

01;11

Переход к хаотизации и потеря самоусредняемости в двумерных двухфазных средах на пороге протекания

© С.П. Лукьянец¹, А.Е. Морозовский², А.А. Снарский²

¹ Институт физики АН Украины,
252650 Киев, Украина

² Национальный технический университет Украины,
252056 Киев, Украина

(Поступило в Редацию 21 апреля 1998 г.)

Обсуждаются найденные недавно экспериментально гигантские флуктуации электрического поля в двумерных двухфазных средах на пороге протекания. На примере иерархической реализации таких сред показано, что при $\text{Re } \sigma_i = 0$ (σ_1 и σ_2 — кондактансы фаз) и $\text{Im } \sigma_2 / \text{Im } \sigma_1 > 0$ процедура построения иерархии приводит к выражению А.М. Дыхне $\sigma_e = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}$, а при $\text{Im } \sigma_2 / \text{Im } \sigma_1 < 0$ процедура хаотизируется и среда теряет свойство самоусредняемости.

Эффективная проводимость случайно неоднородной среды — σ_e , связывающая по определению средние по объему поля и токи, является именно той величиной, которая характеризует проводимость неоднородного образца в целом. Для квазистационарного поля σ_e распадается на два слагаемых, каждое из которых зависит своим образом от частоты поля, значения проводимостей и диэлектрических проницаемостей фаз и их концентрации. В двухфазных сильно неоднородных средах эти зависимости наиболее резки в так называемой критической области, когда концентрация хорошо проводящей фазы находится вблизи порога протекания.

В работе [1] было найдено выражение для эффективной проводимости σ_e двумерной двухфазной среды с геометрически эквивалентным в среднем расположением фаз

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}, \quad (1)$$

где σ_1 — локальные проводимости фаз с концентрацией $p = 0.5$.

В частности, к таким средам (средам Дыхне) относятся среды на пороге протекания. Как недавно было показано в ряде работ [2–5], при $\text{Re } \sigma_1 = 0$ и $\text{Re } \sigma_2 \ll \text{Im } \sigma_2$ в таких средах наблюдаются гигантские флуктуации локального электрического поля. В частности, это означает, что модуль электрического поля не усредняется на размерах порядка стандартной корреляционной длины (см. эксперимент в работе [4]). В работе [6] была высказана идея о том, что ренормгрупповое отображение для комплексных импедансов при малых локальных потерях приводит к сценарию динамического хаоса и фрактальной зависимости импеданса для иерархических цепочек.

Один из примеров иерархического построения среды с геометрически эквивалентным расположением фаз приведен в [7,8]. Используя подход [8] и рассмотрев предельный случай $\text{Re } \sigma_2 = \text{Re } \sigma_1 = 0$, покажем, что в зависимости от знака $h = \text{Im } \sigma_2 / \text{Im } \sigma_1$ среда будет обладать принципиально разными свойствами. При $h > h_c = 0$ среда является

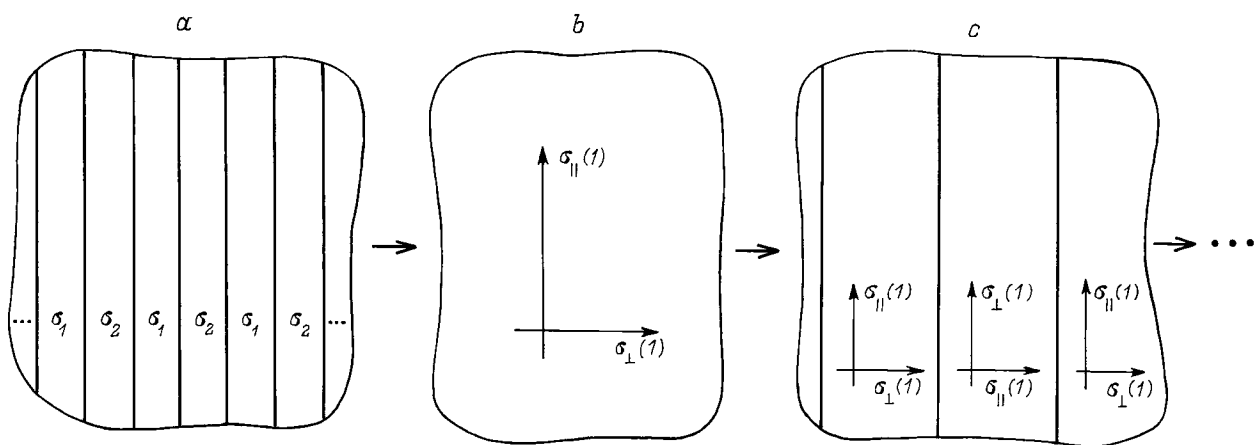


Рис. 1. Процедура последовательного построения иерархической среды Дыхне.

самоусредняющейся и эффективная проводимость определяется (как и должно быть) формулой Дыхне (1). Когда же $h < h_e = 0$, среда теряет свойство самоусреднения и введение эффективных кинетических коэффициентов затруднительно.

Согласно [8], на первом шаге среда "собирается" из полосок равной толщины с проводимостями σ_1 и σ_2 (рис. 1, *a*). Устремляя толщины полосок к нулю — гомогенизируя среду, получаем монокристалл с главными компонентами тензора проводимости $\sigma_{\parallel}(1)$ и $\sigma_{\perp}(1)$ (рис. 1, *b*). Затем, нарезая вдоль и поперек из этого кристалла полоски равной толщины, набираем из них новый монокристалл (рис. 1, *c*), главные компоненты

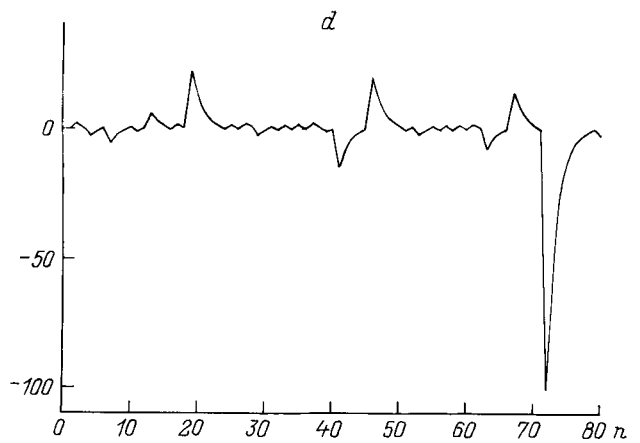
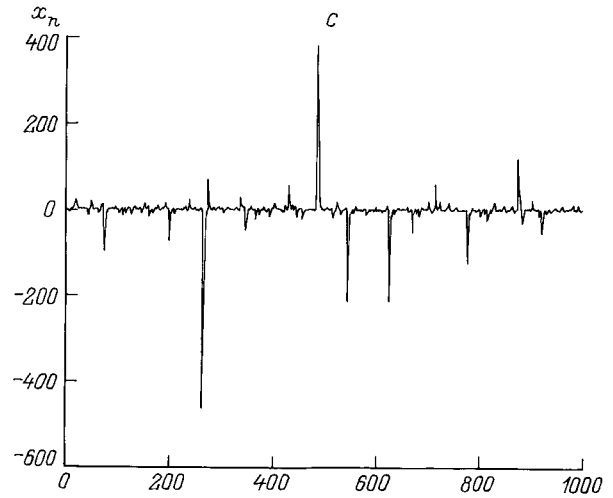
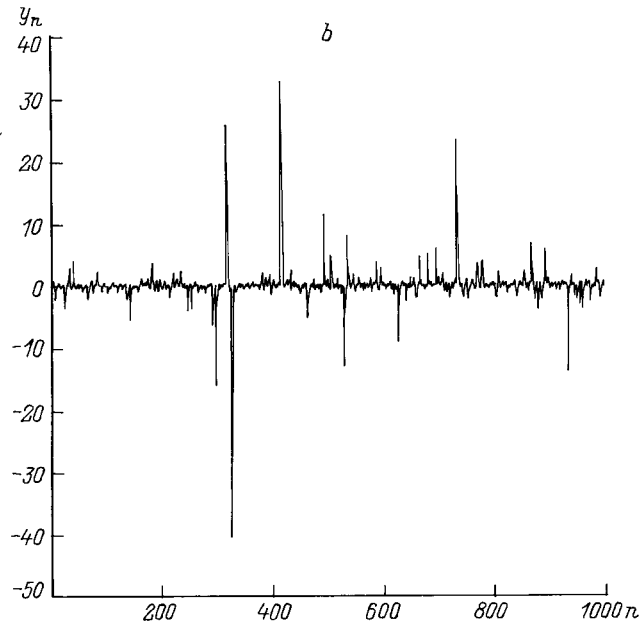
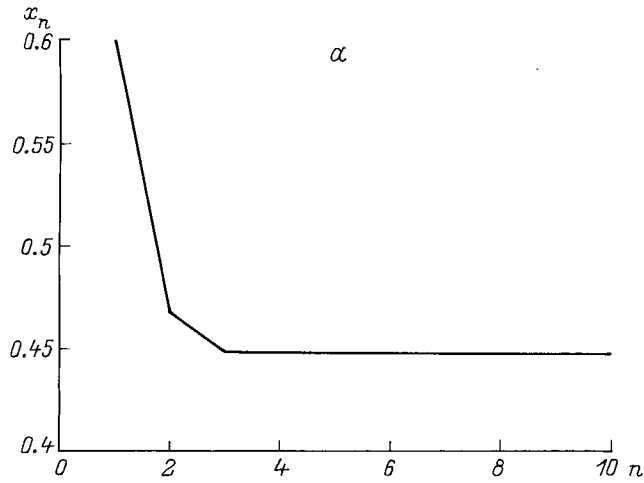


Рис. 2 (продолжение).

Рис. 2. *a* — поведение итерационной последовательности (6) при одинаковом знаке чисто мнимых значений проводимости фаз, $h = \sigma_2/\sigma_1$; *b-d* — хаотическое поведение итерационной процедуры при $h < 0$: $h = -0.2$ (*b*); -2 (*c, d*).

тензора проводимости которого $\sigma_{\parallel}(2)$ и $\sigma_{\perp}(2)$. Легко показать, что на каждом этапе

$$\sigma_{\perp}(n+1) = (\sigma_{\perp}(n) + \sigma_{\parallel}(n))/2,$$

$$\sigma_{\parallel}(n+1) = 2\sigma_{\perp}(n)\sigma_{\parallel}(n)/(\sigma_{\perp}(n) + \sigma_{\parallel}(n)). \quad (2)$$

Заметим, что численные коэффициенты в (2) появляются из-за нормировки на геометрические размеры полного контактанса среды с большим (в пределе бесконечным) числом полосок. Итерационная процедура (2) обладает инвариантом

$$\sigma_{\perp}(n)\sigma_{\parallel}(n) = \sigma_1\sigma_2 = a, \quad (3)$$

с учетом которого (2) можно записать в виде

$$\sigma_{\perp}(n+1) = (\sigma_{\perp}(n) + a/\sigma_{\perp}(n))/2,$$

$$\sigma_{\parallel}(n) = a/\sigma_{\perp}(n). \quad (4)$$

Легко показать [8], что в случае действительных $\sigma_1 > 0$ и $\sigma_2 > 0$ при $n \rightarrow \infty$ мы приходим к выражению

(1) для эффективной проводимости среды [7]. Действительно, отображение (4) обладает неподвижной устойчивой точкой $\sigma_{\parallel}(\infty) = \sigma_{\perp}(\infty) = \sigma_e = \sqrt{\sigma_1\sigma_2}$. При больших значениях n $\sigma_{\perp}(n)$ имеет вид $\sigma_{\perp}(n) \approx \sqrt{\sigma_1\sigma_2}(1 + 0.5(\sigma_1/\sigma_2 - 1)\exp(-n))$, что говорит о быстрой сходимости процедуры (рис. 2, а).

Исследуем (4) для чисто мнимых значений σ_1 и σ_2 и покажем, что при определенных условиях процедура теряет неподвижные точки и устойчивые циклы, а сама последовательность $\sigma_{\parallel}(n)$ и $\sigma_{\perp}(n)$ хаотизируется. Последнее означает, что получаемая такой процедурой среда оказывается несамосредняющей. Для чисто мнимых σ_1 и σ_2 значения элементов последовательности, которые определяются процедурой (4), будут также мнимыми $\text{Re } \sigma_{\perp}(n) = 0, \text{Re } \sigma_{\parallel}(n) = 0$. Итерационная процедура имеет тот же вид, что и (4). Заметим, что при чисто мнимых σ_{\parallel} и σ_{\perp} параметр a — действителен.

Следует выделить два случая.

1) $a = \sigma_1\sigma_2 < 0$ (т.е. σ_1 и σ_2 одного знака; например, элементы первой и второй фазы — емкости, активными сопротивлениями которых можно пренебречь). В этой ситуации мы приходим к тому же результату, что и в случае действительных σ_1 и σ_2 . Процедура обладает устойчивыми неподвижными точками, и значение эффективной проводимости определяется выражением

$$\begin{aligned} \sigma_e &= \sigma_{\perp}(\infty) = \sigma_{\parallel}(\infty) \\ &= \begin{cases} i\sqrt{|\sigma_1\sigma_2|}, & \text{Im } \sigma_1 > 0, \quad \text{Im } \sigma_2 > 0, \\ -i\sqrt{|\sigma_1\sigma_2|}, & \text{Im } \sigma_1 < 0, \quad \text{Im } \sigma_2 < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

2) $a = \sigma_1\sigma_2 > 0$ (т.е. σ_1 и σ_2 разных знаков, например, элементы первой фазы — емкости, а второй — индивидуальности, активными сопротивлениями которых можно пренебречь). В этом случае для отображения, задаваемого (4), не существует неподвижных точек и устойчивых циклов. Из (4) непосредственно следует, что при $a = \sigma_1\sigma_2 > 0$ $\sigma_{\parallel}(n)$ и $\sigma_{\perp}(n)$ имеют различные знаки при любом n . Последнее означает, что в этом случае среда не изотропизуется. Для удобства в (4) перейдем к безразмерным переменным $x_n = \text{Im } \sigma_{\perp}(n)/|\sigma_1|$, $y_n = \text{Im } \sigma_{\parallel}(n)/|\sigma_1|$, тогда (4) можно переписать в виде

$$x_{n+1} = (x_n + h/x_n)/2, \quad y_n = h/x_n. \quad (6)$$

Здесь $h = \sigma_2/\sigma_1$. Теперь начальное значение $x_0 = \pm 1$, а параметром, задающим разные среды, является h . Поведение итерационной последовательности (6) при различных значениях h приведено на рис. 2. Когда $h > 0$, последовательность x_n сходится к неподвижной устойчивой точке x_{∞} (рис. 2, а). Когда же h становится отрицательным, последовательность перестает сходиться и по мере уменьшения h все более приобретает черты хаотического поведения (рис. 2, б-д). Процедура (6) действительно приводит к хаотической динамике, а именно для отображения (4) $f(x) = (x^2 + a)/2x$ (a — положительное и действительное) множество Жюлиа J_f , разделяющее бассейны притяжения устойчивых

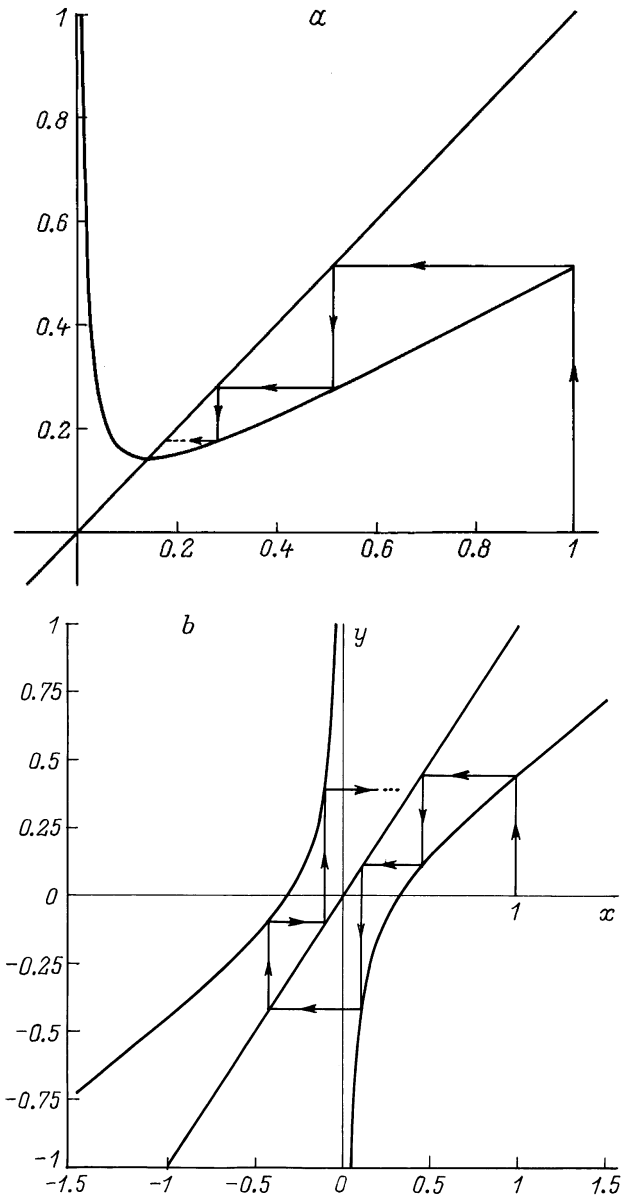


Рис. 3. Сходимость итерационной процедуры с функцией отображения $f(x) = (x + h/x)/2$ к неподвижной устойчивой точке \sqrt{h} при $h = 0.02 > 0$ (а) и потеря устойчивости итерационной процедуры при $h = -0.1 < 0$ (б).

неподвижных точек $\pm\sqrt{h}$, совпадает с мнимой осью [9]. На J_f (4) индуцирует одномерное отображение, которое сводится к (6), и определяет динамику на множестве Жюлиа. Отображение (4) сопряжено с отображением $R(u) = u^2$, получаемое заменой $u = (x + \sqrt{h})/(x - \sqrt{h})$. При этом мнимая ось (множество Жюлиа) переходит в единичную окружность, динамика на которой задается отображением $r(\theta) = 2\theta \pmod{1}$. Последнее, как известно [9,10], порождает хаотическую динамику.

Качественно поведение x_n от n можно пояснить, исходя из графика функции отображения $f(x) = (x + h/x)/2$, которое определяет итерационную процедуру (рис. 3).

На рис. 3, *a* представлены последовательность итераций и ее сходимости к неподвижной устойчивой точке \sqrt{h} при $h > 0$. При достаточно малом отрицательном h (рис. 3, *b*) последовательность x_n сначала монотонно убывает к нулю ($f(x) \approx x/2$, $|h| \ll |x|$), однако вблизи нуля отображение имеет "провал" ($f(x) \approx -|h|/2x$, $|x| \ll |h| \ll 1$), в результате чего последовательность теряет монотонность, меняет знак, а после некоторого числа итераций вновь возвращается в область больших (по сравнению с $|h|$) значений и опять начинает монотонно стремиться к нулю. При дальнейшем уменьшении h "провал" вблизи нуля увеличивается, что приводит к уменьшению промежутков монотонности, увеличению нерегулярных областей и амплитуд x_n .

Данная процедура позволяет также получить спектр резонансных частот, который определяется множеством значений $h = \sigma_2/\sigma_1$, число которых растет с шагом итерации n как 2^n , при которых процедура (6) расходится.

Таким образом, на примере одной из возможных реализаций сред Дыхне с иерархической структурой показано, что при определенных значениях проводимостей фаз среда, оставаясь геометрически средой Дыхне (двумерность, двухфазность, геометрически эквивалентное расположение фаз), в отношении физических свойств теряет самоусредняемость и тем самым понятие эффективных кинетических коэффициентов. Дискуссионными остаются вопросы, теряют ли свойство самоусредняемости другие возможные процедуры, приводящие к средам Дыхне, и теряет ли свойство самоусредняемости "обычная" реализация среды Дыхне типа шахматной доски.

Мы выражаем благодарность Э.М. Баскину и М.В. Энтину за обсуждение вопроса об отсутствии самоусредняемости эффективных свойств слабопоглощающих сред, М.В. Энтину за возможность ознакомиться с работой [6] до ее опубликования и за плодотворное обсуждение работы, которое улучшило наше понимание поднятых вопросов.

Работа частично поддержана грантами РФФИ № 97-02-18397 и "Наука-Сервис" № 1-200-96.

Список литературы

- [1] Дыхне А.М. // ЖЭТФ. 1970. Т. 59. С. 110.
- [2] Brauers F., Blacher S., Sarychev A.K. // Fractal Reviews in the Natural and Applied Sciences / Ed. M. Novak, Chapman & Hall, 1995.
- [3] Brauers F., Blacher S., Henriouille N., Sarychev A.K. // 4th Intern. Conf. ЕТОРІМ4. Book of Abstracts. Moscow, 1996. Vol. 46.
- [4] Lagarkov A.N., Rozanov K.V., Sarychev A.K., Simonov N.A. // Ibid. Vol. 56.
- [5] Baskin E.M., Entin M.V., Sarychev A.K., Snarskii A.A. // Phys. A. 1997. Vol. 242. P. 49.
- [6] Энтин М.В., Энтин Г.М. // Письма ЖЭТФ. 1996. Т. 64. С. 427.
- [7] Schulgaser K.J. // J. Phys. C. 1997. Vol. 10. P. 407.
- [8] Морозовский А.Е., Снарский А.А. // Укр. физ. журн. 1983. Т. 28. С. 1230.
- [9] Пайтген Х.О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. Образцы комплексных динамических систем. М.: Мир, 1993. С. 93.
- [10] Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.