01

Точные решения уравнения Бюргерса с источником

© С.В. Петровский

Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН,
117851 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 28 ноября 1997 г.)

Рассматриваются два новых метода получения точных решений задачи с начальными условиями на неограниченной прямой (задачи Коши) для неоднородного уравнения Бюргерса, применимые для случаев стационарного и нестационарного источника. В качестве примера получены автомодельное решение и решение, описывающее локализацию (остановку) уединенных бегущих волн.

Введение

Уравнение Бюргерса[1]

$$v_t - 2vv_x - v_{xx} = F, \tag{1}$$

где $v = v(x,t)$, x — координата, t — время, предложенное первоначально для описания турбулентности [1], оказалось удачной моделью динамики нелинейно-диссипативных сред различной физической природы [2–4]. В частности, в работе [2] показано, что уравнение (1) возникает при рассмотрении широкого класса процессов в гидродинамике, нелинейной акустике и физике плазмы. При этом уравнение Бюргерса с нетривиальной правой частью (УБПЧ), т.е. с источником $F(x,t) \not\equiv 0$, описывает динамику физической системы, находящейся во внешнем поле (систему с "подкачкой" энергии), и является естественным обобщением однородного уравнения, отвечающего автономным движениям.

Хотя литература, посвященная уравнению (1), поистине огромна, оно продолжает оставаться предметом многих работ (см., например, [5–8]). При этом в последнее время в центре внимания оказывается именно уравнение Бюргерса с источником [6–8]. В работах[6,7] получены точные решения задачи Коши для УБПЧ в случае, когда зависимость от координаты в правой части уравнения (1) сингулярная, т.е. описывается либо δ-функцией, либо ее производной. В данной работе предложен метод, позволяющий получать специальные точные решения для случая непрерывной функции $F(x,t)$.

Хорошо известно, что подстановка Хопфа–Коула [9,10]

$$v = u_x/u \tag{2}$$

приводит УБПЧ к линейному уравнению для новой функции $u(x,t)$

$$u_t - u_{xx} = u\int\limits_{x_0}^{x} F(x',t)dx'. \tag{3}$$

В том случае, если правая часть уравнения (1) $F(x,t) \equiv 0$ (именно этот случай рассматривался в [1,9,10]), уравнение (3) сводится к обычному уравнению диффузии и его решение для произвольных начальных условий записывается в квадратурах, что позволяет с учетом (2) записать также решение и для уравнения Бюргерса. Однако, если $F \not\equiv 0$, построение аналитического решения уравнения [3] — весьма непростая задача. В работе [11] при незначительных ограничениях на вид функции $F(x,t)$ предложен общий алгоритм построения решения в виде ряда, однако возникающие при этом формулы очень громоздки, что затрудняет их практическое использование. Между тем ввиду физической значимости уравнения (1) представляет несомненный интерес получение его точных решений, выражающихся относительно простыми формулами и имеющих ясный физический смысл.[2] Именно это и является целью данной работы.

Стационарный источник: локализация уединенной волны

Начнем со случая, когда правая часть уравнения (1) не зависит от t, т.е. $F = F(x)$. Вместо классической подстановки (2) рассмотрим ее модифицированный вид

$$v = (u_x/u) + k(x), \tag{4}$$

где $k(x)$ — некоторая функция.

Подставляя (4) в (1), после преобразований имеем

$$\big((u_t - 2ku_x - u_{xx})/u\big)_x = \big(k'(x) + k^2 + F(x) - C(t)\big)_x, \tag{5}$$

где $C(t)$ — произвольная функция времени (знак "минус" выбран для удобства).

Интегрируя по x, из уравнения (5) получаем

$$u_t = 2ku_x - u_{xx} = \big(k'(x) + k^2 + \psi(x) - C(t)\big)u, \tag{6}$$

где $\psi'(x) = F(x)$.

Таким образом, в том случае, когда функция $k(x)$ является решением уравнения Риккати

$$k'(x) + k^2 = -\psi(x) + C, \tag{7}$$

[1] Левая часть уравнения Бюргерса обычно записывается в виде $v_t + vv_x - v_{xx}$, в уравнении (1) коэффициент (-2) выбран для удобства.

[2] Подробнее по поводу важности точных решений см. [5].

функция $u(x,t)$ удовлетворяет линейному уравнению типа диффузия–конвекция

$$u_t - 2ku_x = u_{xx}. \tag{8}$$

В уравнение (7) время t входит только в виде параметра, как аргумент произвольной функции C. Заметим, что если положить $C(t) = \mathrm{const}$ (именно этот случай будет рассматриваться в дальнейшем), то решения уравнения (7) представляют собой стационарные решения уравнения Бюргерса. Тем самым проясняется смысл замены (4): уравнение (8) для новой неизвестной $u(x,t)$ описывает процесс, развивающийся "на фоне" стационарного профиля $k(x)$.

Решение уравнения Риккати (7) при правой части произвольного вида — непростая задача, не всегда допускающая запись решения в замкнутом виде. Одако по крайней мере в некоторых случаях система (7), (8) оказывается более удобной для получения точных решений УБПЧ, чем подход, основанный на уравнениях (2), (3). В частности, уравнение (8) в отличие от уравнения (3) имеет (для функции $k(x)$ определенного вида) класс решений в виде бегущей волны.

Действительно, ищем решение в виде $u(x,t) = U(\xi)$, $\xi = x - y(t)$.

Подставляя в (8), получаем уравнение для функции $U(\xi)$

$$-\big(y'(t) + 2k(x)\big)U'(\xi) = U''(\xi). \tag{9}$$

Переход к координатам бегущей волны является корректным в том случае, если переменные x и t входят в уравнение (9) только через посредство переменной ξ, т.е. если $y'(t) + 2k(x) = \phi(\xi)$, где ϕ — некоторая функция. Очевидно, что поскольку переменные x и ξ связаны линейным преобразованием, то это возможно только, если k и ϕ являются линейными функциями своих аргументов, т.е. $k(x) = Bx + B_1$, $\phi(\xi) = \beta\xi + \gamma$, где B, B_1, β, γ — некоторые постоянные. Тогда из уравнения (7) следует

$$B + (Bx + B_1)^2 = -\psi(x) + C, \tag{10}$$

откуда, дифференцируя по x, получаем $F(x) = -2B \times \times (Bx + B_1)$.

Таким образом, неоднородное уравнение Бюргерса имеет решения типа бегущей волны только в том случае, если источник является линейной функцией координаты,[3] т.е.

$$F(x) = -2B^2 x \tag{11}$$

(полагая без ограничения общности $B_1 = 0$, добиться этого можно всегда путем выбора начала координат). Уравнение (7) принимает вид

$$k'(x) + k^2 = B^2x^2 + C. \tag{12}$$

[3] Речь идет именно о неоднородном уравнении (1), существование решений в виде бегущей волны для однородного уравнения Бюргерса — хорошо известный факт [3].

Нетрудно убедиться (например, непосредственно подставляя в (12)), что уравнение (12) имеет требуемое линейное решение $k(x) = Bx$ только при выборе константы интегрирования $C = B$.

Заметим, что для уравнения Риккати знание одного частного решения позволяет найти и его общее решение (см. например, [12]). Общее решение уравнения (12) (при $C = B$) имеет вид

$$k(x) = Bx + \exp(-Bx^2)/\big(C_1 + (\pi/4B)^{1/2}\operatorname{erf}(B^{1/2}x)\big), \tag{13}$$

где $\operatorname{erf}(z)$ — интеграл ошибок, C_1 — постоянная интегрирования, причем $C_1 \subseteq \mathbb{R}\,U\{\infty\}$.

Любая функция из однопараметрического семейства (13) представляет собой стационарное решение уравнения Бюргерса с правой частью в виде (11).

Из уравнения (9) и условия линейности функций $k(x)$ и $\phi(x)$ получаем

$$y'(t) + 2Bx = \beta\xi + \gamma = \beta(x - y(t)) + \gamma, \tag{14}$$

где β, γ — постоянные коэффициенты.

Разделяя переменные, имеем

$$(2B - \beta)x = 0, \tag{15}$$

откуда $\beta = 2B$ и

$$y'(t) + \beta y - \gamma = 0. \tag{16}$$

Полагая $y(0) = 0$ (что соответствует естественному выбору начального условия $\xi(x,0) = x$), получаем

$$y(t) = \delta[1 - \exp(-2Bt)], \tag{17}$$

где $\delta = \gamma/2B$.

Найдем выражение, описывающее форму волны. Из (13)–(15) имеем

$$-(2B\xi + \gamma)U'(\xi) = U''(\xi). \tag{18}$$

Вводя новую переменную $U'(\xi) = p(\xi)$, приходим к уравнению 1-го порядка

$$p'(\xi) = -(2B\xi + \gamma)p, \tag{19}$$

которое легко интегрируется

$$p \equiv U'(\xi) = \mathrm{const}\exp(-B\xi^2 - \gamma\xi). \tag{20}$$

Случай $B < 0$, по-видимому, не представляет интереса, поскольку решение (описывающее отклонение от стационарного профиля $k(x) = Bx$) возрастет неограниченно при $|x| \to \infty$. Поэтому далее полагаем $B > 0$. Решение уравнения (20) находится без труда

$$U(\xi) = a + b\big(1 + \operatorname{erf}[B^{1/2}(\xi + \delta)]\big), \tag{21}$$

где a и b — некоторые постоянные.

Возвращаясь к исходным переменным x, t и u, имеем

$$u(x,t) = a + b\left(1 + \operatorname{erf}\left[B^{1/2}(x + \delta\exp(-2Bt))\right]\right). \tag{22}$$

Окончательно, обозначая $\mu = (\pi/4B)^{1/2}(a+b)/b$ и учитывая (4), получаем следующее семейство решений уравнения (1), (11):

$$v(x,t) = Bx + \exp\Big[-B(x+\delta\exp(-2Bt))^2\Big]\Big/\Big(\mu + (\pi/4B)^{1/2} \times \operatorname{erf}[B^{1/2}(x+\delta\exp(-2Bt))]\Big). \quad (23)$$

Очевидно, при значениях параметра $|\mu| > (\pi/4B)^{1/2}$ функция (23) является непрерывной для любых x и t (при $|\mu| < (\pi/4B)^{1/2}$ выражение (23) имеет разрывы 2-го рода; решения такого типа, также привлекающие значительное внимание [13,14] в данной работе рассматриваться не будут). Нетрудно видеть, что двухпараметрическое семейство решений $v(x,t;\delta,\mu)$ описывает замедляющееся движение колоколообразной асимметричной волны вдоль линейного профиля $k(x) = Bx$. Величина δ характеризует начальное положение волны, величина $1/\mu$ — ее амплитуду; расположение волны относительно начала координат и прямой $k(x) = Bx$ зависит также от знаков δ и μ. Конечное положение (устанавливающееся асимптотически при $t \to \infty$) описывается выражением (13) (при $C_1 = \mu$).

Заметим, что в силу линейности уравнения (8) линейная комбинация решений вида (23) является его решением. Таким образом, более общее N-волновое решение УБПЧ с источником (11) имеет вид

$$v(x,t) = Bx + \Big(\sum_{i=0}^{N}\varepsilon_i \exp\big[-B(x+\delta_i\exp(-2Bt))^2\big]\Big)\Big/\Big(\mu + (\pi/4B)^{1/2} \times \sum_{i=0}^{N}\varepsilon_i \operatorname{erf}\big[B^{1/2}(x+\delta_i\exp(-2Bt))\big]\Big). \quad (24)$$

Если константы δ_i достаточно сильно различаются по абсолютной величине, то решение (24) представляет собой набор из N отдельных волн, "стягивающихся" слева и справа к началу координат. В том случае, если константы δ_i одного порядка, отдельные волны сливаются и решение (24) описывает процесс эволюции начального возмущения (которое может иметь теперь, при соответствующем выборе параметров $\mu, \varepsilon_i, \delta_i$ и N, довольно сложный вид) к стационарному распределению (13).

Нестационарный источник: автопреобразования

В рассмотренном выше случае правая часть уравнения Бюргерса (1) зависела только от переменной x. В более общем случае $F = F(x,t)$. Нетрудно убедиться непосредственной проверкой, что в этом случае преобразование (4), где теперь $k = k(x,t)$, также приводит к линейному уравнению вида (8) для новой функции $u(x,t)$. Уравнение связи, однако, теперь уже не является уравнением Риккати, а совпадает с исходным уравнением (1). Таким образом, подстановка (4) в случае нестационарного источника описывает "автопреобразование" решений УБПЧ (1), а именно если функция $k(x,t)$ есть решение уравнения Бюргерса (с правой частью произвольного вида), то функция

$$v(x,t) = (u_x/u) + k(x,t) \quad (25)$$

является решением того же уравнения (1) (соответствующим другому начальному условию), при этом $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (8).

Соотношение (25) может быть использовано для построения точных решений в том случае, когда правая часть уравнения Бюргерса зависит от времени. В качестве примера рассмотрим модельное уравнение, описывающее динамику некоторой системы, находящейся в линейном, затухающем со временем поле

$$v_t - 2vv_x - v_{xx} = -ax/(t+t_0)^2, \quad (26)$$

где a и t_0 — некоторые постоянные; чтобы избежать сингулярностей при $t > 0$ полагаем $t_0 > 0$.

Нетрудно убедиться, что функция $k(x,t) = bx/(t+t_0)$ является решением уравнения (26) при условии $b + 2b^2 = a$. В зависимости от знаков a и b решения уравнения (26) обладают разными свойствами. Поскольку целью данного раздела является скорее привести пример получения точных решений уравнения (1) с помощью автопреобразования (25), чем подробное исследование уравнения (26), то ограничимся здесь только случаем $a > 0$ и $b = (1/4)\big((1+8a)^{1/2} - 1\big) > 0$.

Решение $k(x,t)$ не представляет интереса из-за своей простоты. Однако его можно использовать для построения другого решения, обладающего весьма интересными свойствами. В силу (25) выражение $v = k + (u_x/u)$ также будет решением, если функция $u(x,t)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$u_t - \big(2bx/(t+t_0)\big)u_x = u_{xx}. \quad (27)$$

Решение уравнения (27) ищем в автомодельном виде $u(x,t) = U(\xi)$, $\xi = x\phi(t)$, вид функций U и ϕ подлежит определению. Подставляя в (27), имеем

$$\big(x\phi^{-2}\phi'(t) - 2b\phi^{-1}x/(t+t_0)\big)U'(\xi) = U''(\xi). \quad (28)$$

Переход к автомодельным переменным является корректным в том случае, если выражение в скобках есть функция переменной ξ. Для выполнения этого условия потребуем, чтобы

$$\phi^{-2}\phi'(t) = \lambda\phi, \quad 1/\big[(t+t_0)\phi\big] = \nu^{-2}\phi, \quad (29)$$

где λ и η — некоторые коэффициенты.

Из (29) получаем, что $\phi(t) = \eta(t+t_0)^{-1/2}$, $\lambda = -0.5\eta^{-2}$. Полагая $\xi(x,0) = x$, имеем $\eta = t_0^{1/2}$.

Уравнение (28) принимает вид

$$-(2/t_0)(b+0.25)\xi U'(\xi) = U''(\xi). \qquad (30)$$

Обозначая $(b+0.25)/t_0 = \alpha^2$ (поскольку $b > 0$, см. выше), из (30) получаем

$$-2\alpha^2\xi U'(\xi) = U''(\xi). \qquad (31)$$

Уравнение (31) легко интегрируется

$$U(\xi) = A_1 \operatorname{erf}(\alpha\xi) + A_2, \qquad (32)$$

где $\operatorname{erf}(z)$ — интеграл ошибок; A_1, A_2 — некоторые постоянные.

Учитывая соотношение (25), мы приходим к следующему точному решению уравнения (26):

$$v(x,t) = bx/(t+t_0) + \left[t_0/(t+t_0)\right]^{1/2} \times \exp(-\alpha^2\xi^2)/\left(\varkappa + (\sqrt{\pi}/2\alpha)\operatorname{erf}(\alpha\xi)\right), \qquad (33)$$

где $\xi = x\left[t_0/(t+t_0)\right]^{1/2}$.

При значениях параметра $|\varkappa| > \sqrt{\pi}/2\alpha$ функция (33) непрерывна при всех x и t. Выражение (33) описывает автомодельное расплывание и затухание колоколообразного начального возмущения линейного поля. Таким образом, простое "затравочное" решение $k(x,t)$, само по себе не представляющее большого интереса, с учетом преобразования (25) может быть использовано для генерации более сложных решений.

Заметим в заключение, что попытка построить для уравнения (26) "многочастичное" решение, аналогичное многоволновому решению (24) предыдущего раздела, не приводит к успеху: возникающее при этом выражение в точности совпадает с (33).

Заключение

Предложенный в данной работе новый метод построения точных решений уравнения Бюргерса с нетривиальной правой частью, основанный на модифицированном преобразовании Хопфа–Коула (2), рассматривался отдельно для случаев стационарного и нестационарного источников. По своей сути, однако, метод един: подстановка (2) сводит УБПЧ (1) к линейному уравнению (8), описывающему эволюцию начального возмущения некоторого "первоначального" решения, которое может быть стационарным или нестационарным в зависимости от типа источника.

Полученные в данной работе специальные точные решения (23), (24) и (33) являются неограниченными при $|x| \to \infty$, что на первый взгляд ставит под сомнение их физическую значимость. Заметим по этому поводу, что рассмотрение решений, не ограниченных на бесконечности, имеет в математической физике давнюю традицию (хрестоматийный пример — поле бесконечно длинной заряженной нити). Дело в том, что для реальной физической системы "бесконечность" означает выполнение условия $L/l \gg 1$, где L — внешний масштаб системы, l — характерная длина описываемого процесса (в примере с нитью это означает, что логарифмически растущее на бесконечности решение правильно описывает распределение поля вблизи оси реальной нити и заведомо неправильно при удалении от оси на расстояния больше или порядка длины нити).

Свойства решений (23) и (24) полностью соответствуют описанной ситуации. Описываемое ими отклонение от стационарного профиля с возрастанием $|x|$ стремится к нулю. Это означает, в частности, что внутренняя структура решений определяет характерную длину l, зависящую только от параметров задачи, так что эволюция начального возмущения происходит в области от $-l$ до l. Если L — некоторый масштаб физической системы, указывающий при каких расстояниях справедливо уравнение (1) (в частности, на каких расстояниях поле $F(x)$ можно считать линейным), то при выполнении условия $L \gg l$ можно утверждать, что динамика системы (при соответствующих начальных условиях) описывается выражением (23) или (24).

Сказанное относится также и к автомодельному решению (33) с той разницей, что теперь длина l зависит также от продолжительности рассмотрения процесса (вследствие расплывания начального возмущения), $l \sim T^{1/2}$. Это дополнительно ограничивает применимость выражения (33) не слишком большими временами.

Заметим, кроме того, что все полученные решения годятся для описания процессов в системе конечного размера в том случае, когда на ее границах выполняются специального вида условия, определяемые видом (23), (24) или (33).

Последнее замечание касается автопреобразований. Уравнение (25) в действительности определяет только одно "звено" в целой иерархии решений. А именно, начиная с некоторого "затравочного" решения k_0, мы приходим к $k_1 = k_0 + (u_x^{(0)}/u^{(0)})$, затем $k_2 = k_1 + (u_x^{(1)}/u^{(1)})$, $k_3 = k_2 + \ldots$ и т. д. Изучение свойств этой иерархии представляется захватывающей проблемой и будет являться темой дальнейших исследований.

Список литературы

[1] *Burgers J.M.* // Adv. Appl. Mech. 1948. Vol. 1. P. 171–199.

[2] *Su C.S., Gardner C.S.* // J. Math. Phys. 1969. Vol. 10. P. 536–539.

[3] *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 621 с.

[4] *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. М.: Наука, 1979. 384 с.

[5] *Hood S.* // J. Math. Phys. 1995. Vol. 36. P. 1971–1990.

[6] *Ablowitz M.J., De Lillo S.* // Phys. Lett. A. 1991. Vol. 156. P. 483–487.

[7] *Ablowitz M.J., De Lillo S.* // Physica D. 1996. Vol. 92. P. 245–261.

[8] *Chekhlov A., Yakhot V.* // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 52. P. 5681–5684.
[9] *Hopf E.* // Comm. Pure Appl. Math. 1950. Vol. 3. P. 201–230.
[10] *Cole J.D.* // Quart. Appl. Math. 1951. Vol. 9. P. 225–236.
[11] *Ильин В.А., Калашников А.С., Олейник О.А.* // УМН. 1962. Т. 17. Вып. 3. С. 3–146.
[12] *Камке Е.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1965. 704 с.
[13] *Samsonov A.M.* // Appl. Analysis. 1995. Vol. 57. P. 85–100.
[14] *Волосов К.А., Данилов В.Г., Логинов А.М.* // ТМФ. 1994. Т. 101. С. 189–199.