01;03;09

Распространение плоской монохроматической электромагнитной волны в среде со сложным движением

© В.О. Гладышев

Егорьевский авиатехнический колледж гражданской авиации,
140303 Егорьевск, Московская область, Россия

(Поступило в Редакцию 11 ноября 1996 г. В окончательной редакции 28 октября 1997 г.)

Получено точное аналитическое решение для траектории волнового вектора плоской монохроматической электромагнитной волны в среде со сложным характером движения. Показано, что пространственный эффект увлечения электромагнитной волны движущейся средой может быть корректно описан в общем случае только с учетом релятивистских членов порядка β^2.

Введение

Решение дисперсионного уравнения для распространения плоской монохроматической электромагнитной волны в движущейся среде сводится к нахождению волнового вектора $\mathbf{k}_2$ электромагнитной волны в среде. В случае распространения электромагнитного излучения в среде со сложным характером движения необходимо получить решение для каждой локальной области на всей траектории распространения волны, так как волновой вектор в каждой точке траектории зависит от вектора $\mathbf{u}_2$ скорости среды [1].

Подобная зависимость является следствием того, что эффект Физо является частным случаем пространственного эффекта увлечения света движущейся средой [2] и может быть исследована экспериментально. Например, в экспериментах по локации космического летательного аппарата (КЛА) было обнаружено заметное влияние эффекта Физо на направление лазерного луча, проходящего движущийся кварцевый отражатель [3,4]. Если учесть, что эффект должен проявляться в интерферометрических измерениях при сравнительно малых скоростях движения среды распространения электромагнитной волны, можно ожидать его влияние на результаты широкого класса экспериментов.

Исследование данного явления представляет и другой интерес, так как может рассматриваться как прецизионный тест электродинамики движущихся сред, в котором на основе макроскопических наблюдений можно проводить анализ процессов взаимодействия электромагнитной волны с движущимся веществом на атомном уровне. Поэтому естественно возникает задача поиска аналитических уравнений, описывающих траекторию волнового вектора в среде со сложным (отличным от прямолинейного) характером движения.

Заметим, что обычно в литературе при описании влияния движения среды на распространение электромагнитного излучения ограничиваются оценочными расчетами, что вполне допустимо при расчетах эффекта Физо, который может быть достаточно точно описан с учетом релятивистских членов только 1-го порядка. Однако это упрощение неприемлемо в случае описания тонкого явления, как эффект искривления траектории электромагнитной волны, величина которого определяется релятивистскими членами 2-го порядка.

Постановка задачи

Рассмотрим инерциальную систему отсчета, в которой среда с диэлектрической ε_1 и магнитной μ_1 проницаемостями покоится в полупространстве $Z < 0$, а среда с ε_2, μ_2, измеренными в собственной системе отсчета, движется с произвольной скоростью $\mathbf{u}_2$ в полупространстве $Z > 0$. На границе раздела сред существует тангенциальный разрыв скорости. Считаем, что поле скоростей неизменно в направлении оси Y.

Для волнового вектора $\mathbf{k}_2$ во второй среде можно записать в пренебрежении дисперсией движущейся среды и при $\varepsilon_1\mu_1 = 1$ [5]

$$k_{2x} = \frac{\omega_0}{c}\sin\vartheta_0, \tag{1a}$$

$$k_{2z} = \frac{\omega_0}{c}\frac{1}{1-\kappa_2^2\beta_{2z}\gamma_2^2}\Big\{-\kappa_2\beta_{2z}\gamma_2^2(1-\beta_{2x}\sin\vartheta_0) \pm \Big(\cos^2\vartheta_0(1-\kappa_2^2\beta_{2z}\gamma_2^2) + \kappa_2\gamma_2^2(1-\beta_{2x}\sin\vartheta_0)^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\}, \tag{1b}$$

где $\gamma_2^{-2} = 1-(\beta_{2z}^2+\beta_{2x}^2)$, $\kappa_2 = \varepsilon_2\mu_2 - 1$, $\beta_{2x} = u_{2x}/c$, $\beta_{2z} = u_{2z}/c$, $\mathbf{u}_2$ — вектор скорости движения второй среды, ϑ_0 — угол падения электромагнитной волны на границу раздела двух сред, ω_0 — циклическая частота электромагнитной волны, c — скорость света в вакууме, знак выбирается исходя из условия распространения волны от границы раздела двух сред.

Вид выражения для k_{2z} накладывает ограничения на зависимость $\beta_2(x,z)$, при которой существуют аналитические решения для уравнения траектории волнового вектора в среде.

Использование зависимости (1b) при поиске решения вида $z = f(x)$ приводит к неявному интегральному уравнению $z = \int\limits_0^{x_{\max}(x,z)} f(x,z)dx$, не имеющему аналитического решения в общем случае [6]. Однако можно рассмотреть случай, допускающий аналитическое решение, когда пространственный характер эффекта увлечения света проявляется наиболее естественно.

Рассмотрим зависимость скорости u_2 от координат x, z вида

$$\beta_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2}(R_0 - z)^2 + \frac{\omega^2}{c^2}x^2, \qquad (2)$$

которая соответствует вращению относительно центра $(0, R_0)$ с угловой скоростью ω. Данная зависимость определяет параметры $u_{2x} = \omega(R_0 - z)$, $u_{2z} = \omega x$ как функции независимых координат. Использование зависимости (2) с учетом обеих компонент приводит к необходимости использования численных методов, что было реализовано в работе [2], так как применение аналитических методов приводит к возникновению погрешностей вычислений, обусловленных отбрасыванием членов ряда разложения и т. п., больших, чем величина исследуемого эффекта.

С другой стороны , на пространственный характер эффекта увлечения света (искривление траектории волнового вектора) оказывает влияние именно тангенциальная составляющая скорости среды, поэтому этот случай является наиболее интересным при изучении пространственного эффекта увлечения света движущейся средой.

Рассмотрим случай, когда в движени среды присутствует только тангенциальная составляющая β_{2x}, а $\beta_{2z} = 0$, что соответствует закону сдвигового течения со скоростью, линейно изменяющейся с расстоянием от границы. Тогда для угла преломления ϑ_2 можно записать

$$\operatorname{tg}^2\vartheta_2(z) = \left(\frac{k_{2x}}{k_{2z}}\right)^2 = \frac{\alpha^2\big(1 - \beta_x^2(z)\big)}{\gamma^2\big(1 - \beta_x^2(z)\big) + (n_2^2 - 1)\big(1 - \alpha\beta_x(z)\big)^2}, \qquad (3)$$

где $\alpha = \sin\vartheta_0$, $\gamma = \cos\vartheta_0$, $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2\mu_2}$, $\beta_x(z) = u_{2x}(z)/c$.

Волновой вектор $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ падающей электромагнитной волны удовлетворяет соотношению $k_0 \gg 1/R_0$, что позволяет использовать решения волнового уравнения для плоской электромагнитной волны, проходящей тангенциальный разрыв скорости на границе раздела сред [4] для каждой локальной области среды.

Нас будет интересовать уравнение, описывающее траекторию $\mathbf{k}_2$, т. е. аналитическая зависимость $x = f(z)$. Очевидно, для каждой локальной области среды можно записать разностное соотношение

$$\Delta x_i = \operatorname{tg}\vartheta_2(z_i)\Delta z_i,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$, $z_i = \sum\limits_{j=1}^{i}\Delta z_j$, $x_i = \sum\limits_{j=1}^{i}\Delta x_j$.

Тогда зависимость текущих координат можно получить после суммирования и переходу к интегралу в пределе при $\Delta z_i \to 0$

$$x = \int\limits_0^z \operatorname{tg}\vartheta_2(z)dz. \qquad (4)$$

Особенностью полученного выражения является то, что пределы могут быть заданы произвольно, однако мы не имеем точной информации о точке пересечения траектории, например, с заданной цилиндрической поверхностью радиуса R_0. Поэтому, вообще говоря, интеграл содержит переменный верхний предел. Также заметим, что выражение для угла преломления является точным и содежит квадратичные члены, что имеет принципиальное значение при исследовании пространственного эффекта увлечения света движущейся средой.

Аналитическое решение уравнения траектории волнового вектора электромагнитной волны

Будем искать решение уравнения (4) в общем виде. Для этого подставим (3) и перейдем к новой переменной β_x. После преобразований получим

$$x = \tau\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2}\frac{(\beta_x - 1)d\beta_x}{\sqrt{G^4(\beta_x)}}, \qquad (5)$$

где

$$\tau = \frac{c}{\omega}\frac{\alpha}{\sqrt{1 - n_2^2\alpha^2}},$$

$$G^4(\beta_x) = (a - \beta_x)(b - \beta_x)(\beta_x - c)(\beta_x - d),$$

$$\beta_{x1,2} = \frac{\alpha(1 - n_2^2) \pm \gamma^2 n_2}{1 - n_2^2\alpha^2},$$

$$a = \beta_{x1}, \qquad b = -c = 1, \qquad d = \beta_{x2}.$$

Выражение содержит корень из многочлена четвертой степени и можно показать, что (5) представимо в виде композиции эллиптических интегралов. Пределы интегрирования определяются из выражения $\beta_{2x}(z)$ для начальных и конечных координат z_1, z_2 траектории волнового вектора. Введем обозначение

$$J_S = \int\frac{d\beta_x}{(\beta_x - 1)^S\sqrt{G^4(\beta_x)}}. \qquad (6)$$

Тогда для координаты x можно записать

$$x = \tau(J_{-2} - 2J_{-1})\Big|_{\beta_1}^{\beta_2}. \qquad (7)$$

Для того чтобы J_{-2} можно было свести к табличным интегралам, необходимо повысить его порядок. Разложим $G^4(\beta_x)$ по степеням $(\beta_x - 1)$

$$G^4(\beta_x) = b_0(\beta_x - 1)^4 + b_1(\beta_x - 1)^3 + b_2(\beta_x - 1)^2 + b_3(\beta_x - 1) + b_4,$$

где $b_0 = 1$, $b_1 = 4 - (\beta_{x1} + \beta_{x2})$, $b_2 = 5 + \beta_x\beta_{x2} - 3(\beta_{x1} + \beta_{x2})$, $b_3 = 2(1 + \beta_{x1}\beta_{x2} - (\beta_{x1} + \beta_{x2}))$, $b_4 = 0$.

Интегрируя первую производную произведения

$$\sqrt{G^4(\beta_x)}(\beta_x - 1)^{-S},$$

получим рекуррентную формулу, позволяющую осуществлять понижения порядка эллиптического интеграла

$$b_0(2-S)J_{S-3} + \frac{b_1}{2}(3-2S)J_{S-2} + b_2(1-S)J_{S-1} + \frac{b_3}{2}(1-2S)J_S - b_4SJ_{S+1} = \sqrt{G^4(\beta_x)}(\beta_x-1)^{-S},$$
$$S = 1, 2, 3, \ldots \,. \tag{8}$$

Используя (8) при $S = 1$ и учитывая, что $b_4 = 0$, получим выражение для J_{-2}

$$J_{-2} = \frac{1}{2b_0}\left(\frac{2\sqrt{G^4(\beta_x)}}{\beta_x - 1} - b_1J_{-1} + b_3J_1\right). \tag{9}$$

После подстановки (9) в (7) выражение для x будет иметь вид

$$x = \frac{\tau}{2b_0}\left(\frac{2\sqrt{G^4(\beta_x)}}{\beta_x - 1} + b_3J_1 + (4b_0 - b_1)J_{-1}\right)\Bigg|_{\beta_1}^{\beta_2}. \tag{10}$$

Заметим, что выполняются неравенства $a > b \geq \beta_x > c > d$, и введем обозначения

$$I_1 = \int\limits_c^{\beta_x}\frac{\beta_x d\beta_x}{\sqrt{G^4(\beta_x)}}, \quad I_2 = \int\limits_c^{\beta_x}\frac{d\beta_x}{\sqrt{G^4(\beta_x)}}, \quad I_3 = -J_1\big|_c^{\beta_x}.$$

Тогда (10) можно выразить через табличные интегралы

$$x = \frac{\tau}{2b_0}\left(\frac{2\sqrt{G^4(\beta_x)}}{\beta_x - 1} - b_3I_3 + (4b_0 - b_1)(I_1 - I_2)\right)\Bigg|_{\beta_1}^{\beta_2},$$
$$I_1 = 2g\left[(c-d)\Pi(\varphi, n_1, k) + dF(\varphi, k)\right],$$
$$I_2 = 2gF(\varphi, k),$$
$$I_3 = 2gq\left[(c-d)\Pi(\varphi, n_2, k) + (1-c)F(\varphi, k)\right],$$
$$g = \frac{1}{\sqrt{a-c)(b-d)}}, \qquad q = \frac{1}{(1-c)(1-d)}, \tag{11}$$

где $F(\varphi, k)$ и $\Pi(\varphi, n_i, k)$ — нормальные эллиптические интегралы 1-го и 3-го рода, которым соответствуют характеристики n_1, n_2, амплитуда φ и модуль k в форме

$$n_1 = \frac{b-c}{b-d}, \qquad n_2 = \frac{(b-c)(1-d)}{(b-d)(1-c)},$$

$$\varphi = \arcsin\sqrt{\frac{(b-d)(\beta_x - c)}{(b-c)(\beta_x - d)}}, \quad k = \sqrt{\frac{(b-c)(a-d)}{(a-c)(b-d)}}.$$

Подставляя коэффициенты a, b, c, d, окончательно имеем

$$x = \tau\Bigg(c_1\Pi(\varphi, n_2, k) - c_2\Pi(\varphi, n_1, k) - c_3F(\varphi, k) - \frac{\sqrt{G^4(\beta_x)}}{1 - \beta_x}\Bigg)\Bigg|_{\beta_1}^{\beta_2}, \tag{12}$$

где

$$c_1 = \frac{1}{t}(1 + \beta_{x2})(1 - \beta_{x1}),$$

$$c_2 = \frac{1}{t}(1 + \beta_{x2})(\beta_{x2} + \beta_{x1}),$$

$$c_3 = \frac{1}{t}\left[2(1 - \beta_{x1}) + (1 - \beta_{x2})(\beta_{x2} + \beta_{x1})\right],$$

$$t = \sqrt{(1 + \beta_{x1})(1 - \beta_{x2})}.$$

Сравнение результатов расчетов по формуле (12) при использовании таблиц эллиптических интегралов [7] с результатами прямых численных расчетов по формуле (4) указывает на зависимость точности аналитических вычислений от частоты составления используемых таблиц эллиптических интегралов и необходимости применения интерполяции. Тем не менее полученное выражение является точным, и можно говорить о целесообразности составления более точных таблиц эллиптических интегралов в области параметров, соответствующих экспериментальным данным.

Можно также заметить, что $n_2 = 1$ для любого d. В этом случае можно выразить $\Pi(\varphi, n_2, k)$ через эллиптические интегралы первого и второго рода

$$\Pi(\varphi, n_2 = 1, k) = F(\varphi, k) - \sec^2\alpha\big(E(\varphi, k) - \operatorname{tg}\varphi\Delta\varphi\big),$$

$$\Delta\varphi = \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}, \quad k = \sin\alpha.$$

Использование данного выражения уменьшает погрешность интерполяции вследствие более точного составления таблиц $F(\varphi, k)$ и $E(\varphi, k)$.

Оценка влияния членов порядка β^2

Здесь кажется уместным вопрос о необходимости учета членов порядка β^2 для описания пространственного эффекта Физо. Действительно, формулы электродинамики для продольного эффекта Физо линейны относительно скорости среды и члены порядка β^2 несущественны, хотя и присутствуют в точном решении дисперсионного уравнения. Однако для пространственного эффекта Физо, т. е. при появлении поперечной составляющей увлечения волны, учет членов с β^2 может являться необходимым. Для обоснования этого утверждения получим выражение для длины пути светового луча в среде с выбранным законом движения в пренебрежении β^2. Для длины пути светового луча в приближении геометрической оптики можно записать

$$S = \int_0^z \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\,\vartheta_2(z)}dz, \qquad (13)$$

где

$$\mathrm{tg}^2\,\vartheta_2 \cong \frac{\alpha^2}{\gamma^2 + (n_2^2 - 1)(1 - 2\alpha\beta_x)}. \qquad (3')$$

Переходя к новой переменной и выполняя преобразования, получим

$$S = -\frac{c}{\omega}\int_{\beta_1}^{\beta_2} \sqrt{\frac{a - \beta_x}{b - \beta_x}}\, d\beta_x, \qquad (14)$$

где

$$a = \frac{n_2^2}{2\alpha(n_2^2 - 1)}, \quad b = \frac{n_2^2 - \alpha^2}{2\alpha(n_2^2 - 1)}.$$

Интегрирование (14) дает выражение

$$S = \frac{c(a - b)}{\omega}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\psi + 1}{\psi - 1}\right| + \frac{\psi}{\psi^2 - 1}\right)\Bigg|_{\psi_1}^{\psi_2}, \qquad (15)$$

где

$$\psi = \sqrt{\frac{a - \beta_x}{b - \beta_x}}, \qquad \psi_{1,2} = \sqrt{\frac{a - \beta_{x1,2}}{b - \beta_{x1,2}}}.$$

В случае $\omega = 0$ можно записать длину траектории до пересечения с прямой $z = R_0$ в виде $S_0 = R_0/\cos\vartheta_2$, где ϑ_2 находится из закона Снеллиуса.

Тогда разность длины пути S при учете только членов порядка β и длины пути S_0 без вращения будет приближенно характеризовать величину эффекта Физо в движущейся среде.

Численные расчеты показывают, что эффект искривления траектории распространения электромагнитной волны в среде с вращением [6] имеет порядок малости, сравнимый с величиной погрешности вычислений по формуле (15), подтверждая тем самым предположение о необходимости учета β^2 для корректного описания пространственного эффекта увлечения электромагнитного излучения движущейся средой.

Заключение

Эффект Физо принято характеризовать величиной дрейфа фазовой скорости поля суперпозиции волны возбуждения и вторичных электромагнитных волн в движущейся среде. Также удобно использовать в качестве характеристики продольного увлечения электромагнитной волны разность фаз лучей, прошедших движущуюся среду в противоположных направлениях. В случае пространственного явления увлечения электромагнитной волны проявляется дополнительный эффект — отклонение траектории волнового вектора суперпозиционной волны в среде. Для описания данного явления можно использовать аналитические решения уравнения траектории волнового вектора в движущейся среде.

В заключение заметим, что решение уравнения (4) представимо в виде композиции эллиптических интегралов не только для выбранного закона движения среды, что открывает возможность применения аналитических методов в задачах описания траектории волнового вектора в среде с более сложными законами движения.

Работа выполнена в рамках Межвузовской научно-технической программы "Фундаментальные исследования в технических вузах России".

Список литературы

[1] *Солимено С., Корозиньяни Б., ди Порто П.* Дифракция и волноводное распространение оптического излучения. Пер. с англ. М.: Мир, 1989. 664 с.

[2] *Гладышев В.О.* // Письма в ЖЭТФ. 1993. Т. 58. Вып. 8. С. 593–597.

[3] *Васильев В.П., Гришмановский В.А., Плиев Л.Ф., Старцев Т.П.* // Письма в ЖЭТФ. 1992. Т. 55. Вып. 6. С. 317–320.

[4] *Васильев В.П., Гусев Л.И., Денган ДжДж., Шаргородский В.Д.* // Радиотехника. 1966. № 4. С. 80–84.

[5] *Болотовский Б.М., Столяров С.Н.* // УФН. 1989. Т. 159. № 1. С. 155–180.

[6] *Гладышев В.О.* // Письма в ЖТФ. 1993. Т. 19. Вып. 19. С. 23–28.

[7] Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.