Краткие сообщения

09;10;12

Генерирование электромагнитных волн релятивистскими электронами в резонаторе со скрещенными радиальным электростатическим и аксиальным магнитным полями в условиях плазменного резонанса

© Ю.В. Кириченко

Национальный научный центр,
Харьковский физико-технический институт,
310108 Харьков, Украина

(Поступило в Редакцию 29 сентября 1998 г.)

Теоретически исследованы условия генерирования электромагнитных волн тонким цилиндрическим слоем релятивистских электронов, вращающихся в скрещенных аксиальном магнитном и радиальном электростатическом полях в цилиндрическом резонаторе. Получено дисперсионное уравнение, описывающее взаимодействие волн с электронами в условиях плазменного резонанса. Исследована зависимость инкрементов от релятивистского фактора и магнитного поля.

Интерес к исследованиям динамики движения заряженных частиц в цилиндрически симметричном электростатическом поле определяется рядом практических приложений таких систем, как счетчики Гейгера–Мюллера, электрические фильтры загрязненных газов, ионно-плазменные насосы, газоразрядные измерители высокого давления, генераторы миллиметровых волн и др. Теоретическое исследование возможности обмена энергией нерялитивистских электронов, вращающихся в скрещенных полях, с электромагнитным полем проведено в работах [1,2]. Там было показано, что одним из механизмов генерации электромагнитных волн является плазменный резонанс. Увеличение скорости электронов до релятивистской позволило бы существенно увеличить частоту колебаний и продвинуться вплоть до субмиллиметрового диапазона. Продольное магнитное поле увеличивает силу, удерживающую электроны на орбите, что дает возможность повысить не только скорость электронов, но и их плотность. Последнее позволит увеличить мощность генератора и инкременты волн.

Рассмотрим цилиндрический металлический резонатор, неограниченный вдоль оси z (используется цилиндрическая система координат r, φ, z), параллельно которой направлено магнитное поле B_0. Вокруг оси цилиндра, на которой находится металлическая заряженная нить, вращается цилиндрический слой электронов. Внутренний радиус резонатора равен b, радиус нити — a ($a \ll b$). Релятивистские электроны удерживаются на равновесных круговых орбитах скрещенными магнитным полем B_0 и радиальным электростатическим полем нити $E_0(r)$. Мы пренебрегаем постоянными собственными магнитным и электрическим полями электронного слоя. Предполагается, что система однородна вдоль оси z. Зависимость всех переменных величин от φ и времени t определим множителем $\exp[i(m\varphi - \omega t)]$, где $m \neq 0$ — целые числа, ω — комплексная частота. Исследование проводится в гидродинамическом приближении. Равновесная невозмущенная скорость электронов равна

$$v_0(r) = \frac{1}{2}\omega_c r + \frac{1}{2}q\left(\omega_c^2 r^2 + \frac{4E_0(r)er}{m_e\gamma}\right)^{1/2}, \qquad (1)$$

где $\omega_c = eB_0/m_e\gamma c$, $\gamma = 1/(1 - v_0^2(r)/c^2)^{1/2}$, c — скорость света, $-e < 0$, и m_e — заряд и масса электрона $q = \pm 1$.

Невозмущенная плотность цилиндрически симметричного слоя электронов $n_0(r)$ отлична от нуля между поверхностями $r = r_-$ и $r = r_+$, т.е. $n_0(r) = 0$ при $r \leqslant r_-$ и $r \geqslant r_+$ $(a < r_- < r_+ \ll b)$. Приближение тонкого слоя электронов означает, что

$$\frac{\delta r}{r_-} \ll 1, \qquad (2)$$

где $\delta r = r_+ - r_-$.

Из линеаризованных уравнений Лоренца и непрерывности и из уравнений Максвелла получаем дифференциальное уравнение в области $r_- < r < r_+$ для E_φ — азимутальной компоненты поля волны $\mathbf{E}$

$$\frac{d}{dr}\left\{\frac{c^2}{r\omega_{r1}}\left(1 - \frac{\Omega^2}{\gamma^3 w_r}\right)\frac{d}{dr}(rE_\varphi) + \frac{\omega_d\Omega^2(mc^2 - v_0\omega r)}{\gamma^3 r w_r w_{r1}\omega_m}E_\varphi\right\}$$
$$= -\frac{\Omega^2\omega_g(mc^2 - v_0\omega r)}{\gamma\omega_m r^2 w_r w_{r1}}\frac{d}{dr}(rE_\varphi) - \left\{1 - \frac{\Omega^2}{\gamma^3 w_r}\right.$$
$$\left. + \frac{\Omega^2\omega_d}{\gamma^3 w_r\omega_m^2}\left(v_0' - \frac{v_0}{r} + \frac{\Omega^2\omega_g\omega_m^2}{\gamma w_r w_{r1}}\right)\right\}E_\varphi, \qquad (3)$$

где $w_r = \omega_m^2 + w_{r0}$, $w_{r1} = \omega^2 - m^2c^2/r^2 - \omega_m^2\Omega^2/\gamma w_r$, $w_{r0} = (\omega_g + v_0/r - v_0')\omega_d$, $\omega_d = 2v_0/r + (\gamma^2 - 2)\omega_c + ev_0E_0\gamma/m_ec^2$, $\omega_g = \omega_c - 2v_0/r + ev_0E_0/m_e\gamma c^2$, $\Omega^2(r) = 4\pi n_0(r)e^2/m_e$, $\omega_m = \omega - mv_0/r$.

Плазменный резонанс возникает, когда частота электромагнитного поля близка к частоте собственных продольных локальных колебаний электронов в лабораторной системе отсчета, т. е. при условии

$$\gamma^3 w(\omega) \simeq \Omega^2(r). \tag{4}$$

Из (4) следует приближенное выражение для реальной части резонансной частоты

$$\mathrm{Re}\,(\omega) \simeq \omega_p,$$

где

$$\omega_p = \frac{mv_0}{r} \pm \Delta\omega_p, \quad \Delta\omega = \left(\frac{\Omega^2(r)}{\gamma^3} - w_{r0}\right)^{1/2}. \tag{5}$$

Интегрируя уравнение (3) по r и пренебрегая слагаемыми выше первого порядка малости по параметру $\delta r/r_-$, получаем граничные условия для E_φ и $d(rE_\varphi)/dr$ (подобный метод использовался в [1–6]). Сшивая E_φ и $d(rE_\varphi)/dr$ на границах слоя с соответствующими величинами в вакууме и учитывая резонансное условие (4), получим дисперсионное уравнение, которое очень сложно. Для того чтобы хотя бы качественно проанализировать это уравнение, представим входящие в него функции Бесселя J_m и Неймана N_m от аргументов $x_1 = \omega a/c$ и $x = \omega r_-/c$ в виде ряда по степеням аргументов, ограничиваясь первыми членами разложения. В функциях $J_m(x_2)$, $N_m(x_2)$ $(x_2 = \omega b/c)$ ограничимся первыми членами асимптотического разложения. В соответствии с условием (2) будем искать решение дисперсионного уравнения в виде $\omega = \omega^{(0)} + \omega^{(1)}$, $|\omega^{(1)}| \ll \omega^{(0)}$, где $\omega^{(0)}$ — собственные частоты резонатора в отсутствие электронов. В окончательном виде дисперсионное уравнение, описывающее плазменный резонанс в однородном слое электронов, имеет вид

$$(\delta\omega)^2 + (i\nu - \Delta_{\nu p}) + \Delta_p^2 = 0, \tag{6}$$

$$\Delta_p^2 = -\frac{c^2\pi x_0^{2\bar{m}-1}\omega_p[\bar{m} \mp |v_0|\gamma^2 r_- \Delta\omega_p/c^2]^2 \varepsilon^2(r_-)\delta r}{r_-^2 2^{2\bar{m}+2}\bar{m}!^2\eta^{4\bar{m}}\,\mathrm{Re}\,(\omega_m) b\gamma^5}$$
$$\times(\omega_d d_0 - \eta^{2\bar{m}} - 1)^2, \tag{7}$$

$$d_0 = \frac{\mathrm{sign}\,(v_0)\bar{m}(\eta^{2\bar{m}} - 1)}{[\bar{m} \mp |v_0|\gamma^2 r_- \cdot \Delta\omega_p/c^2]\,\mathrm{Re}\,(\omega_m)}, \tag{8}$$

$$\Delta_{\nu p} \simeq \omega^{(0)} - \omega_p + \Delta_\nu, \tag{9}$$

где $\delta\omega = \omega - \omega_p$, $x_0 = k_0 r_-/c$, $k_0 = \omega^{(0)}/c$, $\varepsilon(r_-) = \Omega(r_-)c/r_-$, $\eta = r_-/a$, $\bar{m} = |m|$; слагаемое $i\nu$ в (6) феноменологически учитывает потери, вызванные поглощением в стенках и излучением из резонатора, а слагаемое Δ_ν в (9) — сдвиг частоты, вызванный этими потерями; в формулах (7), (8) знаки $\mp$ соответствуют знакам $\pm$ в (5).

Поскольку $\mathrm{Im}\,(\omega) = \mathrm{Im}\,(\delta\omega)$, нарастающим во времени колебаниям соответствует $\mathrm{Im}\,(\delta\omega) > 0$. Такие решения уравнения (6) возникают при условии $\Delta_p^2 > 0$ или, как следует из (7), при

$$v_0 > v_{\mathrm{ph}}, \quad \text{где} \quad v_{\mathrm{ph}} = \frac{\mathrm{Re}(\omega)r_-}{m}, \tag{10}$$

v_{ph} — фазовая скорость волны вблизи слоя электронов.

При условии (10), как следует из (6), (7), возможно и затухание волны. Однако декремент такой волны в отличие от черенковского резонанса [1,2] не равен инкременту. В самом общем случае из (6) следует, что при $\Delta_{\nu p}^2 < 4\Delta_p^2$, когда мала разность $|\omega^{(0)} - \omega_p|$ или сдвиг частоты Δ_ν, неустойчивые решения возможны и в отсутствие потерь ($\nu = 0$). Но при $\Delta_{\nu p}^2 > 4\Delta_p^2$ именно потери обусловливают неустойчивость. Если $|i\nu - \Delta_{\nu p}| \gg |\Delta_p|$, то инкремент определяется выражением $\mathrm{Im}(\omega) = \nu\Delta_p^2/(\nu^2 + \Delta_{\nu p}^2)$ и имеет максимум по ν.

Рассматривая неоднородный слой электронов, будем предполагать, что функция $\Omega^2(r)$ имеет колоколообразную форму с максимумом при $r = r_m$. Условие плазменного резонанса (4) будет выполняться при двух значениях радиальной координаты $r = r_1$ и $r = r_2(r_- < r_1 < r_m < r_2 < r_+)$. В окончательном виде инкремент определяется выражением

$$\mathrm{Im}\,(\omega) = -\nu - \mathrm{sign}\left(\mathrm{Re}\,(\omega_m)\right)$$
$$\times \frac{\pi^2 h x_0^{2\bar{m}-1}\omega_p\left[\bar{m} \mp |v_0|\gamma^2 r_- \cdot \Delta\omega_p/c^2\right]^2}{2^{2\bar{m}+1}\bar{m}!^2 b\gamma^2\eta^{4\bar{m}}}$$
$$\times\left(\omega_d d_0 - \eta^{2\bar{m}} - 1\right)^2, \tag{11}$$

где

$$h = \frac{\Omega^2(r_1)}{\partial\Omega^2/\partial r\big|_{r_1} - \partial(\gamma^3 w_r)/\partial r\big|_{r_1,\omega_p}}$$
$$- \frac{\Omega^2(r_2)}{\partial\Omega^2/\partial r\big|_{r_2} - \partial(\gamma^3 w_r)/\partial r\big|_{r_2,\omega_p}}. \tag{12}$$

В рассматриваемом нами случае, когда $|\partial\Omega^2/\partial r|_{r_{1,2}} \gg |\partial(\gamma^3 w_r)/\partial r|_{r_{1,2}\omega_p}$, из (11), (12) видно, что генерация при плазменном резонансе в неоднородном слое электронов имеет место при выполнении условия (10). При этом в отличие от однородного слоя неустойчивость имеет пороговый характер. Она имеет место когда второе слагаемое в (11) больше первого. В случае однородного слоя из (5) получаем формулу для частоты генерируемой волны

$$\mathrm{Re}(\omega) \simeq \frac{c}{r_-}\left\{\frac{\bar{m}(\gamma^2-1)^{1/2}}{\gamma} - \frac{1}{\gamma^2}\Big(\varepsilon^2\gamma + \gamma^2(\gamma^2-1)\right.$$
$$\left. + \left[(\gamma^2-1)^{1/2} - \mathrm{sign}\,(v_0)\varepsilon_1\right]^2\Big)^{1/2}\right\}, \tag{13}$$

где $\varepsilon_1 = \omega_c r_- \gamma/c$.

Для неоднородного слоя электронов частота, при которой выполняется резонансное условие (4), зависит от координаты r, которая меняется в пределах $r_- \leqslant r \leqslant r_m$

(или $r_m \leqslant r \leqslant r_+$). Поэтому генерироваться будут частоты, лежащие в диапазоне

$$\frac{c}{r_-}\left\{\frac{\bar{m}(\gamma^2-1)^{1/2}}{\gamma} - \frac{1}{\gamma^2}\Big(\varepsilon_m^2\gamma + \gamma^2(\gamma^2-1) + \left[(\gamma^2-1)^{1/2} - \operatorname{sign}(v_0)\varepsilon_1\right]^2\Big)^{1/2}\right\} \leqslant \mathrm{Re}(\omega) \leqslant \frac{c}{r_-} \times \left\{\frac{\bar{m}(\gamma^2-1)^{1/2}}{\gamma} - \frac{1}{\gamma^2}\Big(\gamma^2(\gamma^2-1) + \left[(\gamma^2-1)^{1/2} - \operatorname{sign}(v_0)\varepsilon_1\right]^2\Big)^{1/2},\right\}, \tag{14}$$

где $\varepsilon_m = \max\limits_r \varepsilon(r)$.

Из (13), (14), где учтено условие (10), видно, что генерация возможна только при $\bar{m} > 1$. При больших γ диапазон (14) сужается и генерироваться будет частота

$$\mathrm{Re}\,(\omega) \simeq \frac{c(\bar{m}-1)}{r_-}. \tag{15}$$

К величине (15) при больших γ стремится также частота (13). Инкремент в случае неоднородного слоя меньше (он пропорционален (h/b)), чем в случае однородного (пропорционален $(\delta r/b)^{1/2}$). Однако генерация в первом случае обладает тем преимуществом, что условия резананса не нарушаются при изменении радиуса орбиты электронов.

Нами был также рассмотрен случай аксиально-симметричной волны, когда $m = 0$. Оказалось, что и для однородного, и для неоднородного слоев электронов $\mathrm{Im}\,(\omega) < 0$, что соответствует затухающим колебаниям.

Автор выражает благодарность В.В. Долгополову за полезное обсуждение результатов работы.

Список литературы

[1] *Alexeff I., Dyer F.* // Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 45. N 5. P. 351–354.

[2] *Долгополов В.В., Долгополов М.В., Кириченко Ю.В.* и др. // Материалы VII международной Крымской конференции "СВЧ техника и телекоммуникационные технологии". 1997. Т. 2. С. 487–488.

[3] *Долгополов В.В., Долгополов М.В., Кириченко Ю.В.* // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1997. Т. 40. № 12. С. 16–22.

[4] *Степанов К.Н.* // ЖТФ. 1965. Т. 35. Вып. 6. С. 1002–1014.

[5] *Степанов К.Н.* // ЖТФ. 1965. Т. 35. Вып. 8. С. 1349–1358.

[6] *Долгополов В.В., Омельченко А.Я.* // ЖЭТФ. Т. 18. Вып. 3. С. 1089–1099.