k \cos \left(\frac{2\pi k f}{T} \right) \quad (18)$$

и запишем выражение для коэффициентов этого ряда B_k

$$B_k = \sum_{n=0}^m A_n B_{k,n}, \quad (19)$$

где

$$B_{k,n} = \left[\frac{2}{T} \int_0^{T/2} \cos \left(\frac{2\pi k f}{T} \right) \int_0^{T/2} \cos \left(\frac{2\pi n f'}{T} \right) K(f, f') df' df \right]; \quad (20)$$

$B_{k,n}$ — коэффициенты матрицы, представляющей оператор перехода от распределения поверхностного заряда (16) к напряженности поля (18).

Теперь равенство (11) можно переписать в виде системы линейных уравнений относительно коэффициентов A_n

$$\begin{bmatrix} H + B_{0,0} & B_{0,1} & \dots & B_{0,m} \\ B_{1,0} & H + B_{1,1} & \dots & B_{1,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{m,0} & B_{m,1} & \dots & H + B_{m,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \dots \\ A_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_0 \\ -C_1 \\ \dots \\ -C_m \end{bmatrix}.$$

Нахождение неизвестного распределения $\sigma(f)$ сводится к нахождению коэффициентов A_n . Для этого необходимо вычисление матрицы B . Вычислив с помощью (20) матрицу B , найдя коэффициенты A_n и используя соотношения (13), (16), (18), найдем все компоненты поля, определяющие поток индукции через сечение конденсатора, показанного на рис. 4. В результате получим следующую формулу для емкости структуры:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \int_0^{T/2} \left(\frac{E_{\text{ext}}^n(f) + E_\sigma^n(f) - \sigma(f)/2\varepsilon_0}{\cos(\vartheta(f))} \right) df + \varepsilon_0 \varepsilon_1 \left[\int_0^{S_z} \int_0^{T/2} \frac{dD(Z, f)}{dZ} \frac{\sigma(f)}{\cos(\vartheta(f))} df dZ + \frac{K(k) - S_z}{K(k_1)} \right]. \quad (22)$$

Вошедшая в формулу величина S_z определяется точкой пересечения границы раздела диэлектриков с осью u (рис. 4).

Обсуждение точности расчета

Ошибки вычислений представленного метода определяются в основном одним источником — представлением функции $w(f)$, описывающей границу между диэлектриками в виде конечного ряда. Второй источник ошибок — конечное число членов в (8) является несущественным, а потому рассматриваться не будет. Используя для вычислений разное количество базовых функций, т. е. порядок матрицы B , заданной соотношением (20), можно оценить ошибку. Было установлено, что для матрицы B порядка 15–16 предельные значения емкости структуры отличаются от вычисленных величин емкости не более чем на 0.2%.

Метод частичных емкостей

Применение МЧЕ к рассматриваемой структуре подробно описано в [5], поэтому ниже приводятся только расчетные формулы

$$C^{(p)} = C_1^{(p)} + C_2^{(p)}, \quad (23)$$

где $C_1^{(p)}, C_2^{(p)}$ — емкости подложки и сегнетоэлектрической пленки соответственно.

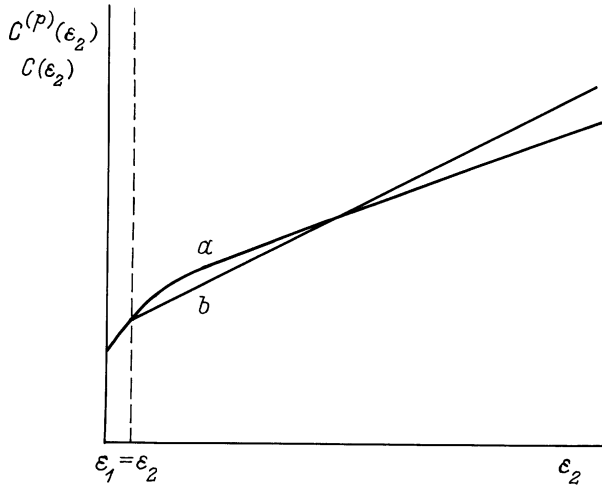


Рис. 5. Качественный ход зависимостей емкости двуслойной структуры как функции диэлектрической проницаемости ε_2 : a — представляемый метод, b — МЧЕ.

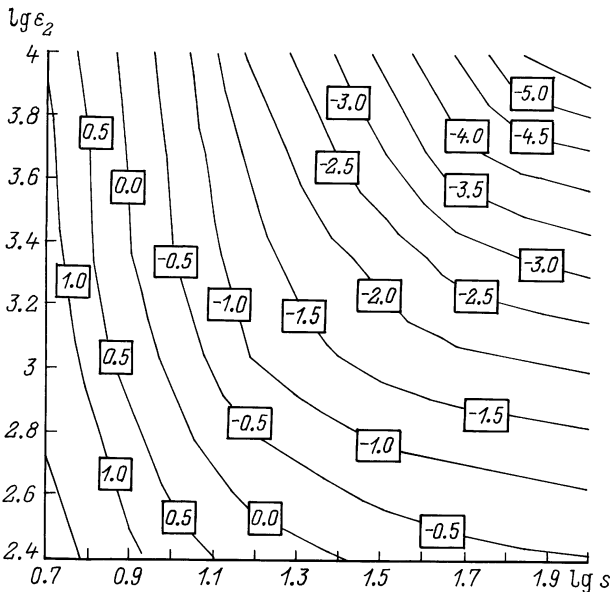


Рис. 6. Кривые равных ошибок в координатах s, ε_2 (s в μm).

Для расчета использована упрощенная формула [6]

$$C^{(p)} = \varepsilon_0 \left(\varepsilon_1 \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{16(h_1 + h_2)}{\pi s} \right) + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{s/h_2 + (4/\pi) \ln(2)} \right). \quad (24)$$

Заметим, что МЧЕ неприменим в случае, когда $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, т.е. когда второе слагаемое в (24) становится отрицательным.

Сравнение и обсуждение результата

Для проверки точности метода частичных емкостей был выполнен ряд расчетов для различных геометрий в широком диапазоне изменения $\varepsilon_2/\varepsilon_1$. Результаты вычислений для симметричной половины структуры представлены в таблице. Все вычисления выполнены для подложки с $\varepsilon_1 = 10$ и толщиной $h = 500 \mu\text{m}$, емкости указаны в nF . На рис. 5 для фиксированной геометрии показан качественный ход зависимостей $C = f(\varepsilon_2)$ представляемого метода (кривая a) и $C^{(p)} = f(\varepsilon_2)$, полученный с помощью МЧЕ (кривая b). Вторая кривая ограничена условием $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. Очевидно, что существует два источника ошибок МЧЕ при малых и больших значениях ε_2 . МЧЕ занижает значение емкости при малых значениях ε_2 и завышает при больших значениях ε_2 .

ε_2	$h_2 = 10 \mu\text{m}, s = 200 \mu\text{m}$			$h_2 = 10 \mu\text{m}, s = 100 \mu\text{m}$		
	C	$C^{(p)}$	$\Delta C, \%$	C	$C^{(p)}$	$\Delta C, \%$
300	0.397	0.391	1.60	6.642	6.556	1.30
1000	0.981	0.984	-0.33	1.790	1.795	-0.28
3000	2.648	2.680	-1.20	5.004	5.049	-0.90
5000	4.315	4.376	-1.40	8.218	8.303	-1.00
10000	8.483	8.617	-1.60	16.250	16.440	-1.20
	$h_2 = 5 \mu\text{m}, s = 80 \mu\text{m}$			$h_2 = 5 \mu\text{m}, s = 20 \mu\text{m}$		
300	0.506	0.500	1.20	1.347	1.326	1.56
1000	1.225	1.234	-0.74	3.883	3.864	0.49
3000	3.279	3.332	-1.60	11.130	11.120	0.09
5000	5.333	5.43	-1.80	18.37	18.37	0.00
10000	10.470	10.67	-1.90	36.5	36.51	-0.03
	$h_2 = 1 \mu\text{m}, s = 20 \mu\text{m}$			$h_2 = 1 \mu\text{m}, s = 5 \mu\text{m}$		
300	0.524	0.519	0.82	1.243	1.224	1.53
1000	1.097	1.113	-1.46	3.341	3.332	0.28
3000	2.736	2.809	-2.67	9.334	9.352	-0.19
5000	4.374	4.504	-2.97	15.330	15.370	-0.26
10000	8.470	8.744	-3.20	30.320	30.420	-0.33

На рис. 6 приведены кривые равных ошибок в координатах s, ε_2 . Типичное значение ошибки для геометрий, представляющих практический интерес, составляет 1–2%. Однако следует помнить, что при больших значениях отношений $s/h_2 (\geq 100)$ и $h_1/h_2 (\geq 500)$ ошибка может значительно превышать ожидаемое значение ($\geq 5\%$). Следует заметить, что чрезвычайная простота и хорошая точность метода частичных емкостей делают его надежным инструментом для практических расчетов в пределах оговоренных выше ограничений.

Автор признателен профессору О.Г. Вендику за постановку задачи и полезные дискуссии, а также весьма благодарен С.П. Зубко за помощь в работе над текстом.

Список литературы

- [1] *Сегнетоэлектрики в технике СВЧ* / Под ред. О.Г. Вендика. М.: Сов. радио, 1979. 272 с.
- [2] *Кочанов Э.С.* // Радиотехника. 1967. Т. 22. № 7. С. 82–85.
- [3] *Кочанов Э.С.* // Радиотехника. 1975. Т. 30. № 1. С. 92–94.
- [4] *Hoffman K.R.* // Handbook of Microwave Integrated Circuits. Artech House, 1987.
- [5] *Вендик О.Г., Зубко С.П., Никольский М.А.* // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 4. С. 000.
- [6] *Лаврик В.И., Савельев В.Н.* // Справочник по конформным отображениям. Киев: Наукова думка, 1970. 252 с.
- [7] *Бинс К., Лоуренсон П.* // Анализ и расчет электрических и магнитных полей. М.: Энергия, 1970.