01;10

Движение частицы в постоянном магнитном поле и в поле плоской монохроматической электромагнитной волны

© Е.М. Болдырев

Институт физики высоких энергий,
142284 Протвино, Московская область, Россия

(Поступило в Редакцию 8 января 1998 г. В окончательной редакции 19 октября 1998 г.)

Получено решение уравнения движения заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле — суперпозиции постоянно-однородного магнитного поля и поля плоской монохроматической эллиптически поляризованной электромагнитной волны как решение задачи Коши. Рассматривается случай резонанса. Проводится анализ полученного решения.

Введение

Решение уравнения движения заряженной частицы во внешнем поле — суперпозиции постоянно-однородного магнитного поля и поля плоской, монохроматической электромагнитной волны, поляризованной по кругу как задачи Коши, было получено в [1]. В настоящей работе аналогичное решение находится для случая плоской монохроматической, эллиптически поляризованной электромагнитной волны, которое как частные случаи включает и указанное выше решение, и решение для плоской монохроматической линейно поляризованной электромагнитной волны.

Задача имеет не только академический интерес, но и практическое значение, поскольку указанный тип волны с высокой точностью соответствует электромагнитному полю лазерного пучка, на основе которого функционируют такие системы, как лазер на свободных электронах и как ондулятор [2]. Для разработки указанных систем требуется тщательный анализ движения заряженной частицы в приведенной конфигурации полей.

Сама постановка задачи (исходная электромагнитная волна берется в самом общем виде), корректность решения и полученное решение, представленное в явной зависимости от начальных данных, от амплитуд поляризации, от комбинации знака заряда частицы и степени поляризации электромагнитной волны, позволяют применять полученное решение непосредственно в практических расчетах.

Условные обозначения. Постановка задачи

В настоящей работе (x, y, z, ct) — координаты точки в четырехмерном пространстве. Трехмерный вектор V в этом пространстве будет, как обычно, обозначить $\mathbf{V}$; $[x, y, z]$ — координаты этого вектора; $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ — скалярное произведение векторов; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор положения заряженной частицы, $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор ее начального положения; m — масса частицы; ε — кинетическая энергия частицы; ε_0 — ее начальная энергия; $\mathbf{P}$ — импульс частицы; $\mathbf{P}_0$ — ее начальный импульс; $\mathbf{v}$ — скорость частицы; $|e|$ — величина заряда частицы; c — скорость света, φ^W — скалярный потенциал электромагнитного поля волны; $\mathbf{A}^W, \mathbf{A}^H$ — векторные потенциалы этих полей; $\mathbf{A}_0^W$ — амплитуда (комплексная) электромагнитной волны; $\mathbf{n}$ — вектор направления распространения волны. Волновой 4-вектор для электромагнитного поля волны

$$\left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}\right), \quad \mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n},$$

$\mathbf{E}^W, \mathbf{H}^W$ — напряженность электрического и магнитного полей волны; $\mathbf{H}$ — напряженность постоянного однородного магнитного поля (H — величина этого поля).

Условия калибровки для электромагнитного поля волны есть $\varphi^W = 0$ и $\operatorname{div}\mathbf{A}^W = 0$,

$$\mathbf{A}^W = \frac{1}{2}\left[\mathbf{A}_0^W e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} + \text{k.c.}\right]$$

(k.c. — комплексно-сопряженные члены).

Согласно

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A},$$

$$\mathbf{E}^W = \frac{1}{2}\left[\mathbf{E}_0^W e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} + \text{k.c.}\right],$$

где

$$\mathbf{E}_0^W = i\frac{\omega}{c}\mathbf{A}_0^W, \quad \mathbf{H}^W = [\mathbf{n}, \mathbf{E}^W].$$

Следуя стандартной процедуре для учета поляризации электромагнитной волны [3], представим амплитуду напряженности волны в виде

$$\mathbf{E}_0^W = \operatorname{Re}\mathbf{E}_0^W + i\operatorname{Im}\mathbf{E}_0^W$$

и введем два вещественных вектора

$$\mathbf{E}_0^{(1)} = \operatorname{Re}\mathbf{E}_0^W\cos\theta + \operatorname{Im}\mathbf{E}_0^W\sin\theta,$$

$$\mathbf{E}_0^{(2)} = \operatorname{Re}\mathbf{E}_0^W\sin\theta - \operatorname{Im}\mathbf{E}_0^W\cos\theta,$$

так чтобы

$$\left(\mathbf{E}_0^{(1)}, \mathbf{E}_0^{(2)}\right) = 0,$$

для этого надо выбрать угол θ такой, чтобы

$$\operatorname{tg}2\theta = \frac{2(\operatorname{Re}\mathbf{E}_0^W, \operatorname{Im}\mathbf{E}_0^W)}{(\operatorname{Re}\mathbf{E}_0^W)^2 - (\operatorname{Im}\mathbf{E}_0^W)^2}.$$

Теперь выберем систему координат следующим образом: ось $0x$ направим вдоль вектора $\mathbf{E}_0^{(1)}$, тогда вектор $\mathbf{E}_0^{(2)}$ будет направлен либо вдоль оси $0y$, либо против; это учитывается введением вектора $g\mathbf{E}_0^{(2)}$, где $g = \pm 1$, и при $g = 1$ $\mathbf{E}_0^{(2)}$ имеет с осью $0y$ противоположное направление, а при $g = -1$ совпадает с осью $0y$ (т.е. g — степень поляризации волны); ось $0z$ направим вдоль направления распространения волны (и вдоль направления постоянного однородного магнитного поля). Введем допустимое преобразование координат $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$, $\xi = t - (z/c)$. Тогда в этой системе (опустим штрихи) напряженности электромагнитного поля исходной суперпозиции имеют вид

$$\mathbf{H} = \left[-gE_0^{(2)}\sin(\omega\xi - \theta), E_0^{(1)}\cos(\omega\xi - \theta), H\right],$$

$$\mathbf{E} = \left[E_0^{(1)}\cos(\omega\xi - \theta), gE_0^{(2)}\sin(\omega\xi - \theta), 0\right].$$

Для определения импульса $\mathbf{P}(t)$ заряженной частицы в таком внешнем поле с последующим вычислением ее траектории $\mathbf{r}(t)$ имеем следующую задачу Коши [3]:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{H}], \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = e(\mathbf{E}, \mathbf{v}),$$

$$\mathbf{P}(t_0) = \mathbf{P}_0, \quad \varepsilon(t_0) = \varepsilon_0. \tag{1}$$

Введенное выше преобразование координат на множестве решений (1) индуцирует преобразование $x'(\xi) = x(t)$, $y'(\xi) = y(t)$, $z'(\xi) = z(t)$, $\xi = t - (z(t)c)$, при этом

$$\frac{d}{dt} = \frac{\varepsilon - cP_z}{\varepsilon}\frac{d}{d\xi}.$$

Положим $e = g_e|e|$, $g_e = +1$ для положительно заряженной частицы и $g_e = -1$ для отрицательно заряженной частицы;

$$\omega_1 = \frac{|e|E_0^{(1)}}{mc}, \quad \omega_2 = \frac{|e|E_0^{(2)}}{mc}, \quad \boldsymbol{\pi} = \frac{\mathbf{P}}{mc}, \quad \boldsymbol{\pi} = \frac{\mathbf{P}_0}{mc},$$

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon}{mc^2}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_0}{mc^2}, \quad \alpha = \varepsilon - \pi_z, \quad \omega_h = \frac{|e|H}{\alpha mc}.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt} = \frac{\alpha}{\varepsilon}\frac{d}{d\xi}$$

и (1) имеет вид

$$\frac{d\pi_x}{d\xi} = g_e\omega_1\cos(\omega\xi - \theta) + g_e\omega_h\pi_y,$$

$$\frac{d\pi_y}{d\xi} = g_e\omega_2\sin(\omega\xi - \theta) - g_e\omega_h\pi_x,$$

$$\frac{d\pi_z}{d\xi} = g_e\frac{1}{\alpha}[\pi_x\omega_1\cos(\omega\xi - \theta) + g\pi_y\omega_2\sin(\omega\xi - \theta)],$$

$$\frac{d\varepsilon}{d\xi} = g_e\frac{1}{\alpha}[\pi_x\omega_1\cos(\omega\xi - \theta) + g\pi_y\omega_2\sin(\omega\xi - \theta)],$$

$$\boldsymbol{\pi}(\xi_0) = \boldsymbol{\pi}_0, \quad \varepsilon(\xi_0) = \varepsilon_0. \tag{2}$$

Из третьего и четвертого уравнений системы (2) непосредственно видно, что α есть интеграл этой системы, т.е. интеграл движения, и, следовательно, $\alpha = \varepsilon_0 - \pi_{0x}$. При этом $\boldsymbol{\pi}$ и $\mathbf{r}$ связаны соотношением

$$\boldsymbol{\pi} = \frac{\alpha}{c}\frac{d\mathbf{r}}{d\xi}. \tag{3}$$

С учетом (3) левые части первого и второго уравнений системы (2) соответственно можно представить в виде

$$\frac{d}{d\xi}\left[g_e\frac{\omega_1}{\omega}\sin(\omega\xi - \theta) + g_e\frac{\alpha}{c}\omega_h y\right],$$

$$-\frac{d}{d\xi}\left[gg_e\frac{\omega_2}{\omega}\cos(\omega\xi - \theta) + g_e\frac{\alpha}{c}\omega_h x\right],$$

и мы имеем еще два интеграла движения

$$\Phi_x = \pi_{0x} - g_e\frac{\omega_1}{\omega}\sin(\omega\xi_0 - \theta) - g_e\frac{\alpha}{c}\omega_h y_0,$$

$$\Phi_y = \pi_{0y} + gg_e\frac{\omega_2}{\omega}\cos(\omega\xi_0 - \theta) + g_e\frac{\alpha}{c}\omega_h x_0.$$

Из этих интегралов движения с учетом (3) для определения $x(\xi)$ и $y(\xi)$ имеем следующую систему уравнений:

$$\frac{dx}{d\xi} = g_e\frac{c}{\alpha}\frac{\omega_1}{\omega}\sin(\omega\xi - \theta) + g_e\frac{\alpha}{c}\omega_h y + \frac{c}{\alpha}\Phi_x,$$

$$\frac{dy}{d\xi} = -gg_e\frac{c}{\alpha}\frac{\omega_2}{\omega}\cos(\omega\xi - \theta) + g_e\frac{\alpha}{c}\omega_h x - \frac{c}{\alpha}\Phi_y. \tag{4}$$

Дифференцируя первое уравнение этой системы по ξ, с учетом второго уравнения для определения $x(\xi)$ имеем дифференциальное линейное неоднородное уравнение

$$\frac{d^2x}{d\xi^2} + \omega_h^2 x = \frac{c}{\alpha}g_e\omega_h$$

$$\times\left[\left(\frac{\omega_1}{\omega_h} - gg_e\frac{\omega_2}{\omega}\right)\cos(\omega\xi - \theta) + \Phi_y\right]. \tag{5}$$

При решении этого уравнения мы должны различать следующие четыре случая: $|\omega_h| \neq |\omega|$, $|\omega_h| = |\omega|$, $\omega_h = 0$, $\omega = 0$. Последние два случая рассматриваются как частные случаи первого случая. В первых двух случаях имеем общий интеграл уравнения (5) $x(\xi, C_1, C_2)$, после чего из (4) определяем $y(\xi, C_1, C_2)$ и далее, используя (3), находим $\pi_x(\xi, C_1, C_2)$ и $\pi_y(\xi, C_1, C_2)$; $\pi_z(\xi, C_1, C_2, C_x')$ (C_x' — аддитивна) и $z(\xi, C_1, C_2, C_z', C_z)$ (здесь аддитивна C_z) находим элементарным интегрированием из третьего уравнения системы (2). Поскольку в задаче Коши (2) только три уравнения являются независимыми [4], то для определения четырех произвольных констант C_1, C_2, C_z', C_z имеем, согласно начальным условиям, шесть уравнений, но из них только четыре независимых, что и позволяет решением четырех уравнений относительно четырех неизвестных определить указанные константы и решить тем самым задачу.

В третьем случае первые два уравнения в (2) независимы и, следовательно, система решается элементарным интегрированием без использования интегралов движения Φ_x и Φ_y, все шесть констант интегрирования аддитивны и без особого труда находятся из начальных условий задачи Коши (2).

В четвертом случае интегрирование уравнений и определение констант подробно описаны в соответствующей литературе (см., например, [4]) и в настоящей работе не делается. По указанной причине нет необходимости и в анализе этого решения.

Решение задачи

Указанные решения имеют вид.

Случай $|\omega_h| \neq |\omega|$:

$$x = C_{11}\cos\omega_h(\xi-\xi_0) + C_{12}\sin\omega_h(\xi-\xi_0) + C_{13}\cos(\omega\xi-\theta) + C_{14},$$

$$y = C_{21}\cos\omega_h(\xi-\xi_0) + C_{22}\sin\omega_h(\xi-\xi_0) + C_{23}\sin(\omega\xi-\theta) + C_{24},$$

$$z = C_{31}\cos[\omega_h(\xi-\xi_0) - (\omega\xi-\theta)] + C_{32}\cos[\omega_h(\xi-\xi_0) + (\omega\xi-\theta)] + C_{33}\sin[(\omega\xi-\xi_0) - (\omega\xi-\theta)] + C_{34}\sin[\omega_h(\xi-\xi_0) + (\omega\xi-\theta)] + C_{35}\sin 2(\omega\xi-\theta) + C_{36}(\xi-\xi_0) + C_{37},$$

$$\pi_x = C'_{11}\cos\omega_h(\xi-\xi_0) + C'_{12}\sin\omega_h(\xi-\xi_0) + C'_{13}\sin(\omega\xi-\theta),$$

$$\pi_y = C'_{21}\cos\omega_h(\xi-\xi_0) + C'_{22}\sin\omega_h(\xi-\xi_0) + C'_{23}\cos(\omega\xi-\theta),$$

$$\pi_z = C'_{31}\cos[\omega_h(\xi-\xi_0) - (\omega\xi-\theta)] + C'_{32}\cos[\omega_h(\xi-\xi_0) + (\omega\xi-\theta)] + C'_{33}\sin[\omega_h(\xi-\xi_0) - (\omega\xi-\theta)] + C'_{34}\sin[\omega_h(\xi-\xi_0) + (\omega\xi-\theta)] + C'_{35}\cos 2(\omega\xi-\theta)] + C'_{36}.$$

Случай $|\omega_h| = |\omega|$:

$$x = R_{11}(\xi-\xi_0)\sin(\omega\xi-\theta) + R_{12}\cos\omega(\xi-\xi_0) + R_{13}\sin\omega(\xi-\xi_0) + R_{14},$$

$$y = R_{21}(\xi-\xi_0)\cos(\omega\xi-\theta) + R_{22}\cos\omega(\xi-\xi_0) + R_{23}\sin\omega(\xi-\xi_0) + R_{24},$$

$$z = R_{31}(\xi-\xi_0)^3 + R_{32}(\xi-\xi_0)^2 + R_{33}(\xi-\xi_0) + R_{34}(\xi-\xi_0)\cos 2(\omega\xi-\theta) + R_{35}\cos 2\omega(\xi-\xi_0) + R_{36}\sin 2\omega(\xi-\xi_0) + R_{37},$$

$$\pi_x = R'_{11}(\xi-\xi_0)\cos(\omega\xi-\theta) + R'_{12}\cos\omega(\xi-\xi_0) + R'_{13}\sin\omega(\xi-\xi_0),$$

$$\pi_y = R'_{21}(\xi-\xi_0)\sin(\omega\xi-\theta) + R'_{22}\cos\omega(\xi-\xi_0) + R'_{23}\sin\omega(\xi-\xi_0),$$

$$\pi_z = R'_{31}(\xi-\xi_0)^2 + R'_{32}(\xi-\xi_0) + R'_{33}(\xi-\xi_0)\sin 2(\omega\xi-\theta) + R'_{34}\cos 2(\omega\xi-\theta) + R'_{35}\sin 2(\omega\xi-\theta) + R'_{36}.$$

Случай $\omega_h = 0$:

$$x = W_{11}(\xi-\xi_0) + W_{12}\cos(\omega\xi-\theta) + W_{13},$$

$$y = W_{21}(\xi-\xi_0) + W_{22}\cos(\omega\xi-\theta) + W_{23},$$

$$z = W_{31}(\xi-\xi_0) + W_{32}\sin 2(\omega\xi-\theta) + W_{33}\cos(\omega\xi-\theta) + W_{34}\sin(\omega\xi-\theta) + W_{35},$$

$$\pi_x = W'_{11}\sin(\omega\xi-\theta) + W'_{12},$$

$$\pi_y = W'_{21}\cos(\omega\xi-\theta) + W'_{22},$$

$$\pi_z = W'_{31}\cos 2(\omega\xi-\theta) + W'_{32}\cos(\omega\xi-\theta) + W'_{33}\sin(\omega\xi-\theta) + W'_{32}.$$

Случай $\omega = 0$:

$$x = H_{11}\cos\omega_h(\xi-\xi_0) + H_{12}\sin\omega_h(\xi-\xi_0) + H_{13},$$

$$y = H_{21}\cos\omega_h(\xi-\xi_0) + H_{22}\sin\omega_h(\xi-\xi_0) + H_{23},$$

$$z = H_{31}(\xi-\xi_0) + H_{32},$$

$$\pi_x = H'_{11}\cos\omega_h(\xi-\xi_0) + H'_{12}\sin\omega_h(\xi-\xi_0),$$

$$\pi_y = H'_{21}\cos\omega_h(\xi-\xi_0) + H'_{22}\sin\omega_h(\xi-\xi_0),$$

$$\pi_z = H'_{31}.$$

Во всех случаях $\varepsilon(\pi_z - \pi_{0z}) + \varepsilon_0$. Коэффициенты, которые будем называть амплитудами (хотя это и не совсем корректно), C_{ij}, C'_{ij}, R_{ij}, R'_{ij}, W_{ij}, W'_{ij}, H_{ij}, H'_{ij} приведены в [5]. Численные значения индексов ij непосредственно видны из приведенного решения.

Анализ решения

Как видно из самого решения и из выражения амплитуд, движение заряженной частицы в указанной суперпозиции полей происходит довольно сложным образом и не является в общем случае простой суперпозицией движений в поле электромагнитной волны и постоянном однородном магнитном поле, а поэтому анализ решения, (а он, как это видно, сводится к анализу амплитуд), достаточно объемный, если его рассматривать в зависимости от всех тех постоянных, от которых зависят амплитуды. В настоящей работе мы ограничимся таким анализом, который представляет несомненный физический интерес, а именно существованием начальных и прочих условий, при которых частица движется в одной плоскости $x = \text{const}$ или $y = \text{const}$ (без ограничения общности ограничимся последней плоскостью), и асимптотики для $\omega \gg 1$.

Будем говорить, что выражение имеет нулевой порядок, если оно равно $0(1/\omega_0)$ (т.е. не зависит от ω), и имеет первый порядок, если оно равно $0(1/\omega^1)$, и т.п.

Далее из явного выражения амплитуд их можно условно рассматривать как независимыми, так и такими, которые выражаются через последние. В дальнейшем значения амплитуд в частных случаях будем выписывать только для независимых амплитуд, за исключением выражений для асимптотики, поскольку указанная зависимость в общем случае не сохраняет порядок амплитуд.

Отметим, что круговая поляризация имеет место, когда $\omega_1 = \omega_2$, и в случаях $|\omega_h| \neq |\omega|$ и $|\omega_h| = |\omega|$ полученное решение совпадает с решением в [1].

Случай $|\omega_h| \neq |\omega|$

В этом случае мы имеем девять независимых амплитуд. Для того чтобы частица двигалась в плоскости $y = \text{const}$, необходимо, что бы $\Omega_{\omega\omega_h} = 0$, и достаточно положить

$$\pi_{0x} = g_e \frac{\omega_1}{\omega} \sin(\omega\xi_0 - \theta)$$

и $\pi_{oy} = 0$. Отсюда сразу следует, что в данном случае для круговой поляризации подобное движение невозможно. В этом случае имеем

$$C_{13} = -g_e \frac{c}{\alpha} \frac{\omega_1}{\omega^2}, \quad C_{14} = x_0 + g_e \frac{c}{\alpha} \frac{\omega_1}{\omega^2} \cos(\omega\xi_0 - \theta),$$

$$C_{24} = y_0, \quad C_{35} = -\frac{1}{8} \frac{c}{\alpha^2} \frac{\omega_1^2}{\omega_3},$$

$$C_{36} = \frac{c}{\alpha} \pi_{0z} + \frac{1}{4} \frac{c}{\alpha^2} \frac{\omega_1^2}{\omega^2} \cos 2(\omega\xi_0 - \theta),$$

$$C_{37} = z_0 + \frac{1}{8} \frac{c}{\alpha^2} \frac{\omega_1^2}{\omega^3} \sin 2(\omega\xi_0 - \theta).$$

Остальные независимые амплитуды равны нулю. Для указанной асимптотики с точностью до нулевого порядка имеем

$$C_{11} = H_{11}, \quad C_{12} = H_{12}, \quad C_{14} = H_{13}, \quad C_{21} = H_{21},$$

$$C_{22} = H_{22}, \quad C_{24} = C_{23}, \quad C_{36} = H_{31}, \quad C_{37} = H_{32},$$

$$C'_{11} = H'_{11}, \ C'_{12} = H'_{12}, \ C'_{21} = H'_{21}, \ C'_{22} = H'_{22}, \ C'_{36} = H'_{31}.$$

Остальные амплитуды в этом приближении равны нулю, и тем самым мы имеем движение в постоянном однородном магнитном поле. С точностью до членов первого порядка, если $\pi_{0x} = \pi_{0y}$, для пространственных компонент мы опять имеем колебательный процесс с частотой ω_h, но для импульсов имеем суперпозицию двух колебательных процессов с частотой ω и ω_h (ср. [1]).

Отметим, что в предельном случае малых частот имеем колебательный процесс с частотой ω, который с случае круговой поляризации представляет собой винтовое движение с указанной частотой.

Случай $|\omega_h| = |\omega|$

В этом случае имеем четырнадцать независимых амплитуд. Отличие от нуля амплитуды R_{11} делает движение в этом случае принципиально отличным от движения в первом случае. Однако необходимым условием для того, чтобы частица двигалась в плоскости $y = \text{const}$, есть именно условие $R_{11} = 0$, т.е. условие $\Omega_- = 0$ или $\omega_1 = gg_e\omega_2$, откуда с необходимостью следует чтобы случай $|\omega_1| \neq |\omega_2|$ был исключен, и мы фактически имеем случай круговой поляризации. Тогда при выполнении дополнительных условий $\pi_{0x} = g_e(\omega_1/\omega)\sin(\omega\xi_0 - \theta)$, $\pi_{oy} = 0$ имеем

$$R_{12} = -g_e \frac{c}{\alpha} \frac{\omega_1}{\omega^2} \cos(\omega\xi_0 - \theta), \ R_{13} = g_e \frac{c}{\alpha} \frac{\omega_1}{\omega^2} \sin(\omega\xi_0 - \theta),$$

$$R_{33} = \frac{c}{\alpha} \pi_{0z} + \frac{1}{4} \frac{c}{\alpha^2} \frac{\omega_1^2}{\omega^2} \cos 2(\omega\xi_0 - \theta),$$

$$R_{35} = -\frac{1}{8} \frac{c}{\alpha^2} \frac{\omega_1^2}{\omega^2} \sin 2(\omega\xi_0 - \theta),$$

$$R'_{12} = g_e \frac{\omega_1}{\omega} \sin(\omega\xi_0 - \theta), \quad R'_{13} = g_e \frac{\omega_1}{\omega} \cos(\omega\xi_0 - \theta).$$

Остальные независимые амплитуды равны нулю.

Об асимптотике в этом случае вообще говорить не приходится, поскольку здесь ω, фактически являясь ларморовой частотой, сравнима с $\omega_i \, (i = 1, 2)$. Однако можно сказать, что с точностью до членов первого порядка при выполнении условий $\Omega_- = 0$ и очень большом продольном импульсе и при остальных независимых амплитудах, в этом приближении равных нулю, мы имеем

$$R_{12} = H_{11}, \quad R_{13} = H_{12}, \quad R_{14} = H_{13}, \quad R_{22} = H_{21},$$

$$R_{23} = H_{22}, \quad R_{24} = H_{23}, \quad R_{33} = H_{31}, \quad R_{37} = H_{32},$$

т.е. траектории частицы такие же, как и траектории в постоянном однородном магнитном поле. Но для импульсов подобное не имеет место и на движение в постоянном однородном магнитном поле накладываются осцилляции электромагнитной волны.

Случай $\omega_h = 0$

В этом случае мы имеем 11 независимых амплитуд. Для того чтобы частица двигалась в плоскости $y = \text{const}$, необходимо чтобы $\omega_2 = 0$, и, принимая еще дополнительно $\pi_{0y} = 0$, мы видим, что амплитуды W_{11}, W_{12}, W_{13}, W'_{11} остаются без изменения, а остальные отличные от нуля независимые равны

$$W_{23} = y_0, \quad W_{31} = \frac{c}{\alpha} \left[\pi_{0z} - g_e \frac{1}{\alpha} \frac{\omega_1}{\omega} \pi_{0x} \sin(\omega\xi_0 - \theta) - \frac{1}{4} \frac{1}{\alpha} \frac{\omega_1^2}{\omega^2} \cos 2(\omega\xi_0 - \theta) + \frac{1}{2} \frac{\omega_1^2}{\omega^2} \right],$$

$$W_{32} = -\frac{1}{8}\frac{c}{\alpha^2}\frac{\omega_1^2}{\omega^3}, \quad W_{35} = z_0 + g_e\frac{c}{\alpha^2}\frac{\omega_1}{\omega^2}\pi_{0x}\cos(\omega\xi_0 - \theta) - \frac{3}{8}\frac{c}{\alpha^2}\frac{\omega_1^2}{\omega^3}\sin 2(\omega\xi_0 - \theta).$$

В этом случае также представляет интерес существование таких начальных и прочих условий, при которых мы имеем винтовое движение, а именно

$$\pi_{0x} = g_e\frac{\omega_1}{\omega}\sin(\omega\xi_0 - \theta), \quad \pi_{0y} = -gg_e\frac{\omega_2}{\omega}\cos(\omega\xi_0 - \theta).$$

В этом случае амплитуды W_{12}, W_{13}, W_{22}, W_{23}, W_{32}, W'_{11}, W'_{21} остаются без изменения, а остальные отличные от нуля амплитуды имеют вид

$$W_{31} = \frac{c}{\alpha}\left[\pi_{0z} + \frac{1}{4}\frac{1}{\alpha}\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega^2}\cos 2(\omega\xi_0 - \theta)\right],$$

$$W_{35} = z_0 + \frac{1}{8}\frac{c}{\alpha^2}\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega^2}\sin 2(\omega\xi_0 - \theta),$$

т.е. чисто винтовое движение имеем только для случая круговой поляризации.

Асимптотика в нулевом приближении имеет совсем простой вид — это прямолинейное равномерное движение. С точностью до членов первого порядка амплитуды W_{11}, W_{21}, W'_{11}, W'_{12}, W'_{21}, W'_{22} остаются без изменения, а остальные отличные в этом приближении от нуля амплитуды имеют вид

$$W_{13} = x_0, \quad W_{23} = y_0,$$

$$W_{31} = \frac{c}{\alpha}\left[\pi_{0z} - g_e\frac{1}{\alpha}\frac{\omega_1}{\omega}\pi_{0x}\sin(\omega\xi_0 - \theta) + gg_e\frac{1}{\alpha}\frac{\omega_2}{\omega}\pi_{0y}\cos(\omega\xi_0 - \theta)\right],$$

$$W_{35} = z_0, \quad W'_{32} = -gg_e\frac{1}{\alpha}\frac{\omega_2}{\omega}\pi_{0y}, \quad W'_{33} = g_e\frac{1}{\alpha}\frac{\omega_1}{\omega}\pi_{0x},$$

$$W'_{34} = \pi_{0z} - g_e\frac{1}{\alpha}\frac{\omega_1}{\omega}\pi_{0x}\sin(\omega\xi_0 - \theta) + gg_e\frac{1}{\alpha}\frac{\omega_2}{\omega}\pi_{0y}\cos(\omega\xi_0 - \theta).$$

Заключение

Определение $\Omega_{\omega\omega_h}$ и Ω_- приведено в [5]. Мы получили решение задачи в виде безразмерных комплексов $\boldsymbol{\pi}$ и ε, но из их определения переход к импульсу и энергии вполне очевиден.

Для того чтобы вновь перейти от переменных $(x, y, z, c\xi)$ к переменным (x, y, z, ct), необходимо решить нелинейное уравнение

$$\xi + \frac{z(\xi)}{c} = t.$$

Как показывают рассуждения в [4], решение $\xi = \xi(t, z)$ этого уравнения существует и оно без труда находится численным методом. При рассмотренной асимптотике это решение находится просто, поскольку в этом случае вдоль z-оси частица фактически движется равномерно.

В заключение автор выражает благодарность А.П. Воробьеву за обсуждение и сделанные замечания.

Список литературы

[1] *Болдырев Е.М.* // ЖТФ. 1997. Т. 67. Вып. 2. С.
[2] *Dattoli G., Torre A.* // Free-electron Laser Theory. 1989. CERN 89-03.
[3] *Левич В.Г.* Курс теоретической физики. Т. 1. М., 1968.
[4] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М., 1973.
[5] *Болдырев Е.М.* Препринт ИФВЭ. Протвино, 1997. № 97-87.