01;03

Критическая равновесная сфероидальная деформация капли диэлектрической жидкости в однородном электростатическом поле

© С.И. Щукин, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет,
150000 Ярославль, Россия

(Поступило в Редакцию 3 марта 1998 г.)

Устойчивость диэлектрической капли, принимающей во внешнем электростатическом поле равновесную форму вытянутого сфероида, проанализирована в рамках принципа минимальности полной потенциальной энергии изолированной системы. Для широкого диапазона диэлектрических проницаемостей вещества капли определены значения параметра Тейлора и степени сфероидальной деформации капли, при которых она теряет устойчивость.

Исследование равновесных форм и устойчивости незаряженных капель в однородных внешних электростатических полях проводилось неоднократно как экспериментально, так и теоретически в связи с изучением элементарных процессов в грозовых облаках, разработкой новых химических технологий и физических приборов для аналитических исследований (см., например, обзоры [1,2] и указанную там литературу). Тем не менее многие вопросы, связанные с обсуждаемой темой, остались невыясненными. Так, бóльшая часть теоретических исследований была проведена для капли идеально проводящей жидкости, и за пределами проведенных изысканий остался вопрос о связи величины критической равновесной деформации капли диэлектрической жидкости в однородном электростатическом поле $\mathbf{E}$ с величиной E и диэлектрической проницаемостью жидкости ε. Этот пробел и должна заполнить настоящая работа.

В нижеследующем рассмотрении в рамках сфероидального приближения для равновесной формы капли диэлектрической жидкости в поле $\mathbf{E}$ [3] на основе принципа минимальности потенциальной энергии равновесной формы изолированной капли будут исследованы равновесные состояния и границы устойчивости в $\mathbf{E}$ капель диэлектрической жидкости. Внешнюю среду будем считать непроводящей с диэлектрической проницаемостью, равной единице, т. е. вакуумом.

1. Потенциальная энергия изолированной капли в поле $\mathbf{E}$ состоит из энергии сил поверхностного натяжения и электростатической энергии капли в $\mathbf{E}$. Энергия сил поверхностного натяжения вытянутой сфероидальной капли записывается в виде [4]

$$U_\sigma = 2\pi\sigma R^2\left(k^{-2/3} + k^{4/3}\,\frac{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{k^2-1}\right)}{\sqrt{k^2-1}}\right), \tag{1}$$

R — радиус сферической капли, равной по объему рассматриваемому сфероиду; σ — коэффициент поверхностного натяжения; $k = a/b$, a и b — бóльшая и меньшая полуоси вытянутого сфероида соответственно.

Электростатическая энергия диэлектрического сфероида, вытянутого вдоль внешнего однородного электрического поля $\mathbf{E}$ в вакууме, определяется в системе СИ выражением [5]

$$U_e = -\frac{1}{2}EP_x = \frac{2\pi\varepsilon_0 E^2 R^3(\varepsilon-1)}{3[1+(\varepsilon-1)n_x]}, \tag{2}$$

где P_x — дипольный момент сфероида; ε_0 — диэлектрическая постоянная; n_x — коэффициент деполяризации сфероида, имеющий вид [5]

$$n_x = \frac{k\ln\left(k+\sqrt{k^2+1}\right) - \sqrt{k^2-1}}{(k^2-1)^{3/2}}.$$

В дальнейшем при анализе устойчивости сфероидальной формы капли ее полную потенциальную энергию $U_\sigma + U_e$ будем обезразмеривать, относя к потенциальной энергии равновеликой сферической капли

$$U = \frac{U_\sigma + U_e}{U_{\sigma s} + U_{es}}, \tag{3}$$

где

$$U_{\sigma s} = 4\pi R^2\sigma \tag{4}$$

— энергия сил поверхностного натяжения сферической капли,

$$U_{es} = -\frac{2\pi R^3E^2\varepsilon_0(\varepsilon-1)}{4+\varepsilon} \tag{5}$$

— электростатическая энергия диэлектрической сферы в поле $\mathbf{E}$.

Введем также безразмерный параметр W (параметр Тейлора), величина которого характеризует устойчивость капли в поле $\mathbf{E}$ (капля электропроводной жидкости претерпевает неустойчивость при $W = 2.59$ [6])

$$W = \frac{4\pi\varepsilon_0E^2R}{\sigma}. \tag{6}$$

Подставляя в (3) выражения (1), (2), (4), (5), перепишем (3) в безразмерном виде

$$U = \left\{2\pi\left[\frac{1}{k^{2/3}} + \frac{k^{4/3}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{k^2-1}\right)}{\sqrt{k^2-1}}\right] - \frac{W(\varepsilon-1)}{1+(\varepsilon-1)n_x}\right\}\left[4\pi - \frac{W(\varepsilon-1)}{2(2+\varepsilon)}\right]^{-1}. \tag{7}$$

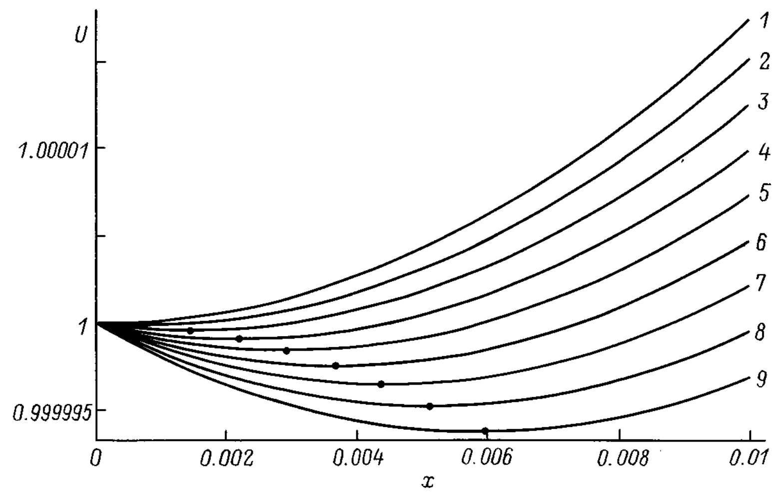

Рис. 1. Зависимость безразмерной энергии капли трансформаторного масла в электростатическом поле от x: $W = 0.01$ (*1*), 0.1 (*2*), 0.2 (*3*), 0.3 (*4*), 0.4 (*5*), 0.5 (*6*), 0.6 (*7*), 0.7 (*8*), 0.8 (*9*).

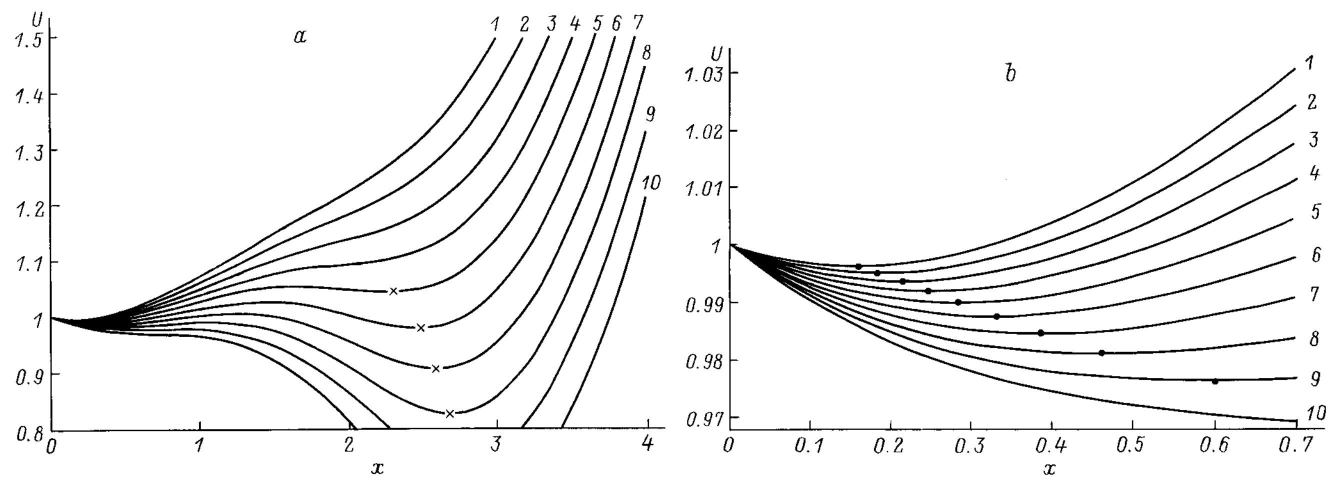

Рис. 2. Зависимость безразмерной энергии капли этилового спирта: *a* — вид зависимости $U = U(x)$ при больших деформациях, крестиками отмечены минимумы в области больших деформаций при $W > 2.3$; *b* — ход зависимости при малых деформациях, точками отмечены минимумы в области малых деформаций; $W = 1.6$ (*1*), 1.8 (*2*), 2.0 (*3*), 2.2 (*4*), 2.4 (*5*), 2.6 (*6*), 0.8 (*7*), 3.0 (*8*), 3.2 (*9*), 3.4 (*10*).

2. Для удобства графического представления результатов численного анализа соотношения (7) степень сфероидальной деформации капли в поле **E** будем характеризовать величиной $x = \ln(a/b)$.

На рис. 1 приведены зависимости $U = U(x)$ для капли трансформаторного масла ($\varepsilon = 2.2$), рассчитанные численно по (7) при различных значениях параметра Тейлора W. Наличие на зависимостях $U(x)$ одного минимума (на рис. 1 положения минимумов отмечены точками) в широком ($0 \leqslant W \leqslant 40$) диапазоне изменения параметра W свидетельствует о том, что при данной диэлектрической проницаемости вещества всегда существует равновесная форма капли в виде вытянутого сфероида. Сравнение положений минимума на кривых, соответствующих различным значениям W (см. также рис. 1), показывает, что эксцентриситет равновесной сфероидальной капли монотонно растет при увеличении параметра Тейлора W.

На рис. 2, *a*, *b* в разных масштабах приведены зависимости $U = U(x)$ для капель этилового спирта ($\varepsilon = 46$) при различных значениях параметра Тейлора W. Как показывают расчеты и видно из рис. 2, для малых значений параметра Тейлора $W < 2.3$ исследуемая зависимость имеет один минимум (кривые *1–4* на рис. 2, *a* и *b*), соответствующий сфероидальной капле с отношением полуосей $k < 1.4$. При увеличении параметра Тейлора до значений $W \geq 2.3$ качественный ход зависимости $U = U(x)$ изменяется: кривая $U = U(x)$ имеет два минимума, разделенных локальным максимумом. После первого минимума, положение которого отмечено на рис. 2, *b* точками, зависимость $U = U(x)$ проходит через локальный максимум, становится убывающей, проходит

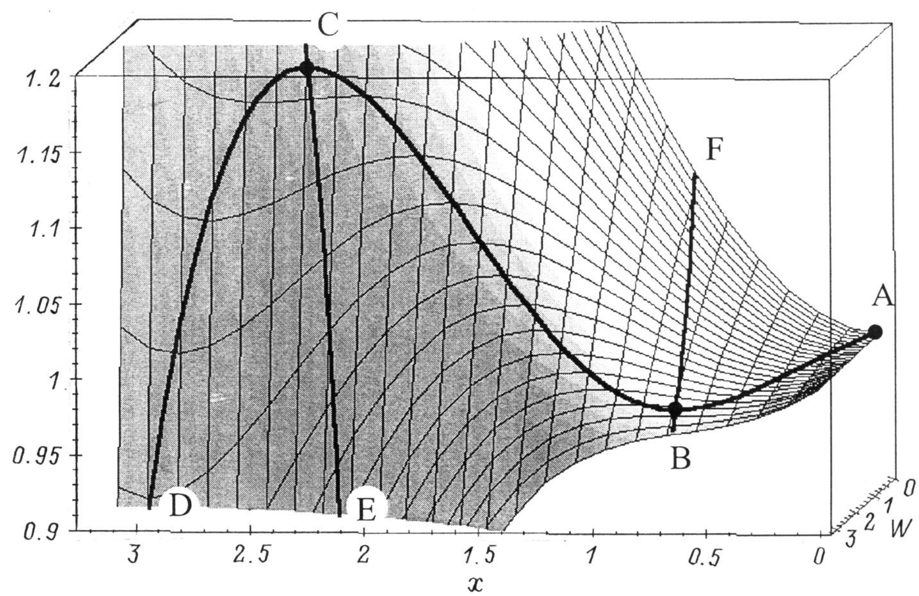

Рис. 3. Зависимость безразмерной энергии капли воды от величин W и x.

через второй минимум (положения которых при различных W отмечены на рис. 2, a крестиками), соответствующий равновесной сфероидальной форме с отношением полуосей $k > 6$. Дальнейшее увеличение степени деформации сфероида x приводит к неограниченному росту потенциальной энергии. Увеличение параметра Тейлора W вызывает смещение положений как первого, так и второго минимумов в сторону больших деформаций.

При увеличении параметра Тейлора до $W \geq 3.24$ первый минимум (и соответственно локальный максимум) пропадает, а в области значений $0 < k < 6$ зависимость $U = U(x)$ становится убывающей. Поскольку существование устойчивых равновесных сфероидальных капель с отношением полуосей $k > 6$, т.е. с весьма большим удлинением, маловероятно по общефизическим соображениям, не учитываемым в данной модели, то значение параметра Тейлора $W = 3.24$, при котором исчезает первый минимум, следует считать верхней границей области значений W, в которой при $\varepsilon = 46$ существуют устойчивые сфероидальные капли.

Зависимости $U = U(x)$, рассчитанные для капель воды ($\varepsilon = 81$) при различных значениях параметра Тейлора (рис. 3), качественно схожи с зависимостями, приведенными на рис. 2. Количественные изменения заключаются в том, что а) появление второго минимума на зависимости $U = U(x)$ происходит при меньших значениях параметра Тейлора ($W > 1.43$), б) положение локальных максимумов зависимости $U = U(x)$ смещается в сторону больших деформаций, в) исчезновение первого минимума и локального максимума зависимости $U = U(x)$, т.е. переход ее в монотонно убывающую в области деформаций ($0 < k < 1.6$), наблюдается также при меньших значениях параметра Тейлора ($W > 2.3$).

3. Связь равновесной сфероидальной деформации капли с величиной параметра Тейлора W может быть найдена из требования минимальности полной потенциальной энергии капли в равновесном состоянии

$$\frac{\partial}{\partial k}(U_\sigma + U_e) = 0, \tag{8}$$

приводящем к уравнению

$$2\pi\left[-\frac{2}{3}k^{-5/3} + \frac{4}{3}\frac{k^{1/3}C}{A} + \frac{k^{1/3}}{A^2} - \frac{k^{7/3}C}{A^3}\right] + \Big[3kA - (2k^2+1)B\Big]\frac{WA}{D^2} = 0,$$

с учетом требования положительности второй производной

$$\frac{\partial^2}{\partial k^2}(U_\sigma + U_e) \geq 0, \tag{9}$$

приводящего к соотношению

$$2\pi k^{1/3}\left(\frac{10}{9}k^{-3} + \frac{4}{9}\frac{C}{A}k^{-1} + \frac{5}{3}\frac{k^{-3}}{A^2} - \frac{11}{3}\frac{kC}{A^3} - 3\frac{k}{A^4} + 3\frac{k^3C}{A^5}\right) + \frac{W}{D^2}\Bigg\{-\frac{(2k^2+1)Bk}{A} + 3A^2 - 4kAB + 4k^2 - 1 - 2A[3kA - (2k^2+1)B]\left(\frac{3kA}{\varepsilon - 1)} + B\right)D^{-1}\Bigg\} \geq 0,$$

$$A = \sqrt{k^2-1}, \qquad B = \ln\left(k + \sqrt{k^2-1}\right),$$

$$C = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{k^2-1}\right),$$

$$D = \frac{(k^2-\varepsilon)\sqrt{k^2-1}}{\varepsilon - 1} + k\ln\left(k + \sqrt{k^2-1}\right).$$

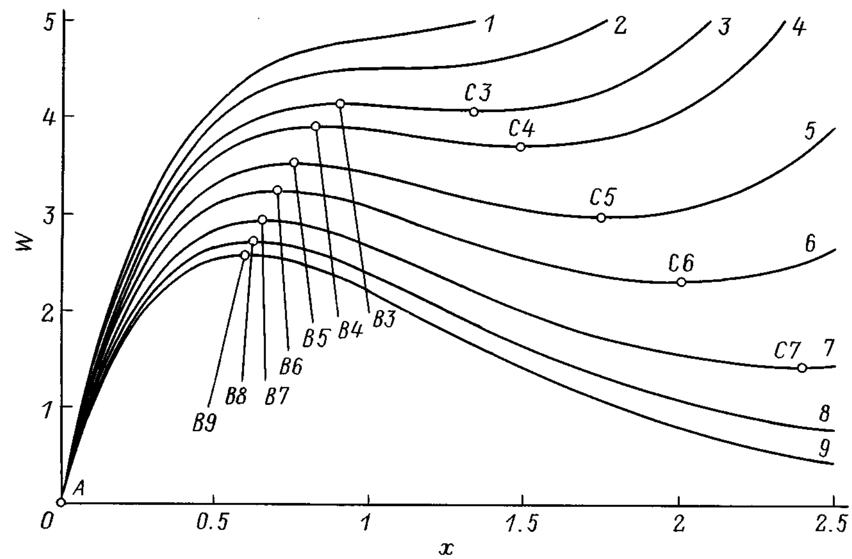

Рис. 4. Зависимости $W(x)$, полученные из решения уравнения (8) при $\varepsilon = 18$ (*1*), 20 (*2*), 23 (*3*), 26 (*4*), 34 (*5*), 46 (*6*), 81 (*7*), 200 (*8*), ∞ (*9*).

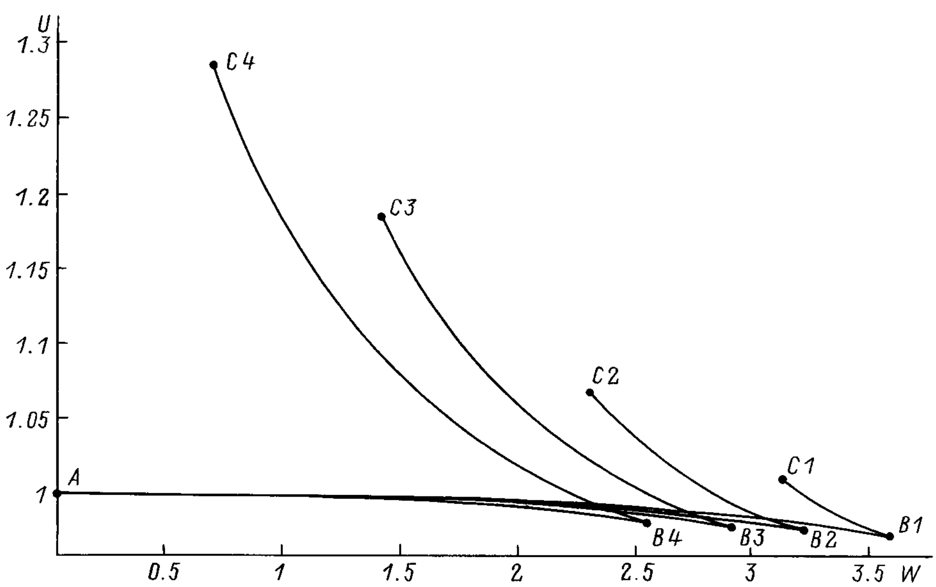

Рис. 5. Зависимость величины потенциального барьера от параметра Тейлора при $\varepsilon = 32$ (*1*), 46 (*2*), 81 (*3*), ∞ (*4*).

График зависимости $U = U(W, x)$, рассчитанный по (7) для капель воды, приведен на рис. 3. Кривая *AD* является проекцией решения уравнения (8) на поверхность $U = U(W, x)$, иными словами, кривая *AD* проходит через точки, в которых зависимость $U(x)$ принимает экстремальные значения. Линии *BF* и *CE* представляют собой проекции решения уравнения (9) на поверхность $U(W, x)$ и разделяют эту поверхность на три части: правее *BF* и левее *CE* расположено геометрическое место точек, где

$$\frac{\partial^2}{\partial k^2}(U_\sigma + U_e) > 0,$$

между *BF* и *CE* расположено геометрическое место точек, где

$$\frac{\partial^2}{\partial k^2}(U_\sigma + U_e) < 0.$$

Таким образом, участки *AB* и *CD* соответствуют минимумам, а *BC* — максимумам зависимости $U = U(x)$. Из вышесказанного ясно, что равновесным формам капли соответствует кривая *AB*.

На рис. 4 приведены результаты численного расчета по уравнению (8) для различных значений диэлектрической проницаемости ε. Как показывает расчет, при $\varepsilon < 20.8$ для любого значения параметра Тейлора существует рав-

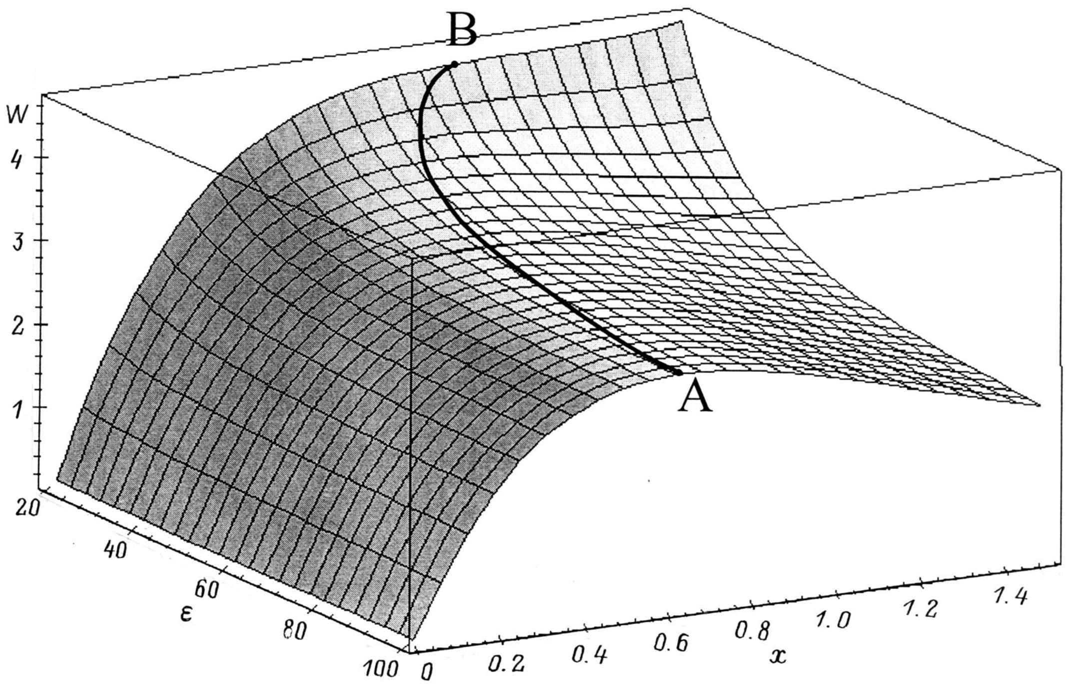

Рис. 6. Взаимосвязь между параметром Тейлора, диэлектрической проницаемостью вещества капли и параметром деформации.

новесное состояние капли в форме вытянутого сфероида (кривые *1, 2* на рис. 4). При $\varepsilon > 20.8$ равновесные состояния сфероидальных капель наблюдаются до некоторого критического значения параметра Тейлора $W = W_*$ (обозначенного на рис. 4 точками $B3-B9$), зависящего от диэлектрической проницаемости вещества капли, что согласуется с данными [7]. С увеличением диэлектрической проницаемости критическое значение W_* уменьшается и при $\varepsilon \to \infty$ достигает минимального значения $W_{*0} = 2.57$, что хорошо согласуется с результатами исследований границ устойчивости проводящих капель в электростатическом поле [6]. Участки $A-Bn$ на рис. 4 соответствуют равновесным сфероидальным формам капель. Участки $Bn-Cn$ кривых *3–9* соответствуют локальным максимумам зависимости $U(x)$ при $W = \text{const}$ и $\varepsilon = \text{const}$. Значение параметра Тейлора W, соответствующее точкам $C3-C9$, определяет возникновение второго минимума на зависимости $U = U(x)$.

При значениях параметра Тейлора, меньших критического W_*, для перевода капли в область нестабильности необходимо сообщить ей энергию для преодоления потенциального барьера, величина которого в зависимости от параметра Тейлора для различных значений диэлектрической проницаемости ε приведена на рис. 5 (кривые $Bn-Cn$). Участки $A-Bn$ кривых на рис. 5 соответствуют равновесным состояниям сфероидальной капли, точки Bn — состояниям неустойчивого равновесия капли при критическом значении параметра Тейлора W.

Трехмерная поверхность, приведенная на рис. 6, определяется полученным из решения уравнения (8) соотношением между диэлектрической проницаемостью вещества капли ε, параметром Тейлора W и параметром x. Кривая AB, так же как точки Bn на рис. 4 и 5, соответствуют состояниям неустойчивого равновесия капли при критических значениях параметра Тейлора W и разделяет устойчивые сфероидальные формы капли (левее AB) от неустойчивых состояний (правее AB).

Заключение

В проведенном исследовании найдено, что качественный вид зависимости потенциальной энергии изолированной капли с диэлектрической проницаемостью ε в однородном электростатическом поле напряженностью $\mathbf{E}$ от величины сфероидальной деформации $U = U(x)$ зависит как от ε, так и от $\mathbf{E}$ или параметра Тейлора $W \sim E^2$, характеризующего устойчивость поверхности капли по отношению к индуцированному на ней заряду. Зависимость $U = U(x)$ при различных значениях ε и E (или ε и W) может иметь либо один минимум, либо два, разделенных локальным максимумом. Анализ зависимости $U = U(x, \varepsilon, W)$ позволил выделить области значений x, ε и W, соответствующие равновесным сфероидальным формам капель, и критические условия потери устойчивости.

Список литературы

[1] *Коженков В.И., Фукс Н.А.* // Успехи химии. 1976. Т. 45. № 12. С. 2274–2284.
[2] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
[3] *O'Konski C.T., Thacher H.C.* // J. Phys. Chem. 1953. Vol. 57. P. 955–958.
[4] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 733 с.
[5] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
[6] *Taylor G.* // Proc. Roy. Soc. A. 1964. Vol. 280. P. 383–397.
[7] *Sherwood J.D.* // J. Fluid Mech. 1988. Vol. 188. P. 133–146.