01;03

Критические условия неустойчивости сплюснутой сфероидальной сильно заряженной капли

© А.И. Григорьев, С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет,
150000 Ярославль, Россия

(Поступило в Редакцию 9 февраля 1998 г.)

В рамках теории возмущений методом разложения по малому отклонению равновесной формы капли от сферической в пренебрежении взаимодействием между модами рассчитан спектр капиллярных колебаний заряженной сплюснутой сфероидальной капли. Рассчитаны критические условия реализации неустойчивости ее n-й моды по отношению к собственному заряду в виде аналитической зависимости безразмерного параметра Рэлея, характеризующего устойчивость капли, от величины сфероидальной деформации.

С проблемой исследования капиллярных колебаний, устойчивости и самодиспергирования сильно заряженной капли приходится сталкиваться в разнообразных физических задачах (см., например, [1–3] и указанную там литературу). В этой связи неоднократно исследовались на устойчивость сферическая капля и капля, имеющая форму вытянутого сфероида [3]. Устойчивость же заряженной капли в форме сплюснутого сфероида практически не исследована, хотя отдельные публикации по этому вопросу имеются [4,5]. Задача исследования на неустойчивость заряженной сплюснутой сфероидальной капли представляет интерес в связи с физикой грозовых облаков, в которых, по данным наблюдений, некоторая часть капель имеет сплюснутую сфероидальную форму [6–8], а также в связи с задачами жидкометаллической эпитаксии и электрокаплеструйной печати, где заряженные капли, падающие на подложку с отличной от нуля скоростью, имеют в течение некоторого интервала времени форму сплюснутых сфероидов [3], а также в связи с проблемой исследования огней св. Эльма, связанных с неустойчивостью во внешнем электрическом поле капель воды, осевших на предметах, в окрестности которых наблюдаются огни св. Эльма [9,10]. В [4], где заряженная сплюснутая сфероидальная капля исследовалась на устойчивость по отношению к осесимметричным деформациям, было найдено, что такая капля устойчива. Более того в [4] утверждалось, что устойчивость заряженной сплюснутой сфероидальной капли по отношению к собственному заряду повышается с увеличением степени сплюснутости (с увеличением эксцентриситета), и был сделан вывод, что концентрация капель такой формы в облаках должна быть высокой. В [5] было показано, что вывод работы [4] о повышенной устойчивости заряженных капель сплюснутых форм сделан преждевременно и учет возможных неосесимметричных деформаций приводит к нарушению устойчивости таких капель. Поскольку расчеты [5] носили предварительный качественный характер и их корректность может быть оспорена, то представляется целесообразным провести их более строго.

1. Рассмотрим задачу об устойчивости по отношению к неосесимметричным возмущениям поверхности сильно заряженной сплюснутой сфероидальной капли идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости, находящейся в идеальной несжимаемой непроводящей среде. Будем полагать, что сфероидальность формы капли обусловлена действием сторонних сил неэлектрической природы, например сил акустического (ультразвукового) давления $P_a = P_0 Y_{20}(\cos\theta)$, как это было реализовано в [11], где P_0 — константа, Y_{20} — осесимметричная сферическая функция $Y_{20}(\cos\Theta) \equiv \mathfrak{P}_2(\cos\Theta)$, $\mathfrak{P}_2$ — нормированный полином Лежандра. Примем, что капля несет заряд Q, а ее объем определяется объемом равновеликой сферической капли радиуса R. Примем также, что σ — коэффициент поверхностного натяжения границы раздела, ρ_1 и ρ_2 — плотности капли и среды соответственно. Решение проведем методом, использованным ранее в [12,13].

Уравнение возмущенной тепловым капиллярным волновым движением поверхности сплюснутого сфероида в линейном по квадрату эксцентриситета приближении в сферических координатах с началом в центре капли запишем в виде

$$r = r(\Theta) + \xi(\Theta,\varphi,t) \approx R\big[1 - e^2\cdot h(\Theta)R^{-1} + \xi(\Theta,\varphi,t)E^{-1}\big];$$

$$r(\Theta) = \frac{R(1-e^2)^{1/3}}{(1-e^2\sin^2\Theta)^{1/2}};\ h(\Theta) = \frac{R}{6}(3\cos^2\Theta - 1). \quad (1)$$

Здесь $e = (1 - a^2/b^2)^{1/2}$ — эксцентриситет сфероида; a и b — малая и большая полуоси сфероида; $\xi(\Theta,\varphi,t)$ — возмущение равновесной сфероидальной поверхности капли, вызванное капиллярными колебаниями, происходящими из-за теплового движения молекул и имеющими амплитуду $\sim \sqrt{kT/\sigma}$ (k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура). Отметим также, что для большинства жидкостей амплитуда таких тепловых капиллярных колебаний порядка десятых долей нанометра.

При сформулированных условиях волновые движения в капле и окружающей среде будут потенциальными с потенциалами скоростей Ψ_1 и Ψ_2 соответственно, которые для несжимаемой жидкости являются гармоническими функциями [14]

$$\Delta\Psi_i = 0 \quad (i = 1, 2),$$

$$r \to 0: \quad \Psi_1(\mathbf{r}, t) \to 0;$$

$$r \to \infty: \quad \Psi_2(\mathbf{r}, t) \to 0 \tag{2}$$

и на границе раздела сред (при $r = r(\Theta) + \xi(\Theta, \varphi, t)$) удовлетворяют граничным условиям: равенства нормальных к границе компонент скоростей

$$\frac{\partial\Psi_1}{\partial n_1} = -\frac{\partial\Psi_2}{\partial n_2} \equiv \frac{\partial\Psi}{\partial n}, \tag{3}$$

кинематическому

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} \approx \frac{\partial\Psi}{\partial n}, \tag{4}$$

динамическому

$$\Delta P = -\rho_1\frac{\partial\Psi_1}{\partial t} + \rho_2\frac{\partial\Psi_2}{\partial t} + P_E - R_\sigma - P_a, \tag{5}$$

ΔP — перепад давлений в капле и среде; P_E и P_0 — давление электрического поля и давление сил поверхностного натяжения; $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ — векторы нормалей внешней и внутренней к поверхности капли ($\mathbf{n} \equiv \mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$).

Для определения потенциала электрического поля Φ, создаваемого возмущенной заряженной каплей в окружающем пространстве, учитывая, что он должен быть гармонической функцией, будем иметь краевую задачу [15]

$$\Delta\Phi = 0, \tag{6}$$

$$r \to \infty: \quad \Phi \to 0, \tag{7}$$

$$r = r(\Theta) + \xi: \quad \Phi = \text{const}. \tag{8}$$

В нижеследующем изложении все производные в граничных условиях (3)–(5) в линейном по $|\xi|/R$ приближении будем относить к невозмущенной поверхности капли $r = r(\Theta)$, как это принято в теории волн бесконечно малой амплитуды [14].

Потребуем также выполнения условий постоянства объема капли

$$\int_v dV = \frac{4}{3}\pi R^3 \tag{9}$$

и неподвижности ее центра масс

$$\int_v \mathbf{r} dV = 0. \tag{10}$$

В (9), (10) интегрирование ведется по объему капли.

2. Дальнейший анализ проведем в рамках теории возмущений путем разложения по малым параметрам e^2 и ξ с точностью до членов, имеющих порядок малости $\sim e^2, \xi$ и $e^2\xi$, т.е. в линейном приближении по каждому из них. Отметим, что малые параметры e^2 и ξ являются независимыми, причем $e^2 \gg \xi$. В этой связи казалось бы, что, сохраняя слагаемые $\sim e^2\xi$, мы должны учесть и слагаемое $\sim e^4$. Такой вывод совершенно справедлив, но, как будет видно ниже, вклад в искомое дисперсионное уравнение для капиллярных колебаний заряженной сфероидальной капли внесут лишь слагаемые $\sim \xi$ и $e^4\xi$, а слагаемые $\sim e^2, e^4$ исчезнут при учете кинематического граничного условия (содержащего частную производную по времени). В этой связи удержание в нижеследующих расчетах слагаемых $\sim e^4$ привело бы лишь к неоправданному увеличению громоздкости математической записи проводимых рассуждений.

Зависимость от времени поля скоростей $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$, поля давлений $P(\mathbf{U}, t)$ и возмущения равновесной поверхности $\xi(\Theta, \varphi, t)$ будем принимать экспоненциальной $\sim \exp(st)$, где s — комплексная частота.

Гармонические решения уравнений (2) для потенциалов скоростей $\Psi_j(\mathbf{r}, t)$ в сферической системе координат естественно искать в виде рядов по нормированным сферическим функциям $Y_{km}(\Theta, \varphi)$

$$\Psi_1(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k} A_{km} r^k Y_{km}(\Theta, \varphi)\exp(st),$$

$$\Psi_2(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k} B_{km} r^{-k-1} Y_{km}(\Theta, \varphi)\exp(st). \tag{11}$$

Поскольку возмущение равновесной поверхности капли $\xi(\Theta, \varphi, t)$ связано с потенциалами поля скоростей $\Psi_i(\mathbf{r}, t)$ кинематическим граничным условием (4), то и функцию $\xi(\Theta, \varphi, t)$ следует представить в виде разложения по сферическим функциям

$$\xi(\Theta, \varphi, t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k} Z_{km} Y_{km}(\Theta, \varphi)\exp(st). \tag{12}$$

Коэффициенты A_{km}, B_{km}, Z_{km} в разложениях (11) и (12) связаны между собой граничными условиями (3) и (4).

Условия (9) и (10) накладывают определенные ограничения на вид теплового возмущения равновесной поверхности жидкости $\xi(\Theta, \varphi, t)$, суть которых можно выяснить, подставляя (1), (12) в (9) и (10). Отметим, что в принятой постановке функция $\xi(\Theta, \varphi, t)$ является независимой и никак не связана с равновесной сфероидальной формой капли, поэтому при взятии интегралов (9), (10) не следует учитывать "перекрестные" члены $\sim e^2\xi, e^4\xi$ и т.д. В результате интегралы (9), (10) в линейном по e^2 и ξ приближении можно привести к виду

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \xi(\Theta, \varphi, t)\sin\Theta d\Theta d\varphi = 0; \tag{13}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \xi(\Theta, \varphi, t) Y_{1m}(\Theta, \varphi)\sin\Theta d\Theta d\varphi = 0;$$

$$m = 0, \pm 1. \tag{14}$$

В силу ортонормированности сферических функций из (13), (14) следует $Z_{1m} = 0$ ($m = 0, \pm 1$), $Z_{00} = 0$. Это означает, что в (12) суммирование по k начинается с $k = 2$. В силу граничных условий (3), (4) это относится и к рядам (11).

Чтобы воспользоваться граничными условиями (3), прежде необходимо выписать выражение для вектора нормали, который в общем случае определяется соотношением

$$\mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\nabla} F}{|\boldsymbol{\nabla} F|}; \quad F = r - \left[R - e^2 h(\Theta) + \xi(\Theta, \varphi, t)\right].$$

В принятом приближении это соотношение имеет вид

$$\mathbf{n} \approx \left[1 + e^2 \frac{1}{R^2} \frac{\partial h(\Theta)}{\partial \Theta} \frac{\partial \xi(\Theta, \varphi, t)}{\partial \Theta}\right] \mathbf{e}_r + \frac{1}{R}\left[-\frac{\partial \xi(\theta, \varphi, t)}{\partial \Theta} + e^2 \frac{\partial h(\Theta)}{\partial \Theta} - e^2 \frac{1}{R} \frac{\partial [h(\Theta)\xi(\Theta, \varphi, t)]}{\partial \Theta}\right] \mathbf{e}_\Theta - \frac{1}{R \sin \Theta} \times \frac{\partial \xi(\Theta, \varphi, t)}{\partial \varphi}\left[1 + e^2 \frac{h(\Theta)}{R}\right] \mathbf{e}_\varphi, \tag{15}$$

где $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\Theta, \mathbf{e}_\varphi$ — орты сферической системы координат.

Подставляя разложения (11) в граничное условие (3) с учетом выражения (15), после несложных, но достаточно громоздких преобразований можно найти связь между коэффициентами A_{km} и B_{km} в разложениях (11)

$$B_{km} \approx -\frac{1}{k+1}\left\{\left[k - e^2\left(\alpha_k^1 + \frac{k}{k+1}\beta_k^1\right)\varkappa_k^m\right] R^{2k+1} A_{km} - e^2\left[\alpha_k^2 + \frac{k-2}{k-1}\beta_k^2\right]\gamma_{k-1}^m R^{2k-1} A_{k-2,m} - e^2\left[\alpha_k^3 + \frac{k+2}{k+1}\beta_k^3\right]\gamma_{k+1}^m R^{2k+3} A_{k+2,m}\right\}, \tag{16}$$

где использованы следующие обозначения: $\alpha_k^1 = k^2 - k - 3$; $\alpha_k^2 = 0.5(k^2 - 3k + 2)$; $\alpha_k^3 = 0.5(k^2 + k - 4)$; $\beta_k^1 = k^2 + 3k - 1$; $\beta_k^2 = 0.5(k^2 + k - 4)$; $\beta_k^3 = 0.5(k^2 + 5k + 6)$;

$$\varkappa_k^m = \frac{k + k - 3m}{3(2k-1)(2k+3)};$$

$$\gamma_k^m = \frac{1}{2k+1}\left[\frac{(k^2 - m^2)[(k+1)^2 - m^2]}{(2k-1)(2k+3)}\right]^{1/2}. \tag{17}$$

Связь коэффициентов A_{km} и B_{km} с коэффициентами разложения (12) Z_{km} устанавливается кинематическим граничным условием (4). Подставляя (11) и (12) в (4) и учитывая (16), получим

$$A_{km} \approx R^{1-k} k^{-1}\left\{[1 + e^2 k^{-1}\alpha_k^1 \varkappa_k^m] s Z_{km} + e^2 (k-2)^{-1} \times \alpha_k^2 \gamma_{k-1}^m s Z_{k-2,m} + e^2 (k+2)^{-1} \alpha_k^3 \gamma_{k+1}^m s Z_{k+2,m}\right\};$$

$$B_{km} \approx -R^{2+k}(k+1)^{-1}\left\{[1 - e^2 (k+1)^{-1}\beta_k^1 \varkappa_k^m] \times s Z_{km} - e^2 (k-1)^{-1}\beta_k^2 \gamma_{k-1}^m s Z_{k-2,m} - e^2 (k+3)^{-1}\beta_k^3 \gamma_{k+1}^m s Z_{k+2,m}\right\}. \tag{18}$$

3. Чтобы использовать динамическое граничное условие (5), необходимо выписать выражения для давления электрических сил P_E и давления сил поверхностного натяжения P_σ. Потенциал электрического поля Φ вблизи поверхности капли определяется решением краевой задачи (6)–(8), которое удобно искать в виде

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3, \tag{19}$$

где Φ_0 — потенциал, получаемый в нулевом порядке приближений по малым параметрам, используемым при разложении; Φ_1 — добавка к потенциалу $\sim e^2$; Φ_2 — добавка к потенциалу $\sim \xi$; Φ_3 — добавка к потенциалу $\sim \xi e^2$.

Подставляя (19) в (6)–(8), несложно получить набор краевых задач для отыскания Φ_j, где $j = 0, 1, 2, 3$,

$$\Delta \Phi_j = 0,$$

$$r \to \infty: \quad \Phi_j \to 0;$$

$$r = R: \quad \Phi_0 = Q/R; \quad \Phi_1 = e^2 h(\Theta)\frac{\partial \Phi_0}{\partial r};$$

$$\Phi_2 = -\xi(\Theta, \varphi, t)\frac{\partial \Phi_0}{\partial r};$$

$$\Phi_3 = e^2 h(\Theta)\xi(\Theta, \varphi, t)\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial r^2} - \xi(\Theta, \varphi, t)\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + e^2 h(\Theta)\frac{\partial \Phi_2}{\partial r}. \tag{20}$$

Потенциалы Φ_j будем искать в виде рядов по сферическим функциям

$$\Phi_j(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=0} \sum_{m=-k} C_{km}^j(t) \cdot r^{-k-1} \cdot Y_{km}(\Theta, \varphi). \tag{21}$$

Удовлетворяя последовательно граничным условиям различных порядков малости на поверхности капли, найдем распределение потенциала в окрестности капли в виде

$$\Phi(\mathbf{r}, t) \approx \frac{Q}{R}\left\{\frac{R}{r} - e^2 h(\Theta)\frac{R^3}{r^3} + \frac{1}{R}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k} Z_{km}\left(\frac{R}{r}\right)^{k+1} Y_{km}(\Theta, \varphi)\exp(st) - e^2 \frac{1}{R}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\left[(k+2)\varkappa_k^m Z_{km} + \frac{k}{2}\gamma_{k-1}^m Z_{k-2,m} + \frac{1}{2}(k+4)\gamma_{k+1}^m Z_{k+2,m}\right]\left(\frac{R}{r}\right)^{k+1} Y_{km}(\Theta, \varphi)\exp(st)\right\}. \tag{22}$$

Решение (22) позволяет выписать давление электрического поля с принятой точностью в виде разложения по малым параметрам

$$P_E=\frac{1}{8\pi}(\mathbf{E})^2=\frac{1}{8\pi}\big(\nabla\Phi(\mathbf{r},t)\big)^2\approx P_E^0+P_E(\xi);$$

$$P_E^0\approx\frac{Q^2}{8\pi R^4}\left[1-e^2\frac{2h}{R}\right];$$

$$P_E(\xi)\approx\frac{Q^2}{4\pi R^4}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\left\{\left[(k-1)-e^2(k-4)\varkappa_k^m\right]\frac{Z_{km}}{R}\right.$$

$$\left.-e^2\frac{1}{2R}(k-5)\gamma_{k-1}^m Z_{k-2,m}-e^2\frac{1}{2R}(k-7)\gamma_{k+1}^m Z_{k+2,m}\right\}$$

$$\times Y_{km}(\Theta,\varphi)\exp(st). \qquad (23)$$

Здесь P_E^0 — давление электрического поля на неискаженную тепловым капиллярным движением поверхность сфероидальной капли; $P_E(\xi)$ — добавка к давлению электрического поля, вызванная возмущением поверхности $\xi(\Theta,\varphi,t)$.

Давление сил поверхностного натяжения P_σ под искривленной поверхностью жидкости в общем случае имеет вид [16]

$$P_\sigma=\sigma\,\mathrm{div}\mathbf{n},$$

где орт нормали к возмущенной сфероидальной поверхности представлен выражением (15).

В итоге лапласовское давление можно записать в виде разложения по малым величинам

$$P_\sigma=P_\sigma^0+P_\sigma(\xi);$$

$$P_\sigma^0=\frac{2\sigma}{R}\left[1-e^2\frac{2h}{R}\right];$$

$$P_\sigma(\xi)\approx\frac{\sigma}{R^2}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\left\{\Big[(k-1)(k+2)\right.$$

$$+e^2 2(k^2+k+4)\varkappa_k^m\Big]Z_{km}+e^2(k^2-3k+6)\gamma_{k-1}^m Z_{k-2,m}$$

$$\left.+e^2(k^2+5k+10)\gamma_{k+1}^m Z_{k+2,m}\right\}Y_{km}(\Theta,\varphi)\exp(st). \quad (24)$$

В соответствии с принятым при постановке задачи постулатом о сфероидальной равновесной форме капли следует положить, что в динамическом граничном условии (5) сумма слагаемых, имеющих нулевой порядок малости и первый порядок малости по e^2, обращается в нуль, определяя равновесную форму. Тогда в нуль должна обращаться и сумма слагаемых, вызванных деформацией равновесной поверхности капли тепловым капиллярным движением, линейных по ξ, т.е. из (5) получим

$$\rho_1\frac{\partial\Psi_1}{\partial t}-\rho_2\frac{\partial\Psi_2}{\partial t}-P_E(\xi)+P_\sigma(\xi)=0.$$

Подставляя в это соотношение решения (11) с учетом (18), (23), (24), используя свойство ортогональности сферических функций, придем к бесконечной системе связанных уравнений относительно коэффициентов Z_{km}

$$\left\{\Omega^2\left[\frac{1}{k}\left(1-e^2\frac{k+3}{k}\varkappa_k^m\right)+\eta\frac{1}{k+1}\left(1-e^2\frac{k-2}{k+1}\varkappa_k^m\right)\right]\right.$$

$$+\left[(k+2)(k-1)+e^2 2(k^2+k+4)\varkappa_k^m\right]$$

$$\left.-4W\left[(k-1)-e^2(k-4)\varkappa_k^m\right]\right\}\frac{Z_{km}}{R}$$

$$-e^2\frac{1}{2}\gamma_{k-1}^m\left\{\Omega^2\left[\frac{1}{k}+e^2\frac{k-3}{k^2-1}\eta\right]\right.$$

$$\left.-2(k^2-3k+6)-4W(k-5)\right\}\frac{Z_{k-2,m}}{R}$$

$$-e^2\frac{1}{2}\gamma_{k+1}^m\left\{\Omega^2\left[\frac{k+4}{k(k+2)}+\frac{1}{k+1}\eta\right]\right.$$

$$\left.-2(k^2+5k+10)-4W(k-7)\right\}\frac{Z_{k+2,m}}{R}=0, \quad (25)$$

где введены безразмерные параметры

$$\Omega^2=s^2\frac{\rho_1 R^3}{\sigma},\quad \eta=\frac{\rho_2}{\rho_1},\quad W=\frac{Q^2}{16\pi\sigma R^3}.$$

Система (25) связанных между собой через одно уравнений фактически распадается на две подсистемы относительно четных и нечетных мод капиллярных колебаний и имеет нетривиальные решения, когда определитель, составленный из ее коэффициентов, обращается в нуль. Это условие определяет дисперсионное уравнение задачи, также имеющее бесконечный порядок. Однако в линейном приближении по квадрату эксцентриситета $\sim e^2$, когда можно пренебречь взаимодействием мод (проявляющимся лишь в приближении $\sim e^4$), система (25) сводится к системе не связанных между собой уравнений для отдельных мод, а дисперсионное уравнение выписывается в относительно простой форме

$$\Omega^2\left[\frac{1}{k}\left(1-e^2\frac{k+3}{k}\varkappa_k^m\right)+\eta\frac{1}{k+1}\left(1-e^2\frac{k-2}{k+1}\varkappa_k^m\right)\right]$$

$$+\left[(k+2)(k-1)+e^2 2(k^2+k+4)\varkappa_k^m\right]$$

$$-4W\left[(k-1)-e^2(k-4)\varkappa_k^m\right]=0. \qquad (26)$$

По мере увеличения параметра W, когда W проходит через некоторое критическое значение, квадрат комплексной частоты проходит через нуль и становится положительным, что соответствует появлению двух экспоненциально изменяющихся со временем решений, одно из которых экспоненциально убывает, а другое экспоненциально растет, т.е. система становится неустойчивой. Таким образом, полагая в (26) $\Omega^2=0$, получим соотношение, позволяющее найти критическое значение параметра W, разделяющее устойчивые и неустойчивые решения,

$$W_* \approx \frac{k+2}{4}\left[1 + e^2 \frac{k^2[k(k+1) - 3m^2]}{(k-1)(k+2)(2k-1)(2k+3)}\right]$$

$$(k \geqslant 2; m = 0; \pm 1; \ldots \pm k). \qquad (27)$$

Следует напомнить, что в силу условий постоянства объема капли (9) и неподвижности ее центра инерции (10), накладывающих запрет на возбуждение мод с $k = 0$ и $k = 1$, минимальное значение индекса k в (27) есть $k = 2$.

Из (27) следует, что для всех осесимметричных мод ($m = 0$) критические значения параметра W увеличиваются с увеличением "сплюснутости" капли (по мере увеличения e^2). Для неосесимметричных мод в зависимости от значения индекса m критическое значение W может как увеличиваться, так и снижаться. Так, для $k = 2$ коэффициент при e^2 в (27) положителен для $m = 0, \pm 1$ и отрицателен для $m = \pm 2$. Это означает, что сильно заряженная спюснутая сфероидальная капля может оказаться устойчивой по отношению как к осесимметричным капиллярным колебаниям, так и к неосесимметричным с $m = \pm 1$, но неустойчивой по отношению к неосесимметричным колебаниям с $m = \pm 2$.

4. В заключение отметим, что аналогичную задачу можно сформулировать и для вытянутой сфероидальной капли, устойчивость которой по отношению к неосесимметричным деформациям пока не исследована. Уравнение невозмущенной поверхности вытянутой сфероидальной капли в сферической системе координат имеет вид

$$r(\Theta) = \frac{R(1 - e^2)^{1/6}}{(1 - e^2 \cos^2 \Theta)^{1/2}}.$$

Здесь $e = (1 - b^2/a^2)^{1/2}$ — эксцентриситет сфероида; b и a — малая и большая полуоси сфероида. Поскольку все рассмотрение проводится в линейном по e^2 приближении, то уравнение искаженной тепловым волновым капиллярным движением свободной поверхности капли примет вид

$$r = r(\Theta) + \xi(\Theta, \varphi, t) \approx R\left[1 + e^2 h(\Theta) R^{-1} + \xi(\Theta, \varphi, t) R^{-1}\right],$$

т. е. отличается от аналогичного выражения для сплюснутой сфероидальной капли лишь знаком при слагаемом $\sim e^2$. Поэтому все полученные выше результаты легко переносятся на случай вытянутого сфероида. Для этого во всех выражениях достаточно поменять на противоположный знак при слагаемых $\sim e^2$. В итоге выражение, определяющее критическую величину параметра W, примет вид

$$W_* \approx \frac{k+2}{4}\left[1 - e^2 \frac{k^2[k(k+1) - 3m^2]}{(k-1)(k+2)(2k-1)(2k+3)}\right]$$

$$(k \geqslant 2; m = 0; \pm 1; \ldots \pm k). \qquad (28)$$

Из (28) следует, что для всех осесимметричных мод ($m = 0$) увеличение эксцентриситета капли приводит к снижению критических условий неустойчивости по отношению к собственному заряду. Для неосесимметричных мод ($m \neq 0$) ситуация с устойчивостью определяется величиной индекса m. Так, для основной моды ($k = 2$) при $m = 2$ критическое значение параметра W увеличивается с ростом e^2, а для $m = 1$ оно снижается, т. е. картина получается противоположной по сравнению со сплюснутой сфероидальной каплей.

Список литературы

[1] *Baily A.G.* // Sci. Prog. Oxf. 1974. Vol. 61. P. 555–581.
[2] *Коженков В.И., Фукс Н.А.* // Успехи химии. 1976. Т. 45. № 12. С. 2274–2284.
[3] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–20.
[4] *Basaran O.A., Scriven L.E.* // Phys. Fluids A. 1989. Vol. 1. N 5. P. 795–798.
[5] *Grigor'ev A.I., Forstov A.A., Shiryaeva S.O.* // Proc. 9th Intern. Conf. on Atmospheric Electricity. St. Petersburg, 1992. P. 450–453.
[6] *Jones D.N.A.* // J. Meteorology. 1959. Vol. 16. N 5. P. 504–510.
[7] *Ausman E.L., Brook M.* // J. Geophys. Res. 1967, Vol. 72. N 24. P. 6131–6135.
[8] *Pruppacher H.R., Piter R.L.* // J. Atm. Sci. 1971. Vol. 28. N 1. P. 86–94.
[9] *Григорьева И.Д., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1994. Т. 64. Вып. 9. С. 202–207.
[10] *Grigor'ev A.I., Grigor'eva I.D., Shiryaeva S.O.* // J. Sci. Expl. 1991. Vol. 5. N 2. P. 163–190.
[11] *Trinh E.H.* // Rev. Sci. Instr. 1985. Vol. 56. N 5. P. 2059–2065.
[12] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Григорьева И.Д.* // ЖТФ. 1995. Т. 65. Вып. 2. С. 1–10.
[13] *Ширяева С.О., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 9. С. 12–20.
[14] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
[15] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
[16] *Розенцвейг Р.* Феррогидродинамика. М.: Мир, 1989. 357 с.