01;02

Возбужденный водородоподобный атом в сильном низкочастотном электромагнитном поле

© О.Б. Препелица

Институт прикладной физики АН Молдавии,
277028 Кишинев, Молдавия

(Поступило в Редакцию 22 мая 1998 г.)

В квазиклассическом приближении рассмотрена многофотонная ионизация дважды вырожденного по орбитальному моменту связанного электронного состояния. Показано, что в интенсивном электромагнитном поле, когда существенно нерезонансное смешивание уровней, образующих вырожденное состояние, вероятность ионизации сильно возрастает по сравнению со случаем, описываемым формулой Келдыша. Показано также, что вырождение приводит к резкому увеличению интенсивности излучения, рассеянного связанным электроном. При этом высокочастотная граница спектра излучения (cut-off эффект) сдвигается в область больших частот.

Введение

Настоящая работа посвящена исследованию физических следствий, к которым приводит случайное вырождение связанных уровней, в процессах взаимодействия с электромагнитным полем. Этим обусловлен выбор именно возбужденного водородоподобного атома, для которого, как известно, свойственно l-вырождение (l — орбитальное квантовое число). Рассматриваются два важных эффекта, имеющие место при воздействии на связанную электронную систему сильной электромагнитной волны — многофотонная ионизация и генерация высших гармоник. Многоквантовая ионизация возбужденных атомов рассматривалась теоретически и экспериментально в работах [1–6]. Однако при теоретическом описании этого явления предполагалось, что ионизируемое состояние не обладает "внутренней" структурой в том смысле, что не учитывалось смешивание близко лежащих энергетических уровней приложенным электромагнитным полем. Для водородоподобного атома это оправдано только для достаточно слабых электромагнитных полей. Дело в том, что в сильных полях благодаря упомянутому смешиванию происходит коренная перестройка квазиэнергетического спектра. Это в свою очередь приводит к качественным отличиям в характеристиках электродинамических процессов по сравнению с обычным случаем. Здесь следует отметить работы [7,8], в которых показано, что собственный дипольный момент возбужденного состояния двухуровневой системы оказывает существенное влияние на скорость ее возбуждения, а также интенсивность и форму линий спектра излучения.

Настоящая работа состоит из Введения и двух разделов. В первом разделе получен аналог формулы Келдыша [9] для вероятности многоквантовой ионизации дважды вырожденного электронного состояния. Показано, что благодаря случайному вырождению уровня скорость ионизации экспоненциально возрастает по сравнению со скоростью ионизации невырожденного состояния.

Во втором разделе исследуется спектр излучения высших гармоник возбужденным водородоподобным атомом. Генерация высших гармоник атомами исследовалась во многих работах (см., например, [10–15]). Согласно экспериментальным результатам, в спектре гармоник имеется широкое плато, обладающее резкой высокочастотной границей, которая находится в области квантов, близких к $I + 2{-}3U_p$, где I — потенциал ионизации, U_p — пондеромоторная энергия электрона. Интерес к этому явлению объясняется возможностью получения когерентного высокочастотного излучения (вплоть до рентгеновского диапазона). К сожалению, из-за более жестких ограничений на напряженность электромагнитного поля и меньшего потенциала ионизации возбужденный атом является менее перспективным источником, чем атом в основном состоянии. Тем не менее при прочих равных условиях интенсивность излучения, рассеянного возбужденным водородоподобным атомом, намного больше, чем в обычном случае — при отсутствии вырождения. Кроме того, сильное смешивание уровней, образующих вырожденное состояние, приводит к увеличению длины плато в спектре излучения.

1. Многоквантовая ионизация возбужденного водородоподобного атома

Рассмотрим дважды вырожденное по орбитальному моменту связанное электронное состояние в поле линейно поляризованной волны с частотой ω и напряженностью $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \cos \omega t$. В приближении Келдыша–Фейсала–Рисса амплитуда вероятности ионизации находится по формуле

$$A_{if} = -\frac{i}{\hbar} \int dt d\mathbf{r} \Psi_f^*(\mathbf{r}, t) e\mathbf{E}(t)\mathbf{r}\Psi_i(\mathbf{r}, t), \qquad (1)$$

$$\Psi_f(\mathbf{r},t)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(\left(\hbar\mathbf{k}+\frac{e\mathbf{E}_0}{\omega}\sin\omega t\right)\mathbf{r}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\int\limits_0^t d\tau\frac{\left(\hbar\mathbf{k}+\frac{e\mathbf{E}_0}{\omega}\sin\omega\tau\right)^2}{2M}\right)\right],$$
$$\Psi_i(\mathbf{r},t)=\Psi_1(\mathbf{r},t)\exp(-i\rho\sin\omega t)+\Psi_2(\mathbf{r},t)\exp(i\rho\sin\omega t),$$
$$\Psi_{1,2}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\Psi_s(\mathbf{r})\pm\Psi_p(\mathbf{r})\big)\exp\left(\frac{i}{\hbar}It\right). \quad (2)$$

Здесь $\Psi_f(\mathbf{r},t)$ — волновая функция свободного электрона с импульсом $\hbar\mathbf{k}$ в поле плоской электромагнитной волны; $\Psi_i(\mathbf{r},t)$ — волновая функция ионизируемого состояния в поле волны [16]; $\Psi_s(\mathbf{r})$, $\Psi_p(\mathbf{r})$ — волновые функции вырожденного состояния в отсутствие электромагнитного поля; I — потенциал ионизации

$$\rho=\frac{|\mathbf{E}_0\mathbf{d}|}{\hbar\omega},\quad \mathbf{d}=e\int d\mathbf{r}\Psi_s^*(\mathbf{r})\mathbf{r}\Psi_p(\mathbf{r}).$$

Приведем некоторые разъяснения по поводу выбора волновой функции начального состояния в виде (2). Хорошо известно, что даже сравнительно слабое электромагнитное поле приводит к интенсивному смешиванию состояний с одинаковой энергией, переходы между которыми разрешены правилами отбора. В нашем случае мерой указанного смешивания является параметр ρ. В условиях выполнения неравенства $\rho\gtrsim 1$, переходы между уровнями, образующими вырожденное состояние, следует учитывать точно — во всех порядках теории возмущений. Только лишь в случае $\rho\ll 1$ можно ограничиться рассмотрением конечного числа членов ряда теории возмущений. Легко видеть, что даже для полей с напряженностью, значительно меньше атомной, в общем случае отсутствует ограничение на величину параметра ρ. Этим обусловливается выбор волновой функции начального состояния в виде (2), где смешивание уровней $\Psi_s(\mathbf{r})$ и $\Psi_p(\mathbf{r})$ внешним электромагнитным полем точно учтено [16].

Воспользовавшись формулой разложения экспоненты по функциям Бесселя действительного аргумента

$$\exp(i\rho\sin\omega t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m(\rho)\exp(im\omega t),$$

представим выражение (2) в виде

$$\Psi_i(\mathbf{r},t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\Psi_i^{(m)}(\mathbf{r})J_m(\rho)\exp\left[\frac{i}{\hbar}(I-m\hbar\omega)t\right],$$
$$\Psi_i^{(m)}(\mathbf{r})=\Psi_1(\mathbf{r})+(-1)^m\Psi_2(\mathbf{r}).$$

Как следует из последних формул, связанное квазистационарное состояние электрона в поле электромагнитной волны может интерпретироваться как суперпозиция состояний с квазиэнергиями

$$\varepsilon_m=-(I+m\hbar\omega);\quad m=0,\pm1,\pm2,\ldots. \quad (3)$$

Учитывая свойства функций Бесселя, легко видеть, что максимум распределения по квазиэнергиям соответствует значениям $m\sim\pm[\rho]$, где [ ] — обозначает целую часть числа. Это означает, что существенно заселены только подуровни с $\varepsilon_{\pm[\rho]}=-(I\pm[\rho]\hbar\omega)$. Таким образом, электрон оказывается частично локализованным в состоянии, лежащем ближе к краю континуума, чем в случае $\rho=0$. Здесь ширина барьера, разделяющего квазистационарные (дискретные) состояния и состояния непрерывного спектра, меньше, чем при $\rho=0$. Как будет показано ниже, это приводит к эффективному увеличению вероятности просачивания электрона через потенциальный барьер и ионизации атома. Заметим также, что поскольку электрон находится в основном в состояниях с квазиэнергиями $I\pm[\rho]\hbar\omega$, то обычное условие справедливости квазиклассического приближения [9] $I/(\hbar\omega)\gg 1$ заменяется на более сильное $I/(\hbar\omega)-\rho\gg 1$. Это значит, что условие многофотонности перехода должно выполняться для ближайшего к континууму, наиболее заселенного квазиуровня.

После вычисления интеграла по координате и некоторых преобразований, связанных с разложением функций в ряды Фурье, представим выражение (1) в виде

$$A_{if}=-\frac{ie}{\hbar}\int\limits_{-\pi}^{\pi}d\varphi\Bigg(\mathbf{E}_0\mathbf{D}_1(\mathbf{k}(\varphi))\exp\left[\frac{i}{\hbar\omega}\right.$$
$$\left.\times\left(\int\limits_0^{\varphi}d\varphi'\frac{\left(\hbar\mathbf{k}+\frac{e\mathbf{E}_0}{\omega}\sin\varphi'\right)^2}{2M}+I\varphi-\rho\hbar\omega\sin\varphi\right)\right]$$
$$+\mathbf{E}_0\mathbf{D}_2(\mathbf{k}(\varphi))\exp\left[\frac{i}{\hbar\omega}\left(\int\limits_0^{\varphi}d\varphi'\frac{\left(\hbar\mathbf{k}+\frac{e\mathbf{E}_0}{\omega}\sin\varphi'\right)^2}{2M}+I\varphi\right.\right.$$
$$\left.\left.+\rho\hbar\omega\sin\varphi\right)\right]\Bigg)\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta\left(\frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2M}+I+(\beta-l)\hbar\omega\right), \quad (4)$$

где

$$\mathbf{D}_{1,2}(\mathbf{k}(\varphi))=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int d\mathbf{r}\exp(i\mathbf{k}(\varphi)\mathbf{r})\mathbf{r}\Psi_{1,2}(\mathbf{r}),$$
$$\mathbf{k}(\varphi)=\mathbf{k}+\frac{e\mathbf{E}_0}{\hbar\omega}\sin\varphi,\quad \beta=\frac{e^2\mathbf{E}_0^2}{4M\hbar\omega^3}.$$

Будем считать неравенство $I/(\hbar\omega)-\rho\gg 1$ всегда выполненным, в этом случае экспоненты, содержащиеся в выражении (4), являются быстроосциллирующими и для вычисления интеграла можно воспользоваться методом перевала. Перевальные точки находятся из соотношения

$$\frac{(\hbar\mathbf{k}+(e\mathbf{E}_0/\omega)\sin\varphi^*)^2}{2M}+I\pm\rho\hbar\omega\cos\varphi^*=0. \quad (5)$$

Как и при выводе формулы Келдыша [9], в нашем случае можно показать, что в амплитуду вероятности ионизации основной вклад вносят малые $\mathbf{k}$, такие что $\hbar^2\mathbf{k}^2/(2M)\ll I$. Поэтому, ограничившись экспоненциальной точностью расчета, можем положить $\mathbf{k}=0$ в выражениях (4), (5), после чего получим следующие значения точек перевала:

$$\varphi^* = i \operatorname{arsh}\gamma + \begin{cases}\pi,\\ 0,\end{cases}$$

$$\gamma^2 = \gamma_0^2 + \gamma_\rho^2 - \sqrt{2\gamma_\rho^2(\gamma_0^2+1)+\gamma_\rho^4},$$

$$\gamma_0^2 = \frac{I}{2\beta\hbar\omega}, \quad \gamma_\rho^2 = \frac{\rho^2}{8\beta^2}.$$

Теперь не составляет труда найти скорость ионизации, после обычных преобразований получим

$$w \sim \exp\left[-\frac{2I}{\hbar\omega} f(\gamma)\right], \qquad (6)$$

$$f(\gamma) = \left(1 + \frac{1}{2\gamma_0^2}\right)\operatorname{arsh}\gamma - \frac{\gamma(1+2\gamma_0^2-\gamma^2)}{2\gamma_0^2\sqrt{1+\gamma^2}}. \qquad (7)$$

В случае $\rho = 0$ ($\gamma = \gamma_0$) формула (6) переходит в выражение для скорости многоквантовой ионизации невырожденного уровня, полученное Келдышем [9],

$$w_0 \sim \exp\left[-\frac{2I}{\hbar\omega} f_0(\gamma_0)\right],$$

$$f_0(\gamma_0) = \left(1 + \frac{1}{2\gamma_0^2}\right)\operatorname{arsh}\gamma_0 - \frac{\sqrt{1+\gamma_0^2}}{2\gamma_0}. \qquad (8)$$

Поскольку при $\rho \neq 0$ всегда имеет место неравенство $f(\gamma) < f_0(\gamma_0)$, то ясно, что вырождение по орбитальному моменту ионизируемого состояния приводит к экспоненциальному росту вероятности ионизации по сравнению со случаем $\mathbf{d} = 0$ при прочих равных условиях. Например, для значений параметров $|\mathbf{E}_0| \sim 10^7$ V/cm, $\omega \sim 10^{14}\,\mathrm{s}^{-1}$ и $I \sim 3.45$ eV, $|\mathbf{d}| \sim 10$ D, что соответствует потенциалу ионизации и собственному дипольному моменту состояния $n^* = 2$ атома водорода, имеем $\ln(w/w_0) \sim 11$. В предельных случаях, когда ионизация носит многофотонный или туннельный характер, формула (6) значительно упрощается и принимает вид

$$w \sim (2\gamma)^{-\frac{2I}{\hbar\omega}} \exp\left[\frac{2I}{\hbar\omega}\frac{2\gamma_0^2-\gamma^2}{2\gamma_0^2}\right], \quad \gamma \gg 1, \qquad (9)$$

$$w \sim \exp\left[-\frac{4}{3}\frac{I-\rho\hbar\omega}{\hbar\omega}\sqrt{\frac{I-\rho\hbar\omega}{2\beta\hbar\omega}}\right], \quad \gamma_0 \ll 1. \qquad (10)$$

Из выражения (9) следует, что в многофотонном режиме вероятность ионизации, как и при $\rho = 0$, пропорциональна $\mathbf{E}_0^{2I/(\hbar\omega)}$. При этом численное значение скорости ионизации оказывается в $(\gamma_0/\gamma)^{2I/(\hbar\omega)}\exp(I(\gamma_0^2-\gamma^2)/(\gamma_0^2\hbar\omega))$ раз больше, чем в обычном случае. Формула (10) формально совпадает с соответствующим предельным случаем формулы Келдыша (8)

$$w_0 \sim \exp\left[-\frac{4}{3}\frac{I}{\hbar\omega}\sqrt{\frac{I}{2\beta\hbar\omega}}\right], \quad \gamma_0 \ll 1,$$

где вместо потенциала ионизации I записана разность $I - \rho\hbar\omega$.

Таким образом в туннельном режиме ионизация в основном происходит с квазиэнергетического уровня $\varepsilon_{[\rho]} = -(I - [\rho]\hbar\omega)$, что подтверждает качественные соображения о характере ионизации вырожденного состояния, сделанные в начале данного раздела.

2. Генерация высших гармоник возбужденным водородоподобным атомом в поле сильной электромагнитной волны

Считая импульс электромагнитного поля достаточно коротким, таким что за время его действия не происходит существенного обеднения связанного состояния за счет ионизации, представим волновую функцию электрона в виде

$$\Psi(\mathbf{r},t) = \Psi_i(\mathbf{r},t) + \int dt'd\mathbf{r}'G(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t')e\mathbf{E}(t')\mathbf{r}'\Psi_i(\mathbf{r}',t'),$$

$$G(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t') = -\frac{i\Theta(t-t')}{(2\pi^2)^{3/2}\hbar}\int d\mathbf{k}$$
$$\times \exp\left[i\left(\left(\mathbf{k} + \frac{e\mathbf{E}_0}{\hbar\omega}\sin\omega t\right)\mathbf{r} - \left(\mathbf{k} + \frac{e\mathbf{E}_0}{\hbar\omega}\sin\omega t'\right)\mathbf{r}'\right.\right.$$
$$\left.\left. - \int_{t'}^{t} d\tau \frac{(\hbar\mathbf{k} + (e\mathbf{E}_0/\omega)\sin\omega\tau)^2}{2M\hbar}\right)\right], \qquad (11)$$

где $\Theta(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда: $\Theta(x) = 1$ при $x > 0$ и $\Theta(x) = 0$ при $x < 0$.

Мощность дипольного излучения на частоте $\Omega = n\omega$ пропорциональна $|\mathbf{r}_n|^2$, где $\mathbf{r}_n$ — соответствующая компонента Фурье от среднего значения оператора координаты

$$\mathbf{r}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d(\omega t)\exp(in\omega t)\langle\mathbf{r}(t)\rangle,$$

$$\langle\mathbf{r}(t)\rangle = \int dt'd\mathbf{r}'d\mathbf{r}\Psi_i^*(\mathbf{r},t)\mathbf{r}G(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t')$$
$$\times e\mathbf{E}(t')\mathbf{r}'\Psi_i(\mathbf{r}',t') + h.c. \qquad (12)$$

После некоторых преобразований с учетом формул (2), (11) представим (12) в виде

$$\mathbf{r}_n = -\frac{e\hbar^3}{\sqrt{2\pi^4}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d\mathbf{k} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi_1 d\varphi_2$$

$$\times \exp\left[i\left(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{k}(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2)\right.\right.$$

$$\left.\left.+ \frac{\beta}{2}(\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_2)\right)\right]$$

$$\times \big(\mathbf{D}_1(\mathbf{k}(\varphi_1)) \exp(i\rho \sin\varphi_1)$$

$$+ \mathbf{D}_2(\mathbf{k}(\varphi_1)) \exp(-i\rho\sin\varphi_1)\big)$$

$$\times \frac{\mathbf{E}(\varphi_1)\exp(i(l\varphi_1 + (n-l)\varphi_2)) + \mathbf{E}(\varphi_2)\exp(i(l\varphi_2 + (n-l)\varphi_1))}{\hbar^2\mathbf{k}^2/(2M) + I + (\beta - l)\hbar\omega}$$

$$\times (\mathbf{D}_1(\mathbf{k}(\varphi_2)) \exp(-i\rho\sin\varphi_2)$$

$$+ \mathbf{D}_2(\mathbf{k}(\varphi_2)) \exp(i\rho \sin\varphi_2)), \quad (13)$$

где

$$\boldsymbol{\alpha} = e\mathbf{E}_0/(M\hbar\omega^2), \quad \mathbf{E}(\varphi) = \mathbf{E}_0\cos\varphi.$$

Точное вычисление интегралов наталкивается на серьезные трудности. Поэтому воспользуемся приближенным методом расчета, основанным на так называемом полюсном приближении [17]. В этом приближении предполагается, что интеграл в смысле главного значения в выражении

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{ix+\varepsilon} = -\pi\delta(x) + i\frac{p}{x},$$

где в нашем случае

$$x = \frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2M} + I + (\beta - l)\hbar\omega,$$

мал по сравнению с вкладом дельта-функции. Хотя нет строгого доказательства корректности использования полюсного приближения, по-видимому, при многофотонных переходах это приближение является оправданным [17,18]. В худшем случае можно ожидать, что поправки к результатам будут того же порядка, что сами результаты в рамках полюсного приближения. Используя свойства дельта-функции, образовавшейся в указанном приближении, преобразуем (13) к виду

$$|\mathbf{r}_n|^2 = \frac{1}{2\pi^2}\left\{l\hbar^3 \int d\mathbf{k}\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi_1 d\varphi_2 \mathbf{A}_n^*(\varphi_1)\mathbf{E}(\varphi_2)\mathbf{A}_0(\varphi_2)\right.$$

$$\left.\times \sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta\left(\frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2M} + I + (\beta - l)\hbar\omega\right)\right\}^2,$$

$$\mathbf{A}_n(\varphi) = \left(\mathbf{D}_1(\mathbf{k}(\varphi))\exp\left[\frac{i}{\hbar\omega}\right.\right.$$

$$\left.\times\left(\int_0^{\varphi} d\varphi' \frac{(\hbar\mathbf{k} + (e\mathbf{E}_0/\omega)\sin\varphi')^2}{2M} + I\varphi - \rho\hbar\omega\sin\varphi\right)\right]$$

$$+ \mathbf{D}_2(\mathbf{k}(\varphi))\exp\left[\frac{i}{\hbar\omega}\left(\int_0^{\varphi} d\varphi' \frac{(\hbar\mathbf{k} + (e\mathbf{E}_0/\omega)\sin\varphi')^2}{2M}\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + I\varphi + \rho\hbar\omega\sin\varphi\right)\right]\exp(-in\varphi)\right).$$

(в выражении для $|\mathbf{r}_n|^2$ учтено только слагаемое, дающее главный вклад).

Предположим, что $I/(\hbar\omega) - \rho \gg 1$ и $n - I/(\hbar\omega) - \rho \gg 1$, тогда экспоненты являются быстроосциллирующими и интегралы могут быть вычислены методом перевала. Для нахождения перевальных точек необходимо решить следующие уравнения:

$$\frac{(\hbar\mathbf{k} + (e\mathbf{E}_0/\omega)\sin\varphi_1^*)^2}{2M} + I \pm \rho\hbar\omega\cos\varphi_1^* - n = 0, \quad (14)$$

$$\frac{(\hbar\mathbf{k} + (e\mathbf{E}_0/\omega)\sin\varphi_2^*)^2}{2M} + I \pm \rho\hbar\omega\cos\varphi_2^* = 0. \quad (15)$$

Заметим, что интеграл по φ_2 с экспоненциальной точностью равен амплитуде многофотонной ионизации вырожденного уровня (4) (как следствие этого, уравнения для перевальных точек (5), (15) совпадают). Здесь, как и в (4), основной вклад вносят малые импульсы $\hbar\mathbf{k}$. С другой стороны, при $I/(\hbar\omega)+\rho < n < I/(\hbar\omega)-\rho+2\beta$ и малых $\hbar\mathbf{k}$ корни уравнения (14) являются действительными, поэтому, как легко видеть, интеграл по φ_1 выражается через некоторую осциллирующую функцию. Т.е. его значение сравнительно слабо зависит от $\mathbf{k}$ в том смысле, что оно не убывает экспоненциальным образом с ростом $\mathbf{k}$, как это имеет место для интеграла по φ_2. Из этого следует, что для рассматриваемых n основной вклад в $\mathbf{r}_n$ вносят малые импульсы $\hbar\mathbf{k}$, много меньшие боровского импульса. Тогда в уравнениях (14), (15) приближенно можно положить $\mathbf{k} = 0$, после чего они легко решаются. Для знака "плюс" перед ρ в уравнениях (14), (15)

$$\varphi_1^* = \pm\arcsin\gamma_n^{(-)}; \pm\arcsin\gamma_n^{(+)} \mp \pi,$$

$$\varphi_2^* = i\mathrm{arsh}\gamma + \pi$$

и для знака "минус" перед ρ в (14), (15)

$$\varphi_1^* = \pm\arcsin\gamma_n^{(+)}; \pm\arcsin\gamma_n^{(-)} \mp \pi,$$

$$\varphi_2^* = i\mathrm{arsh}\gamma,$$

где

$$\gamma_n^{(\pm)} = \sqrt{\frac{n}{2\beta} - \gamma_0^2 - \gamma_\rho^2 \pm \sqrt{2\gamma_\rho^2\left(\gamma_0^2 + 1 - \frac{n}{2\beta}\right) + \gamma_\rho^4}}. \quad (16)$$

Предположим, что приложенное электромагнитное поле достаточно интенсивное, такое что параметр $\gamma \ll 1$. Будем также считать, что $I/(\hbar\omega) \ll n/(2\beta) \ll 1$. В этом случае в экспоненциальных выражениях, содержащих $\gamma_n^{(\pm)}$, можно положить $\gamma_n^{(\pm)} \approx \sqrt{n/(2\beta) - \gamma_0^2 \pm \sqrt{2}\gamma_\rho}$, а в предэкспоненциальных выражениях $\gamma_n^{(\pm)} \approx \sqrt{n/(2\beta)}$. Тогда удается получить достаточно простое выражение для квадрата модуля матричного элемента

$$|\mathbf{r}_n|^2 \sim \frac{1}{\sqrt{n}}\Bigg(\mathbf{D}_1\left(\sqrt{\frac{2nM\omega}{\hbar}}\right) + (-1)^{\left[\frac{I}{\hbar\omega}+\beta-n\right]}\mathbf{D}_2\left(\sqrt{\frac{2nM\omega}{\hbar}}\right)\Bigg)^2 \times \exp\left[-\frac{4}{3}\frac{I-\rho\hbar\omega}{\hbar\omega}\sqrt{\frac{I-\rho\hbar\omega}{2\beta\hbar\omega}}\right] \times \left(\cos\left(\frac{2}{3}\left(n-\frac{I}{\hbar\omega}+\rho\right)\sqrt{\frac{n-\frac{I}{\hbar\omega}+\rho}{2\beta}}-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{2}{3}\left(n-\frac{I}{\hbar\omega}-\rho\right)\sqrt{\frac{n-\frac{I}{\hbar\omega}-\rho}{2\beta}}-\frac{\pi}{4}\right)\right)^2. \quad (17)$$

Как следует из (17), интенсивности гармоник сравнительно слабо зависят от номера n, т. е. полученное выражение (17) описывает плато в спектре излучения атома. Соотношение (16) позволяет найти высокочастотную границу спектра излучения. Высокочастотная граница спектра характеризуется резким убыванием интенсивности гармоник излучения с ростом их номера. Согласно полученным соотношениям, это достигается тогда, когда все корни φ_1^* становятся комплексными (так как в этом случае значение интеграла по φ_1 из осциллирующей функции превращается в экспоненциально убывающую), что в свою очередь имеет место, когда $\gamma_n^{(\pm)}$ являются комплексными числами или $|\gamma_n^{(\pm)}| > 1$. После простого анализа (16) с учетом этих условий находим высокочастотную границу спектра излучения

$$n_{\max} \sim \frac{I}{\hbar\omega} + 2\beta + \frac{\rho^2}{8\beta}.$$

Полученные результаты позволяют заключить, что вырождение уровня способствует увеличению интенсивности гармоник по сравнению с обычным случаем $\mathbf{d} = 0$. Причем, как и при многоквантовой ионизации, это увеличение носит экспоненциальный характер. Кроме того, как видно из последней формулы, из-за смешивания уровней, образующих вырожденное состояние, высокочастотная граница спектра смещается в область больших частот на величину $\rho^2/(8\beta)$ по сравнению со случаем $\mathbf{d} = 0$ при тех же условиях.

Известно, что расчеты в приближении Келдыша–Фейсала–Рисса (из-за пренебрежения влиянием кулоновского потенциала на состояния непрерывного спектра) обеспечивают, вообще говоря, только экспоненциальную точность результатов. Главным образом по этой причине конечные формулы (6), (17) также записаны с точностью до предэкспоненты (по полю). Это, конечно, затрудняет прямое сопоставление с численными результатами, полученными экспериментально. Проверке подлежит лишь их качественное соответствие. В этой связи обсудим условия, когда рассмотренная в работе модель адекватна реальной физической ситуации. Правомерность ее использования предполагает, что напряженность приложенного электромагнитного поля значительно меньше атомной напряженности для уровня, с которой происходит ионизация или генерация гармоник $|\mathbf{E}_0| \ll |\mathbf{E}_{at}|/n^{*4}$, где $|\mathbf{E}_{at}| \sim 5 \cdot 10^9$ V/cm, n^* — главное квантовое число уровня. Время действия импульса электромагнитного поля τ должно быть значительно меньше времени спонтанной релаксации возбужденного состояния $\tau \ll \tau_{sp}$ ($\tau_{sp} \sim 10^{-8}\,\mathrm{s}^{-1}$). Чтобы исключить резонансное смешивание атомных состояний возбуждающим полем, его частота не должна быть кратной частотам переходов в прочие связанные состояния атома. Кроме того, относительный сдвиг уровней, образующих вырожденное состояние, должен быть значительно меньше частоты электромагнитного поля.

Заметим, что полученные результаты применимы не только для водородоподобных атомов, но и для любых возбужденных водородоподобных систем, например экситонных серий в твердых инертных газах [19] или молекул, обладающих собственным дипольным моментом.

Список литературы

[1] *Делоне Н.Б., Крайнов В.П.* // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1981. Т. 45. № 12. С. 2331–2335.

[2] *Берсон И.Я.* // ЖЭТФ. 1982. Т. 83. Вып. 4(10). С. 1276–1286.

[3] *Fedorov M.V., Movsecian A.M.* // J. Opt. Soc. Am. B. 1989. Vol. 6. N 5. P. 928–936.

[4] *Fedorov M.V., Movsecian A.M.* // J. Opt. Soc. Am. B. 1989. Vol. 6. N 8. P. 1504–1512.

[5] *Бакош И., Киш А., Начаева М.Л.* // Многофотонная ионизация атомов. Труды ФИАН. Т. 115. М.: Наука, 1980. С. 96.

[6] *Делоне Н.Б., Крайнов В.П., Шепелянский Д.Л.* // УФН. 1983. Т. 140. Вып. 3. С. 355–392.

[7] *Коварский В.А.* // ЖЭТФ. 1969. Т. 57. Вып. 6. С. 1969–1974.

[8] *Препелица О.Б.* // Опт. и спектр. 1996. Т. 81. Вып. 3. С. 377–382.

[9] *Келдыш Л.В.* // ЖЭТФ. 1964. Т. 47. Вып. 5(11). С. 1945–1957.

[10] *McPherson A., Gibson G., Jara H.* et al. // J. Opt. Soc. Am. B. 1987. Vol. 4. N 4. P. 595–601.

[11] *Ferray M., Huillier A.L., Li X.F.* et al. // J. Phys. B. 1988. Vol. 21. N 1. P. L31–L33.

[12] *Eberly J.H., Su Q., Jawainen J.* // Phys. Rev. Lett. 1989. Vol. 62. N 17. P. 1989–1992.

[13] *Corcum P.B.* // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 71. N 13. P. 1994–1997.

[14] *Huillier A.L., Balcou Ph.* // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 70. N 6. P. 774–777.
[15] *Lewenstein M., Balcou Ph., Ivanov M.* et al. // Phys. Rev. A. 1994. Vol. 49. N 3. P. 2117–2132.
[16] *Коварский В.А.* Многоквантовые переходы. Кишинев: Штиинца, 1974. С. 228.
[17] *Федоров М.В.* Электрон в сильном световом поле. М.: Наука, 1991. С. 223.
[18] *Зарецкий Д.Ф., Нерсесов Э.А.* // ЖЭТФ. 1993. Т. 103. Вып. 4. С. 1191–1203.
[19] *Baldini G.* // Phys. Rev. 1962. Vol. 128. N 5. P. 1562–1568.