01;03

О поверхностном течении жидкости в электрическом поле

© В.А. Семенов

Пермский государственный университет,
614600 Пермь, Россия

(Поступило в Редакцию 5 марта 1998 г.)

Представлено аналитическое решение модельной задачи, которое демонстрирует эффект возникновения поверхностного течения слабопроводящей жидкости в электрическом поле, обнаруженный ранее автором экспериментально.

В работе [1] представлены результаты экспериментального исследования нового типа поверхностного течения, возникающего на свободной поверхности слабопроводящей жидкости в постоянном электрическом поле. При этом установлено, что в отличие от электрокапиллярного движения капель ртути [2] в описанном эффекте поверхностная скорость пропорциональна квадрату напряжения между электродами. В настоящей работе аналитически показана возможность данного эффекта.

Допустим, что внутри заполненного слабопроводящей жидкостью бесконечного цилиндра радиуса b находится воздушный бесконечный пузырь радиуса R (плоская задача). Оси цилиндра и пузыря совпадают. Предположим, что на поверхности цилиндра задано распределение потенциала по закону $U_0 \cos\varphi$, где φ — угол полярной системы координат (r, φ), отсчитываемый от оси x, перпендикулярной оси цилиндра, а U_0 — характерная разность потенциалов. Ввиду разной проводимости воздуха и жидкости на ее свободной поверхности возникает свободный заряд, который в приближении малой проводимости воздуха может быть найден из решения следующей задачи:

$$\Delta u_j = 0, \quad j = 1, 2,$$

$$r = b: \quad u_2 = U_0 \cos\varphi,$$

$$r = R: \quad u_1 = u_2,$$

$$\sigma \frac{\partial u_2}{\partial r} = -\sigma_s \Delta_s u_2 + \operatorname{div}_s(\mathbf{v}_s \tau) - \nabla_s \sigma_s \nabla_s u_2,$$

$$4\pi\tau = \frac{\partial u_1}{\partial r} - \varepsilon \frac{\partial u_2}{\partial r}. \tag{1}$$

Здесь u_1, u_2 — соответственно потенциал в пузыре и в жидкости; σ, ε — соответственно проводимость и диэлектрическая проницаемость жидкости; σ_s — поверхностная проводимость; Δ_s — поверхностный лапласиан; $\mathbf{v}_s$ — поверхностная скорость; ∇_s — поверхностный градиент; τ — поверхностный свободный заряд. При протекании тока касательная к свободной поверхности компонента напряженности электрического поля не равна нулю. Вследствие этого на свободный поверхностный заряд будет действовать сила, которая обусловит возникновение поверхностного течения. Найдем стационарную скорость этого течения в приближении малых чисел Рейнольдса, в предположении о недеформируемой свободной поверхности и малой вязкости воздуха. Для этого случая имеем следующие уравнения:

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \quad -\nabla p + \eta\Delta\mathbf{v} = 0,$$

$$r = b: \quad \mathbf{v} = 0,$$

$$r = R: \quad v_n = 0, \quad \sigma_{i,k} n_k = \tau E_i, \tag{2}$$

где $\mathbf{v}$ — скорость в жидкости, E_i — касательная к свободной поверхности составляющая напряженности, η — вязкость жидкости, $\sigma_{i,k}$ — тензор вязких напряжений, p — давление, n — единичный вектор нормали.

После обезразмеривания ($r \to R$, $u \to U_0$, $v \to U_0^2/4\pi R\eta$, $\tau \to U_0/4\pi R$, $\sigma_s \to \sigma_s/\sigma R$, $b \to b/R$) в предположении, что поверхностный ток, обусловленный омической проводимостью, много меньше тока, обусловленного поверхностным течением, имеем

$$\Delta u_j = 0, \quad j = 1, 2,$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \quad \Delta\mathbf{v} = \nabla p,$$

$$r = b: \quad u_2 = \cos\varphi, \quad v_r = 0, \quad v_\varphi = 0,$$

$$r = 1: \quad u_1 = u_2, \quad \frac{\partial u_2}{\partial r} = \beta v_\varphi \nabla_\varphi \tau, \tag{3}$$

$$\tau = \frac{\partial u_1}{\partial r} - \varepsilon \frac{\partial u_2}{\partial r},$$

$$v_r = 0, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} = \tau E_\varphi,$$

$$\beta = \frac{U_0^2}{16\pi^2 R^2 \eta\sigma}. \tag{4}$$

Решая задачу (3), (4) методом разложения в ряд по β ($\beta \ll 1$), найдем скорость на свободной поверхности жидкости

$$v_\varphi^{(s)} = v_0 \sin 2\varphi + (v_1 \sin 2\varphi + v_2 \sin 4\varphi)\beta + \ldots,$$

$$v_0 = \frac{b^2(b^2-1)}{2\varepsilon(b^2+1)^3}, \quad v_1 = -\frac{b^4(b^2-1)^2(\varepsilon b^2 + \varepsilon - 1 + b^2)}{4\varepsilon^3(b^2+1)^7},$$

$$v_2 = \frac{b^4(b^2-1)(\varepsilon b^6 + \varepsilon + 2b^6 - 2)\times(b^{10} + 3b^8 + 6b^6 - 6b^4 - 3b^2 - 1)}{16\varepsilon^3(b^2+1)^6(b^6+1)(b^8 + 2b^6 + 4b^4 + 2b^2 + 1)}. \tag{5}$$

Согласно решению (5), поверхностная скорость пропорциональна квадрату характерной разности потенциалов U_0, что качественно совпадает с экспериментальными результатами, полученными в [1].

Список литературы

[1] *Бережнов В.В., Семенов В.А.* // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. Вып. 5. С. 92–94.
[2] *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Изд-во АН СССР, 1952. 553 с.