

01;03

Устойчивость заряженной капли вязкой электропроводной жидкости в вязкой электропроводной среде

© С.О. Ширяева, А.И. Григорьев, Д.Ф. Белоножко

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия

(Поступило в Редакцию 3 ноября 1997 г. В окончательной редакции 2 марта 1998 г.)

Выведено дисперсионное уравнение для капиллярных колебаний заряженной электропроводной вязкой капли в электропроводной вязкой среде. Показано, что в анализируемой системе возможна реализация апериодической неустойчивости заряженной границы раздела сред с инкрементом, качественно различно зависящим от отношения удельных проводимостей сред в различных диапазонах его изменения. В некотором диапазоне отношения удельных проводимостей среды и капли последняя претерпевает колебательную неустойчивость.

Исследование электростатической неустойчивости заряженной капли вязкой жидкости, взвешенной в другой вязкой жидкости, представляет значительный интерес в связи с многочисленными приложениями, в которых фигурирует подобный объект: в технологии для равномерного перемешивания несмешивающихся жидкостей, в практике сжигания жидких топлив для смешивания топлива и окислителя, в геофизических экспериментах (см., например, [1–4] и указанную там литературу). Тем не менее многие вопросы, связанные с этой проблемой, до сих пор исследованы слабо из-за сложной техники экспериментов и трудоемкости теоретических выкладок. Сказанное относится и к влиянию конечности скорости перераспределения заряда в обеих жидкостях на закономерности реализации неустойчивости заряженной поверхности капель [5].

1. Рассмотрим систему, состоящую из двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей с плотностями $\rho^{(1)}$ и $\rho^{(2)}$ и кинетическими вязкостями $\nu^{(1)}$ и $\nu^{(2)}$. Из-за действия сил поверхностного натяжения, коэффициент которого обозначим через α , внутренняя жидкость, к которой отнесем индекс 1, примет форму сферической капли с радиусом R . Примем далее, что жидкость в капле обладает удельной проводимостью σ_1 и диэлектрической проницаемостью ϵ_1 , а внешняя среда является проводящей с характеристиками σ_2 , ϵ_2 . Пусть в центре капли находится сферический электрод радиуса $R_0 \ll R$, такой что его влияние на течения жидкости в капле пренебрежимо мало [6,7]. Потенциал электрода примем постоянным, равным φ_0 . И пусть между центральным сферическим электродом и сферическим же противоэлектродом, находящимся во внешней среде, удаленным на бесконечность и поддерживающимся при нулевом потенциале, течет постоянный ток, обеспечивающий накопление на границе раздела сред электрического заряда Q . Будем искать спектр капиллярных колебаний границы раздела.

В сферической системе координат r , Θ , φ с началом в центре невозмущенной капли уравнение границы раздела двух жидкостей имеет вид

$$r = R + \xi(\Theta, \varphi, t).$$

Математическая формулировка сформулированной задачи, линеаризованной в окрестности равновесного состояния, состоит из системы уравнений электрогидродинамики [8,9]

$$\frac{\partial \mathbf{u}^{(i)}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho^{(i)}} \nabla p^{(i)} + \nu^{(i)} \Delta \mathbf{u}^{(i)}; \quad i = 1, 2; \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^{(i)} = 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{j}_i = 0; \quad (2)$$

$$\mathbf{j}_i = \sigma_i \mathbf{E}_i, \quad \mathbf{E}_i = -\nabla \Phi_i, \quad (3)$$

граничных условий к ним

$$r = R_0 : \quad \Phi_1 = \varphi_0; \quad (4)$$

$$r = R + \xi : \quad u_\Theta^{(1)} = u_\Theta^{(2)}; \quad (5)$$

$$u_\varphi^{(1)} = u_\varphi^{(2)}; \quad (6)$$

$$u_r^{(1)} = u_r^{(2)} = \frac{\partial \xi}{\partial t}; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \Pi_{1\Theta} + \rho^{(1)} \nu^{(1)} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial \Theta} + \frac{\partial u_\Theta^{(1)}}{\partial r} - \frac{1}{r} u_\Theta^{(1)} \right] \\ & = \Pi_{2\Theta} + \rho^{(2)} \nu^{(2)} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(2)}}{\partial \Theta} + \frac{\partial u_\Theta^{(2)}}{\partial r} - \frac{1}{r} u_\Theta^{(2)} \right]; \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Pi_{1\varphi} + \rho^{(1)} \nu^{(1)} \left[\frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi^{(1)}}{\partial r} - \frac{1}{r} u_\varphi^{(1)} \right] \\ & = \Pi_{2\varphi} + \rho^{(2)} \nu^{(2)} \left[\frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial u_r^{(2)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi^{(2)}}{\partial r} - \frac{1}{r} u_\varphi^{(2)} \right]; \quad (9) \end{aligned}$$

$$-p^{(1)} + 2\rho^{(1)}\nu^{(1)}\frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} + p_\alpha - p_E$$

$$= -p^{(2)} + 2\rho^{(2)}\nu^{(2)}\frac{\partial u_r^{(2)}}{\partial r}; \quad (10)$$

$$\Phi_1 = \Phi_2; \quad (11)$$

$$\frac{\partial \varkappa}{\partial t} + \mathbf{n}(\sigma_2 \mathbf{E}_2 - \sigma_1 \mathbf{E}_1) + \operatorname{div}_\Sigma(\varkappa \mathbf{u}_\tau + \varkappa b \mathbf{E}_\tau - D_s \nabla \varkappa) = 0;$$

$$\varkappa = \frac{1}{4\pi} \mathbf{n}(\varepsilon_2 \mathbf{E}_2 - \varepsilon_1 \mathbf{E}_1). \quad (12)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \Phi_2 \rightarrow 0; \quad (13)$$

условия постоянства объемов жидкостей

$$\int_\Omega \xi(\Theta, \varphi, t) d\Omega = 0; \quad (14)$$

условия неподвижности центра масс системы

$$\int_\Omega \xi(\Theta, \varphi, t) \mathbf{e}_r d\Omega = 0, \quad (15)$$

где $\xi(\Theta, \varphi, t)$, $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, $p(\mathbf{r}, t)$ — возмущения формы границы раздела, поля скоростей и поля давлений соответственно; \varkappa — поверхностная плотность заряда на границе раздела; b и D_s — поверхностная подвижность и коэффициент поверхностной диффузии носителей заряда; $\operatorname{div}_\Sigma$ — поверхностная дивергенция [8]; $p_\alpha(\xi)$ — давление сил поверхностного натяжения

$$p_\alpha(\xi) = -\frac{\alpha}{R^2}(2 + \Delta_\Omega)\xi; \quad (16)$$

p_E — возмущение давления электрического поля P_E , связанное с капиллярной деформацией границы раздела; $\Pi_{i\Theta}$, $\Pi_{i\varphi}$ — электрические составляющие касательной компоненты тензоров напряжений, вызванные токами заряда, перераспределяющегося вследствие деформации границы раздела сред при тепловом капиллярном движении жидкости в обеих средах [9,10],

$$P_E = \frac{1}{8\pi}[\varepsilon_2 E_{2n}^2 - \varepsilon_1 E_{1n}^2] + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \frac{E_{2\tau}^2}{8\pi};$$

$$\Pi_{i\tau} = \frac{1}{4\pi} E_{in} E_{i\tau}; \quad i = 1; 2; \quad (17)$$

E_{in} и $E_{i\tau}$ — нормальные и касательные компоненты вектора напряженности электрического поля \mathbf{n} ; $\tau \equiv \mathbf{e}_\Theta$, \mathbf{e}_φ — взаимно ортогональные орты нормали и двух касательных к поверхности капли; Δ_Ω — угловая часть оператора Лапласа в сферической системе координат; $d\Omega$ — элемент телесного угла.

Решение проведем в безразмерных переменных, в которых $R = 1$, $\alpha = 1$ и $\rho^{(1)}$ или $\rho^{(2)} = 1$. При этом мы оставляем свободу выбора параметра обезразмеривания, имеющего размерность плотности. В дальнейших рассуждениях сохраним плотности обеих сред и решим,

какую из плотностей $\rho^{(1)}$ или $\rho^{(2)}$ полагать равной единице, получив конечные выражения. Все остальные величины (за которыми оставим прежние обозначения) будут выражены в единицах своих характерных значений.

2. Проведем теперь скаляризацию задачи, используя процедуру, подробно разобранную в [9,10]. Искомое поле скоростей $\mathbf{u}^{(i)}(\mathbf{r}, t)$ может быть разложено на сумму трех ортогональных полей, которые будем нумеровать индексом j , принимающим значения $j = 1; 2; 3$,

$$\mathbf{u}^{(i)}(\mathbf{r}, t) = \nabla \Psi_1(\mathbf{r}, t) + (\nabla \times \mathbf{r}) \Psi_2(\mathbf{r}, t)$$

$$+ ((\mathbf{r} \times \nabla) \times \nabla) \Psi_3(\mathbf{r}, t); \quad i = 1, 2, \quad (18)$$

где Ψ_j — скалярные поля.

Подставляя разложение (18) в условие несжимаемости (2), получим

$$\Delta \Psi_1^{(i)} = 0. \quad (19)$$

Подстановка разложения (18) в уравнение Навье–Стокса (1) позволяет получить три независимых уравнения

$$\frac{1}{\rho^{(i)}} p^{(i)} \delta_{1j} + \frac{\partial \Psi_j^{(i)}}{\partial t} - \nu^{(i)} \Delta \Psi_j^{(i)} = 0. \quad (20)$$

Учитывая (19), получим скалярный аналог уравнений (1), (2), который состоит из независимых уравнений для скалярных полей $\Psi_j^{(i)}$

$$\Delta \Psi_j^{(i)} - (1 - \delta_{1j}) \frac{1}{\nu^{(i)}} \frac{\partial \Psi_j^{(i)}}{\partial t} = 0 \quad (21)$$

и выражений для поля давлений $p^{(i)}$

$$p^{(i)} = -\rho^{(i)} \frac{\partial \Psi_1^{(i)}}{\partial t}. \quad (22)$$

Подставим теперь разложение (18) в граничные условия (5), (6) и после несложных математических преобразований получим

$$\left[\Psi_1^{(1)} + \frac{\partial}{\partial r} r \Psi_3^{(1)} \right] - \left[\Psi_1^{(2)} + \frac{\partial}{\partial r} r \Psi_3^{(2)} \right] = 0; \quad (23)$$

$$\Psi_2^{(1)} - \Psi_2^{(2)} = 0. \quad (24)$$

Аналогично получаем скалярный аналог граничных условий (8), (9)

$$\left[\frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} (\sin \Theta [\Pi_{1\Theta} - \Pi_{2\Theta}]) + \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\Pi_{1\varphi} - \Pi_{2\varphi}) \right]$$

$$+ \rho^{(1)} \nu^{(1)} \left[2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{\Psi_1^{(1)}}{r} + \frac{\partial^2 \Psi_3^{(1)}}{\partial r^2} - \frac{(2 + \Delta_\Omega)}{r^2} \Psi_3^{(1)} \right]$$

$$- \rho^{(2)} \nu^{(2)} \left[2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{\Psi_1^{(2)}}{r} + \frac{\partial^2 \Psi_3^{(2)}}{\partial r^2} - \frac{(2 + \Delta_\Omega)}{r^2} \Psi_3^{(2)} \right] = 0; \quad (25)$$

$$\left[\frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} [\Pi_{1\Theta} - \Pi_{2\Theta}] - \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sin \Theta [\Pi_{1\varphi} - \Pi_{2\varphi}]) \right] + \rho^{(1)} \nu^{(1)} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \frac{\Psi_2^{(1)}}{r} \right] - \rho^{(2)} \nu^{(2)} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \frac{\Psi_2^{(1)}}{r} \right] = 0. \quad (26)$$

Скалярные аналоги граничных условий (7), (10) получают сразу же после подстановки разложения (18) в выражения для поля давлений (22)

$$\frac{\partial \Psi_1^{(1)}}{\partial r} - \frac{1}{r} \Delta_{\Omega} \Psi_3^{(1)} = \frac{\partial \Psi_1^{(2)}}{\partial r} - \frac{1}{r} \Delta_{\Omega} \Psi_3^{(2)} = \frac{\partial \xi}{\partial t}; \quad (27)$$

$$\left[\rho^{(1)} \frac{\partial \Psi_1^{(1)}}{\partial t} + 2\rho^{(1)} \nu^{(1)} \frac{\partial^2 \Psi_1^{(1)}}{\partial r^2} - 2\rho^{(1)} \nu^{(1)} \Delta_{\Omega} \frac{\partial \Psi_3^{(1)}}{\partial r} \right] + p_{\alpha} - p_E = \left[\rho^{(2)} \frac{\partial \Psi_1^{(2)}}{\partial t} + 2\rho^{(2)} \nu^{(2)} \frac{\partial^2 \Psi_1^{(2)}}{\partial r^2} - 2\rho^{(2)} \nu^{(2)} \Delta_{\Omega} \frac{\partial \Psi_3^{(2)}}{\partial r} \right]. \quad (28)$$

Условие постоянства объема (14) остается без изменений, а из условия неподвижности центра масс (15) при подстановке в него разложения орта сферической системы координат \mathbf{e}_r по ортам декартовой системы получаем

$$\int_{\Omega} \xi Y_{1n} d\Omega = 0. \quad (29)$$

Из полученной системы видим, что поле Ψ_2 не оказывает влияния на изменение формы поверхности, так как задача его отыскания не зависит от Ψ_1 , Ψ_3 , ξ и оно не входит в уравнения для определения Ψ_1 , Ψ_3 , ξ .

3. Перейдем теперь к решению обычной скалярной краевой задачи. Решения уравнений (21) и функции ξ будем искать в виде разложений

$$\Psi_j^{(i)} = \sum_{m,n} \Psi_j^{(i)}(r) Y_{mn} \exp(St),$$

$$\xi = \sum_{m,n} Z Y_{mn} \exp(St), \quad (30)$$

где S — комплексная частота; $Y_{mn} \equiv Y_{mn}(\Theta, \varphi)$ — сферические функции; индекс m в общем случае принимает значения в интервале от нуля до бесконечности, а индекс n принимает значения от $-m$ до m .

Индексы n , m у величин $\Psi_j^{(i)}(r)$ и Z ради упрощения записи опустим. Из условий (14), (29) получим, что $m \neq 0$ и $m \neq 1$. Давление сил поверхностного натяжения (16) с учетом (30) примет вид

$$p_{\alpha} = \sum_{m,n} (m-1)(m+2) Z Y_{mn} \exp(St). \quad (31)$$

Подставим (30) в (21) и найдем уравнения для радиальных функций

$$\frac{d^2 \Psi_j^{(i)}(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d \Psi_j^{(i)}(r)}{dr} - \left[\frac{S}{\nu^{(i)}} (1 - \delta_{1j}) + \frac{m(m+1)}{r^2} \right] \Psi_j^{(i)}(r) = 0. \quad (32)$$

Подставляя (30), (31) в (23)–(28), получаем граничные условия для функций $\Psi_j^{(i)}(r)$

$$\left[\Psi_1^{(1)}(r) + \frac{\partial}{\partial r} r \Psi_3^{(1)}(r) \right] - \left[\Psi_1^{(2)}(r) + \frac{\partial}{\partial r} r \Psi_3^{(2)}(r) \right] = 0;$$

$$\int_{\Omega} \left[\frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} (\sin \Theta [\Pi_{1\Theta} - \Pi_{2\Theta}]) + \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\Pi_{1\varphi} - \Pi_{2\varphi}) \right] Y_{mn} d\Omega + \rho^{(1)} \nu^{(1)} \left[2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{\Psi_1^{(1)}(r)}{r} + \frac{\partial^2 \Psi_3^{(1)}(r)}{\partial r^2} + (m-1)(m+2) \Psi_3^{(1)}(r) \right] - \rho^{(2)} \nu^{(2)} \left[2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{\Psi_1^{(2)}(r)}{r} + \frac{\partial^2 \Psi_3^{(2)}(r)}{\partial r^2} + (m-1)(m+2) \Psi_3^{(2)}(r) \right] = 0;$$

$$\left[\frac{\partial \Psi_1^{(1)}(r)}{\partial r} + m(m+1) \Psi_3^{(1)}(r) \right]$$

$$- \left[\frac{\partial \Psi_1^{(2)}(r)}{\partial r} + m(m+1) \Psi_3^{(2)}(r) \right] = 0;$$

$$\frac{\partial \Psi_1^{(1)}(r)}{\partial r} + m(m+1) \Psi_3^{(1)}(r) - SZ = 0;$$

$$\rho^{(1)} \left[S \Psi_1^{(1)}(r) + 2\nu^{(1)} \frac{\partial^2 \Psi_1^{(1)}(r)}{\partial r^2} \right]$$

$$+ 2\nu^{(1)} m(m+1) \frac{\partial}{\partial r} \frac{\Psi_3^{(1)}(r)}{r} \left[\right]$$

$$- \rho^{(2)} \left[S \Psi_1^{(2)}(r) + 2\nu^{(2)} \frac{\partial^2 \Psi_1^{(2)}(r)}{\partial r^2} \right]$$

$$+ 2\nu^{(2)} m(m+1) \frac{\partial}{\partial r} \frac{\Psi_3^{(2)}(r)}{r} \left[\right]$$

$$+ (m-1)(m+2) Z - \int_{\Omega} P_E Y_{mn} d\Omega = 0;$$

$$\Psi_2^{(1)}(r) - \Psi_2^{(2)}(r) = 0;$$

$$\int_{\Omega} \left[\frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\Pi_{1\Theta} - \Pi_{2\Theta}) \right]$$

$$- \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} (\sin \Theta [\Pi_{1\varphi} - \Pi_{2\varphi}]) \left[\right] Y_{mn} d\Omega$$

$$+ \rho^{(1)} \nu^{(1)} \left[\frac{\partial}{\partial r} \frac{\Psi_2^{(1)}(r)}{r} \right] - \rho^{(2)} \nu^{(2)} \left[\frac{\partial}{\partial r} \frac{\Psi_2^{(2)}(r)}{r} \right] = 0. \quad (33)$$

Решения уравнений (32) имеют вид

$$\begin{aligned}\Psi_1^1(r) &= b_1 r^m; & \Psi_1^2(r) &= c_1 r^{-(m+1)}; \\ \Psi_2^1(r) &= b_2 \frac{i_m(x_1 r)}{i_m(x_1)}; & \Psi_2^2(r) &= c_2 \frac{k_m(x_2 r)}{k_m(x_2)}; \\ \Psi_3^1(r) &= b_3 \frac{i_m(x_1 r)}{i_m(x_1)}; & \Psi_3^2(r) &= c_3 \frac{k_m(x_2 r)}{k_m(x_2)},\end{aligned}\quad (34)$$

где $x_1 = \sqrt{S/\nu_1}$, $x_2 = \sqrt{S/\nu_2}$; $i_m(x)$ и $k_m(x)$ — модифицированные функции Бесселя первого и третьего рода; b_j и c_j — константы.

Решая электрическую часть задачи, уравнения (3) с граничными условиями (4), (11)–(13), возмущение давления электрического поля и электрические составляющие касательных компонент тензора напряжений (17) с учетом решений (34) представим в виде

$$p_E \approx -\frac{Q^2}{4\pi g_2^2} \sum_{m,n} \frac{1}{L_m} \left\{ g_4 Z - m(m+1)g_2 g_5 \right. \\ \left. \times \left[b_1 + \left(x_1 \frac{i_{m+1}(x_1)}{i_m(x_1)} + (m+1) \right) b_3 \right] \right\} Y_{mn} \exp(St);$$

$$\Pi_{1\Theta} - \Pi_{2\Theta} \approx \frac{Q_2(\sigma_2 - \sigma_1)}{4\pi g_2^2} \sum_{m,n} \frac{1}{L_m} \left\{ \eta_2 Z - m(m+1) \right. \\ \left. \times g_2(1 - R_0^{(2l+1)}) \left[b_1 + \left(x_1 \frac{i_{m+1}(x_1)}{i_m(x_1)} + (m+1) \right) b_3 \right] \right\} \\ \times \frac{\partial Y_{mn}}{\partial \Theta} \exp(St);$$

$$\Pi_{1\varphi} - \Pi_{2\varphi} \approx \frac{Q_2(\sigma_2 - \sigma_1)}{4\pi g_2^2} \sum_{m,n} \frac{1}{L_m} \left\{ \eta_2 Z - m(m+1) \right. \\ \left. \times g_2(1 - R_0^{(2l+1)}) \left[b_1 + \left(x_1 \frac{i_{m+1}(x_1)}{i_m(x_1)} + (m+1) \right) b_3 \right] \right\} \\ \times \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial Y_{mn}}{\partial \varphi} \exp(St);$$

$$Q \equiv \frac{\varphi_0 R_0 g_2}{[\sigma_1 R_0 + \sigma_2(1 - R_0)]}; \quad \lambda_i \equiv S\varepsilon_i + 4\pi\sigma_i;$$

$$\mu_i \equiv \lambda_i + m(m+1)D_s\varepsilon_i;$$

$$L_m(\sigma, \varepsilon, S) \equiv d(\mu_i) + m(m+1)Qb(1 - R_0^{(2m+1)});$$

$$d(\mu_j) \equiv \mu_1 m + \mu_2(m+1) + (\mu_1 - \mu_2)(m+1)R_0^{(2m+1)};$$

$$d(\varepsilon_j) \equiv \varepsilon_1 m + \varepsilon_2(m+1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(m+1)R_0^{(2m+1)};$$

$$d(\lambda_i) \equiv \lambda_1 m + \lambda_2(m+1) + (\lambda_1 - \lambda_2)(m+1)R_0^{(2m+1)};$$

$$g_1 \equiv (2\lambda_1 - \lambda_2(m+1))\sigma_2 + \lambda_2\sigma_1(m-1); \quad g_2 \equiv \varepsilon_2\sigma_1 - \varepsilon_1\sigma_2;$$

$$g_3 \equiv \sigma_2 d(\lambda_i) + g_1[1 - R_0^{(2m+1)}];$$

$$g_4 \equiv \varepsilon_2\sigma_1 \{ (m+1)\eta_3 - (m-1)\sigma_1 [d(\mu_i) + m(m+1) \\ \times Qb(1 - R_0^{(2m+1)})] \} + \varepsilon_1\sigma_2 \{ [m + (m+1)R_0^{(2m+1)}]\eta_1 \\ - 2\sigma_2 d(\mu_i) - \sigma_2 m(m+1)Qb[(m+2) + (m-1)R_0^{(2m+1)}] \};$$

$$g_5 \equiv [(m+1)\varepsilon_2\sigma_1 + m\varepsilon_1\sigma_2] - (m+1)g_2 R_0^{(2m+1)};$$

$$h_1 \equiv (2\varepsilon_1 - (m+1)\varepsilon_2) + \varepsilon_2\sigma_1(m-1);$$

$$h_2 \equiv h_1(1 - R_0^{(2m+1)}) + \sigma_2 d(\varepsilon_i);$$

$$\eta_1 \equiv g_1 + m(m+1)D_s h_1; \quad \eta_2 \equiv g_3 + m(m+1)D_s h_2; \quad (35)$$

Q — полный заряд раздела капли–среда в равновесном состоянии.

Подставим теперь решения для радиальных функций $\Psi_j^{(i)}(r)$ (34) в систему граничных условий (33). Учитывая (35) и воспользовавшись рекуррентными соотношениями для модифицированных сферических функций Бесселя

$$\frac{i'_m(x)}{i_m(x)} = \frac{i_{m+1}(x)}{i_m(x)} + \frac{m}{x};$$

$$\frac{i''_m(x)}{i_m(x)} = -\frac{2}{x} \frac{i_{m+1}(x)}{i_m(x)} + \left[1 + \frac{m(m-1)}{x^2} \right];$$

$$\frac{k'_m(x)}{k_m(x)} = -\frac{k_{m-1}(x)}{k_m(x)} - \frac{m+1}{x};$$

$$\frac{k''_m(x)}{k_m(x)} = \frac{2}{x} \frac{k_{m-1}(x)}{k_m(x)} + \left[1 + \frac{(m+1)(m+2)}{x^2} \right],$$

после преобразований получим однородную систему линейных уравнений относительно коэффициентов b_1 , c_1 , b_3 , c_3 , Z

$$b_1 + b_3 \left[x_1 \frac{i_{m+1}(x_1)}{i_m(x_1)} + (m+1) \right] - c_1 + c_3 \left[x_2 \frac{k_{m-1}(x_2)}{k_m(x_2)} + m \right] = 0;$$

$$\left[\rho^{(1)} \nu^{(1)} 2(m-1) - \frac{Q^2}{4\pi} \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)}{g_2} \frac{m(m+1)}{L_m} (1 - R_0^{(2m+1)}) \right] b_1$$

$$+ \left[\rho^{(1)} \nu^{(1)} \left\{ -2x_1 \frac{i_{m+1}(x_1)}{i_m(x_1)} + x_1^2 + 2(m-1)(m+1) \right\} \right.$$

$$\left. - \frac{Q^2}{4\pi} \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)}{g_2} \frac{m(m+1)}{L_m} (1 - R_0^{(2m+1)}) \left\{ x_1 \frac{i_{m+1}(x_1)}{i_m(x_1)} \right. \right.$$

$$\left. + (m+1) \right\} b_3 + \left\{ \frac{Q^2}{4\pi} \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)}{g_2^2} \frac{1}{L_m} \eta_2 \right\} Z$$

$$+ [\rho^{(2)} \nu^{(2)} 2(m+2)] c_1 - \rho^{(2)} \nu^{(2)}$$

$$\times \left[2x_2 \frac{k_{m-1}(x_2)}{k_m(x_2)} + x_2^2 + 2m(m+2) \right] c_3 = 0;$$

$$mb_1 + m(m+1)b_3 + (m+1)c_1 - m(m+1)c_3 = 0;$$

$$mb_1 + m(m+1)b_3 - SZ = 0;$$

$$\begin{aligned}
& \left(\rho^{(1)}(S + 2\nu^{(1)}m(m-1)) - \frac{Q^2}{4\pi g_2} \frac{1}{L_m} \frac{m(m+1)}{g_5} \right) b_1 \\
& + \left(2\rho^{(1)}\nu^{(1)}m(m+1) \left[x_1 \frac{i_{m+1}(x_1)}{i_m(x_1)} + (m-1) \right] \right. \\
& - \left. \frac{Q^2}{4\pi g_2} \frac{1}{L_m} \frac{m(m+1)}{g_5} \left\{ x_1 \frac{i_{m+1}(x_1)}{i_m(x_1)} + (m+1) \right\} \right) b_3 \\
& - \rho^{(2)}(S + 2\nu^{(2)}(m+1)(m+2))c_1 + 2\rho^{(2)} \\
& \times \nu^{(2)}m(m+1) \left[x_2 \frac{k_{m-1}(x_2)}{k_m(x_2)} + (m+2) \right] c_3 \\
& + \left[(m-1)(m+2) + \frac{Q^2}{4\pi g_2^2} \frac{1}{L_m} \frac{g_4}{g_5} \right] Z = 0.
\end{aligned}$$

Данная система имеет нетривиальное решение только в том случае, когда детерминант определителя, составленного из коэффициентов при неизвестных b_1 , c_1 , b_3 , c_3 , Z , равен нулю

$$\det a_{lk} = 0; \quad 1 \leq l, k \leq 5; \quad (36)$$

$$\begin{aligned}
a_{11} &= 1; \quad a_{12} = -1; \quad a_{13} = f_m^{(1)}(x_1) + (m+1); \\
a_{14} &= f_m^{(2)}(x_2) + m; \quad a_{15} = 0; \\
a_{21} &= 2(m-1)\rho^{(1)}\nu^{(1)} - \frac{Q^2}{4\pi} \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)}{g_2} \\
& \times \frac{(m(m+1))^2}{L_m} (1 - R_0^{(2m+1)}); \\
a_{22} &= 2(m+2)\rho^{(2)}\nu^{(2)}; \\
a_{23} &= \rho^{(1)}\nu^{(1)} [-2f_m^{(1)}(x_1) + x_1^2 + 2(m-1)(m+1)] \\
& - \frac{Q^2}{4\pi} \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)}{g_2} \frac{m(m+1)}{L_m} (1 - R_0^{(2m+1)}) \\
& \times \{f_m^{(1)}(x_1) + (m+1)\}; \\
a_{24} &= -\rho^{(2)}\nu^{(2)} [2f_m^{(2)}(x_2) + x_2^2 + 2m(m+2)]; \\
a_{25} &= \frac{Q^2}{4\pi} \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)}{g_2^2} \frac{1}{L_m} \eta_2; \quad a_{31} = m; \\
a_{32} &= (m+1); \quad a_{33} = m(m+1); \quad a_{34} = m(m+1); \\
a_{35} &= 0; \quad a_{41} = m; \quad a_{42} = 0; \\
a_{43} &= m(m+1); \quad a_{44} = 0; \quad a_{45} = -S; \\
a_{51} &= \rho^{(1)} [S + 2m(m-1)\nu^{(1)}] - \frac{Q^2}{4\pi g_2} \frac{1}{L_m} \frac{m(m+1)}{g_5}; \\
a_{52} &= -\rho^{(2)}S - 2(m+1)(m+2)\rho^{(2)}\nu^{(2)}; \\
a_{53} &= 2\rho^{(1)}\nu^{(1)}m(m+1) [f_m^{(1)}(x_1) + (m-1)] \\
& - \frac{Q^2}{4\pi g_2} \frac{1}{L_m} \frac{m(m+1)}{g_5} \{f_m^{(1)}(x_1) + (m+1)\};
\end{aligned}$$

$$a_{54} = \rho^{(2)}\nu^{(2)}2m(m+1) [f_m^{(2)}(x_2) + (m+2)];$$

$$a_{55} = (m-1)(m+2) + \frac{Q^2}{4\pi g_2^2} \frac{1}{L_m} \frac{g_4}{g_5};$$

$$f_m^{(1)}(x_1) \equiv x_1 \frac{i_{m+1}(x_1)}{i_m(x_1)}; \quad f_m^{(2)}(x_2) \equiv x_2 \frac{k_{m-1}(x_2)}{k_m(x_2)}.$$

4. Дисперсионное уравнение (36) анализировалось численно. В качестве характеристики интенсивности электрического поля (заряда капли) на границе раздела сред использовался параметр $W \equiv \varepsilon_2 \varphi_0^2 / 4\pi$, что при $\sigma_2 = 0$ совпадает с определением параметра Рэлея [6,11,12] $W \equiv Q^2 / 4\pi \varepsilon_2$.

Во всех расчетах значение радиуса внутрикапельного сферического электрода принималось одинаковым $R_0 = 0.1$. Согласно [6,7], наличие внутри капли твердого сферического ядра при $R_0 < 0.5$ весьма слабо влияет на характер реализующихся гидродинамических движений, что и обеспечивает приемлемость использованной при аналитическом выводе (36) модели.

Численными методами исследовалось поведение семейства зависимостей вещественной $\text{Re}S$ и мнимой $\text{Im}S$ компонент комплексной частоты от электропроводности внешней среды σ_2 при различных значениях диэлектрической проницаемости капли $10 \leq \varepsilon_1 \leq 80$. Зависимости, приведенные на рис. 1, a, b , получены при $n = 2$, $\varepsilon_2 = 2$. На рис. 2, $a-d$ аналогичные зависимости получены при $\varepsilon_2 = 4$.

Все расчеты проведены при закритическом по Рэлею значении параметра W : $W = 1.1 \cdot W_*$ ($W_* = n + 2$; $n = 2, 3, 4, \dots$ — номер моды) [4]. Безразмерные кинематические вязкости капли и внешней среды считались равными $\nu_1 = \nu_2 = \nu = 0.02$; внешняя среда полагалась гораздо менее плотной по сравнению с каплей $\rho^{(1)} = 1$, $\rho^{(2)} = 0.01$; во всех расчетах безразмерная электропроводность капли полагалась равной единице $\sigma_1 = 1$; кроме того, для подвижности носителей зарядов и коэффициента поверхностной диффузии принимались значения $b = 0.01$ и $D_s = 10^{-5}$ соответственно.

Согласно численным расчетам, полный набор ветвей дисперсионного уравнения бесконечен в связи с бесконечностью набора реализующихся вихревых полоидальных движений [11]. Расчеты же проводились с целью исследования неустойчивости капиллярных движений жидкости, которые не связаны с полоидальными вихрями [11]. Однако для полноты картины на зависимостях приведены все ветви дисперсионного уравнения, реализующиеся в заданной области изменения характерных физических параметров.

На зависимостях, показанных на рис. 1, a , наблюдается два типа апериодической неустойчивости. Апериодическая неустойчивость первого типа при $\varepsilon_1 = 40$ представлена ветвью I и характерна монотонным уменьшением с увеличением σ_2 величины инкремента от максимального значения, достигающегося при $\sigma_2 = 0$ и соответствующего величине инкремента рэлеевской неустойчивости, до нуля при $\sigma_2 = 0.005$. При вариации ε_1 в диапазоне $10 \leq \varepsilon_1 \leq 80$ изменения в поведении ветви I лежат

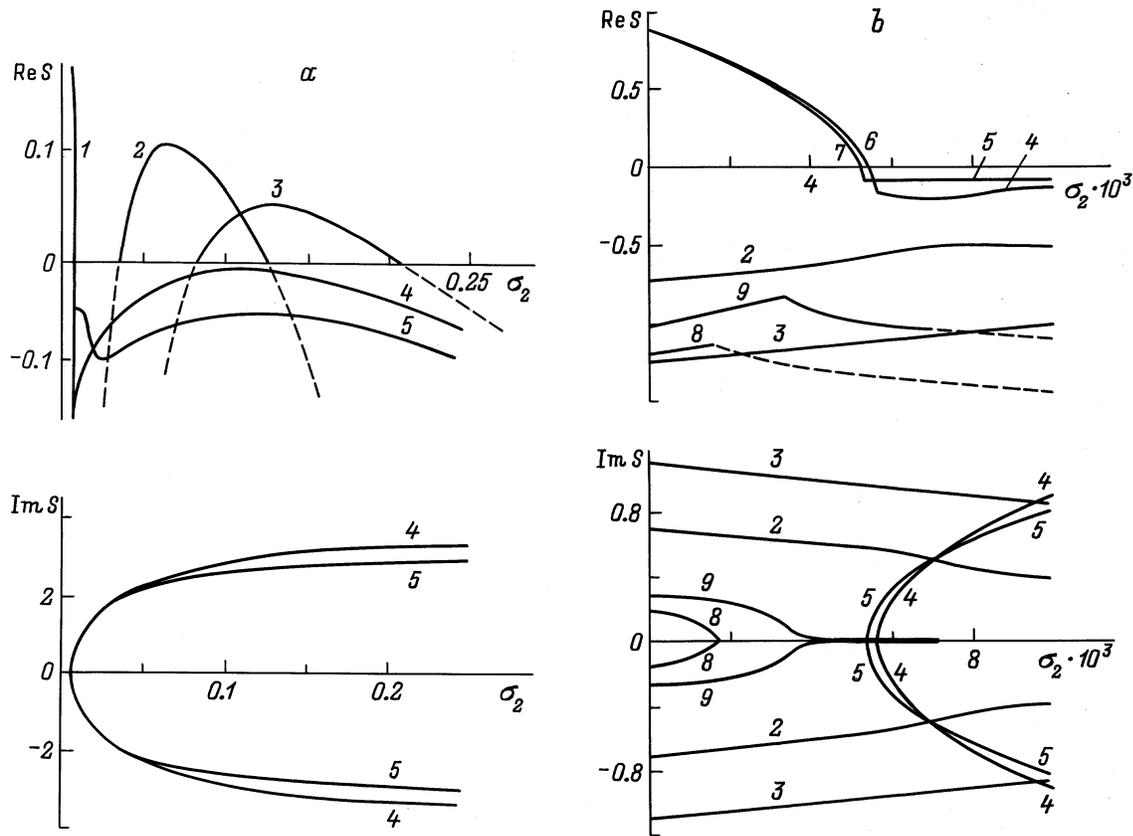


Рис. 1. *a* — зависимости вещественной и мнимой компонент безразмерной комплексной частоты капиллярных движений жидкости от безразмерной удельной проводимости внешней среды: в пределах толщины линии кривой 1 лежит ветвь, соответствующая $\varepsilon_1 = 80$, при $\varepsilon_1 = 80$ дополнительно наблюдаются ветвь 2 аperiodической неустойчивости второго типа и ветвь 4 затухающих колебательных движений; при $\varepsilon_1 = 40$ наблюдаются ветвь 3 аperiodической неустойчивости второго типа и ветвь 5 затухающих колебательных движений; *b* — часть рис. 1, *a* в окрестности начала координат: ветви 2–5 характеризуют поведение одноименных с рис. 1, *a* ветвей; 6 и 7 в отличие от рис. 1, *a* разделяются на две отдельные кривые; 8 и 9 — полоидальные вихревые движения при $\varepsilon_1 = 80$ и 40 соответственно.

в пределах толщины линии, представляющей данную кривую на рис. 1, *a*.

Неустойчивость второго типа проиллюстрирована ветвями 2 ($\varepsilon_1 = 80$) и 3 ($\varepsilon_1 = 40$). Она наблюдается в области $\sigma_2 > 0.005$ и характерна тем, что ее инкремент с ростом σ_2 увеличивается, достигает максимума и при дальнейшем росте σ_2 уменьшается до нуля. Каждому значению ε_1 из интервала $[40; 80]$ взаимно однозначно соответствует кривая однопараметрического семейства, образуемого непрерывным отображением ветви 2 в ветвь 3 при уменьшении ε_1 от 80 до 40. Подобный характер зависимостей при непрерывном изменении ε_1 внутри интервала, ограниченного значениями ε_1 , для которых приведен рисунок ветвей, в дальнейшем будем называть промежуточным (относительно ветвей 2 и 3). Из рис. 1, *a* видно, что инкремент неустойчивости определен на некотором интервале значений σ_2 , не содержащем $\sigma_2 = 0$; достигает на этом интервале максимума и убывает до нуля. Величина максимума и ширина интервала, в пределах которого наблюдается неустойчивость, существенно уменьшаются при уменьшении ε_1 .

Положение максимума при этом смещается вправо. При $10 \leq \varepsilon_1 < 40$ аperiodическая неустойчивость второго типа не наблюдается, а соответствующая ветвь лежит на нижнем листе римановой поверхности (РП), на которой определено дисперсионное уравнение (36), везде, за исключением малой области $\sigma_2 \subset [0; 0, 02]$, в пределах которой для этой ветви выполняется условие $Re S < 0$. Соответствующие кривые не показаны на рис. 1, *a*, чтобы не загромождать рисунок. Таким образом, характеристики неустойчивости второго типа существенно зависят от электрических свойств среды.

Во всех рассмотренных случаях ветви 1 сопутствует ветвь дисперсионного уравнения, определенная на нижнем листе РП, которая совпадает с ветвью 1, по крайней мере с точностью до толщины изображающей линии. При увеличении σ_2 продолжения ветви 1 и сопровождающей ее ветви нижнего листа в область $Re S < 0$ ограничиваются точкой ветвления, из которой развивается ветвь колебательного движения — ветви 4 и 5 на рис. 1, *a*. Ветви 4 соответствует $\varepsilon_1 = 80$, а ветви 5 — $\varepsilon_1 = 40$. При ε_1 , принимающем значения

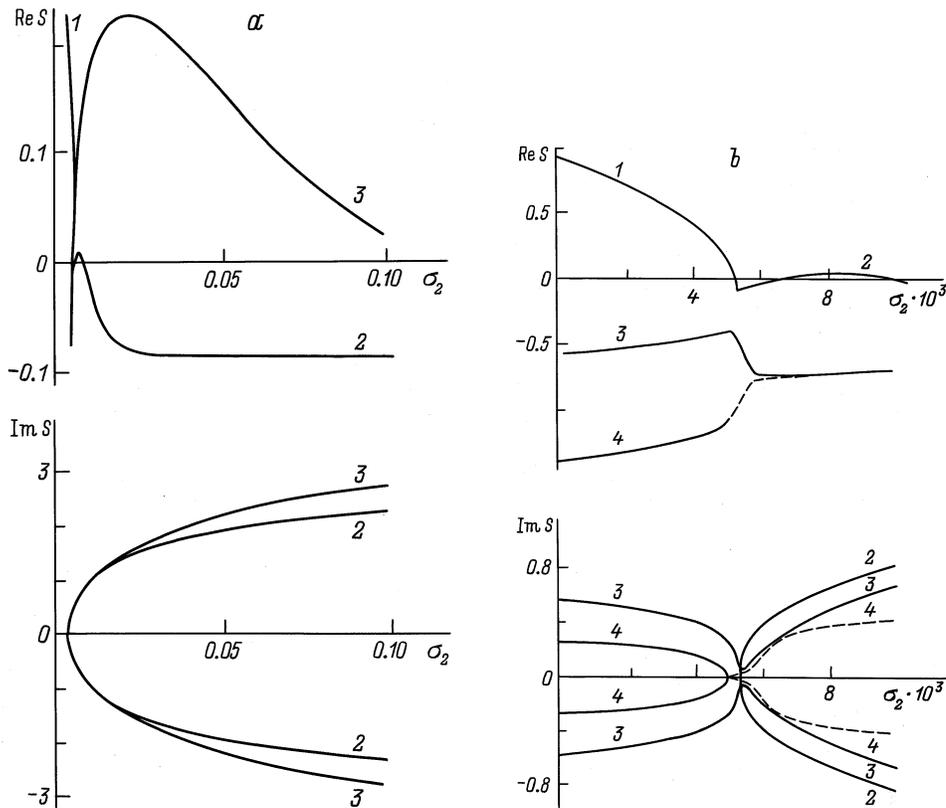


Рис. 2. *a* — то же, что на рис. 1, *a*, при $\varepsilon_2 = 4$; *b* — поведение в окрестности начала координат ветвей рис. 2, *a*, рассчитанных для $\varepsilon_1 = 80$: 2 и 3 — затухающие колебательные движения; *c* — поведение в окрестности начала координат ветвей дисперсионного уравнения, рассчитанных при $\varepsilon_1 = 70$ (3, 4) и 60 (5, 6); *d* — поведение в окрестности начала координат ветвей рис. 2, *a* при $\varepsilon_1 = 10$: 5 и 6 — затухающие колебательные движения.

из диапазона $40 < \varepsilon_1 < 80$, характер поведения соответствующих ветвей качественно такой же, а сами ветви занимают положения между кривыми 4 и 5. Частота колебательных движений слабо растет с увеличением ε_1 и быстро увеличивается с ростом σ_2 . Декремент затухания колебательного движения увеличивается с ростом ε_1 при значениях σ_2 из окрестности точки ветвления. По мере увеличения σ_2 декремент затухания периодических движений заметно уменьшается с ростом ε_1 и проходит через минимум при $\sigma_2 \approx 0.1$. В диапазоне $10 \leq \varepsilon_1 < 40$ ветвь, характер зависимости которой от σ_2 аналогичен поведению ветвей 4 и 5, слабо отличается от ветви 5 и на рис. 1, *a* не приведена.

На рис. 1, *b* в более крупном масштабе построена левая часть рис. 1, *a*. При этом ветвь 1 разделяется в окрестности ее правого конца на две, обозначенные номерами 6 ($\varepsilon_1 = 80$) и 7 ($\varepsilon_1 = 40$). Расчеты показали, что вариация ε_1 в пределах $10 < \varepsilon_1 < 80$ не сказывается заметно на величине инкремента апериодической неустойчивости первого типа. Выяснилось, что движения, соответствующие ветвям 2 ($\varepsilon_1 = 80$) и 3 ($\varepsilon_1 = 40$), в области малых значений σ_2 имеют затухающий колебательный характер. Причем с ростом σ_2 декременты затухания уменьшаются до значений ≈ 0.02 и переходят на нижний лист РП. Дальнейшее

увеличение σ_2 приводит каждую из ветвей 2 и 3 к точке ветвления, являющейся началом одноименной ветви апериодической неустойчивости (рис. 1, *a*), сопровождаемой апериодической ветвью на нижнем листе РП (эта ветвь совпадает с кривой первого листа с точностью до толщины линии). При уменьшении ε_1 от 80 до 40 частота и декремент затухания обсуждаемых движений увеличиваются от значений, определяемых ветвью 2, до значений, соответствующих ветви 3. Кроме перечисленных на рис. 1, *b* имеются ветви колебательных движений 8 (при $\varepsilon_1 = 80$) и 9 (при $\varepsilon_1 = 40$), описывающие вихревые полоидальные движения. Согласно рис. 1, *b*, уменьшение ε_1 от 80 до 40 влечет расширение вправо интервала значений σ_2 , при которых соответствующие движения наблюдаемы. При $10 \leq \varepsilon_1 < 40$ конфигурация ветвей анализируемых движений мало отличается от рисунка, соответствующего значению $\varepsilon_1 = 40$. Значениям $40 \leq \varepsilon_1 \leq 80$ соответствуют ветви с промежуточным характером поведения относительно ветвей 2 и 3; 4 и 5; 6 и 7; 8 и 9.

В отличие от рис. 1, *a* зависимости, представленные на рис. 2, *a*, получены при другом значении диэлектрической проницаемости внешней среды $\varepsilon_2 = 4$. Ветвь 1 имеет тот же смысл и обнаруживает такое же поведение, что и одноименная ветвь на рис. 1, *a*. Однако имеются

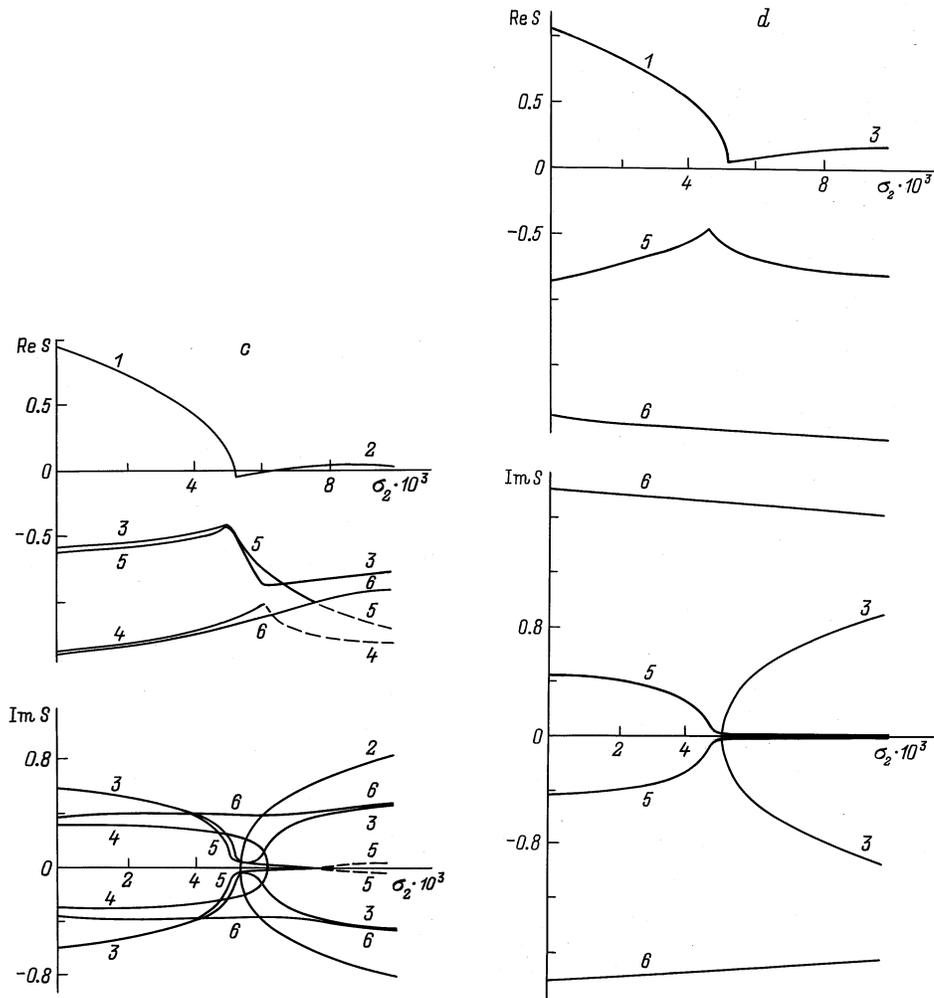


Рис. 2 (продолжение).

принципиальные отличия. Аперриодическая неустойчивость второго типа не наблюдается, так как соответствующие ветви лежат на нижнем листе РП и на рис. 2, *a* не представлены. В то же время порождаемое в точке ветвления ветви 1 колебательное движение (обозначенное на рис. 2, *a* цифрой 2 для $\varepsilon_1 = 80$ и 3 для $\varepsilon_1 = 10$) с увеличением значения σ_2 до $\sigma_2 \approx 0.01$ становится неустойчивым. Таким образом, из рис. 2, *a* видно, что при $\varepsilon_2 = 4$ и $10 \leq \varepsilon_1 \leq 80$ в некотором интервале значений σ_2 , не содержащем $\sigma_2 = 0$, наблюдается колебательная неустойчивость с инкрементом, достигающим на этом интервале максимума. Значение максимума и ширина интервала значений σ_2 , на котором реализуется колебательная неустойчивость, существенно уменьшаются с увеличением ε_1 в противоположность аперриодической неустойчивости второго типа с рис. 1, *a*. Положение максимума с увеличением ε_1 смещается влево. Частота же слабо изменяется при вариации ε_1 .

Для описания поведения ветвей дисперсионного уравнения при малых значениях σ_2 (в левой части рис. 2, *a*) в диапазоне изменения $10 \leq \varepsilon_1 \leq 80$ недостаточно рассмо-

треть лишь крайние ситуации $\varepsilon_1 = 10$ и 80. Поэтому на рис. 2, *b* приведена конфигурация ветвей, рассчитанная для значения $\varepsilon_1 = 80$; на рис. 2, *c* — для $\varepsilon_1 = 70$ и 60, а на рис. 2, *d* — для $\varepsilon_1 = 10$. Из рис. 2, *b* видно, что в используемом масштабе кроме неустойчивых ветвей 1 и 2 на верхнем листе имеются ветви двух колебательных движений 3 и 4. Согласно численным расчетам, ветвь 3 переходит на нижний лист РП при $\sigma_2 \gtrsim 0.005$, ветвь 4 — при $\sigma_2 \geq 0.005$. На рис. 2 *c* для кривых 3 и 4 сохранена прежняя нумерация при значении $\varepsilon_1 = 70$ (неустойчивые ветви снова описываются кривыми 1 и 2). На том же рисунке приведены результаты расчетов при $\varepsilon_1 = 60$, причем ветви, связанные с неустойчивостью, с точностью до толщины изображаемой линии соответствуют ветвям 1 и 2. Ветви 5 и 6 образованы при перезамыкании ветвей 3 и 4 с уменьшением ε_1 от 70 до 60. Ветвь 6 переходит на нижний лист РП при $\sigma_2 \gtrsim 0.08$, а ветвь 5 — при $\sigma_2 > 0.008$. Дальнейшая эволюция ветвей 5 и 6 с уменьшением ε_1 до значения $\varepsilon_1 = 10$ сводится к непрерывному увеличению инкрементов неустойчивости и частот движения 6 и к расширению вправо интер-

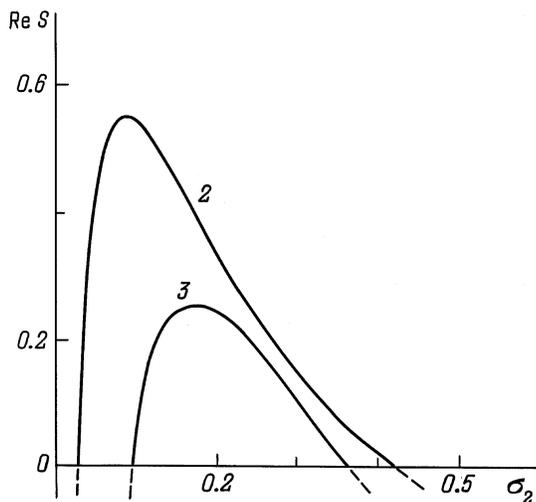


Рис. 3. Части ветвей, связанных с апериодической неустойчивостью второго типа, для $n = 4$: $\varepsilon_1 = 80$ (2), 30 (3).

вала значений σ_2 , на котором определено движение 5. На рис. 2, *d* приведены соответствующие зависимости, рассчитанные при $\varepsilon_1 = 10$. При $\sigma_2 \gtrsim 0.005$ частота движений, описываемых ветвью 5, значительно меньше значения соответствующего декремента затухания, что позволяет считать движение апериодически затухающим. Согласно численным расчетам, при $\varepsilon_1 = 10$ ветвь 5 уходит с первого листа РП при $\sigma_2 \gtrsim 0.04$, а ветвь 6 — при $\sigma_2 \gtrsim 0.4$. Значениям $10 \leq \varepsilon_1 \leq 60$ соответствуют ветви с промежуточным характером поведения относительно одноименных ветвей на рис. 2, *c* и *d*.

Рис. 1, *a, b* и рис. 2, *a–d* показывают, что при отличной от нуля проводимости внешней среды кроме рэлеевской наблюдается еще один тип неустойчивости. Ее характер существенно зависит от диэлектрических свойств внешней среды. Так, при изменении ε_2 от 2 до 4 неустойчивость изменяет апериодическое поведение на колебательное. При этом если для апериодического поведения характерно увеличение инкремента неустойчивости с ростом ε_1 , то инкремент колебательной неустойчивости существенно уменьшается с ростом ε_1 . В обоих случаях нерэлеевская неустойчивость обнаружена при закритическом значении параметра W и существует на некотором интервале значений σ_2 , не содержащем $\sigma_2 = 0$. При $\sigma_2 > 0.25$ во всех проанализированных ситуациях неустойчивости не наблюдалось. Расчеты показывают, что увеличение ε_2 приводит также к усложнению спектра затухающих полоидальных колебаний, реализующихся вместе с неустойчивыми движениями. В отличие от случая $\varepsilon_2 = 2$ при $\varepsilon_2 = 4$ вариация ε_1 приводит к переадресации некоторых ветвей полоидальных колебаний.

Зависимости, аналогичные рассмотренным, можно получить для других мод. На рис. 3 представлена неустойчивая часть ветвей, связанных с апериодической неустойчивостью второго типа, когда $n = 4$. Ветвь 2 построена при $\varepsilon_1 = 80$, а ветвь 3 — при $\varepsilon_1 = 30$. Уже при $\varepsilon_1 = 20$

рассматриваемая неустойчивость не наблюдается. Расчеты показывают, что при увеличении номера моды инкремент неустойчивости второго типа увеличивается и существенно расширяется диапазон значений σ_2 и ε_1 , в пределах которого данная неустойчивость существует. Сравнение рис. 1, *a* и рис. 3 иллюстрирует этот факт. Выяснилось, что инкремент рэлеевской неустойчивости для $n = 4$ быстро уменьшается до нуля при увеличении σ_2 до ≈ 0.005 , слабо зависит от значения ε_1 и в масштабе рис. 3 сливается с осью $\text{Re}S$. Качественно же ветви дисперсионного уравнения при $n = 4$ ведут себя аналогично ветвям, рассмотренным на рис. 1, *a, b*.

Заключение

Заряженная капля электропроводной жидкости в электропроводной среде способна претерпевать неустойчивости нескольких типов: две апериодические, рэлеевского типа [12] (инкременты которых по-разному зависят от удельной электропроводности внешней среды) и колебательную неустойчивость. Колебательная неустойчивость связана с опережением по фазе (вследствие конечности скорости перераспределения заряда при капиллярных колебаниях) положения максимума давления электрического поля по сравнению с максимумами соответствующих капиллярных волн. При любом конкретном значении σ_2 возможна реализация неустойчивости только одного вида.

Список литературы

- [1] Vaily A.G. // *Sci. Prog. Oxf.* 1974. Vol. 61. P. 555–581.
- [2] Коженков В.И., Фукс Н.А. // *Успехи химии.* 1976. Т. 45. № 12. С. 2274–2284.
- [3] Григорьев А.И., Сыщиков Ю.В., Ширяева С.О. // *ЖПХ.* 1989. Т. 62. № 9. С. 2020–2026.
- [4] Григорьев А.И., Ширяева С.О. *Изв. РАН МЖГ.* 1994. № 3. С. 3–22.
- [5] Григорьев А.И., Белоножко Д.Ф., Ширяева С.О., Шуклин С.И. // *Письма в ЖТФ.* 1997. Т. 23. Вып. 16. С. 38–41.
- [6] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Коромыслов В.А., Муничев М.И. // *Письма в ЖТФ.* 1996. Т. 22. Вып. 10. С. 23–29.
- [7] Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Ширяева С.О. // *ЖТФ.* 1997. Т. 67. Вып. 9. С. 8–13.
- [8] Melcher J.R., Smith C.V. // *Phys. Fluids.* 1969. Vol. 12. N 4. P. 778–790.
- [9] Григорьев А.И., Лазарянец А.Э. // *ЖТФ.* 1993. Т. 63. Вып. 10. С. 12–19.
- [10] Ширяева С.О., Лазарянец А.Э., Григорьев А.И. и др. *Препринт ИМРАН. Ярославль,* 1994. № 27. 126 с.
- [11] Ширяева С.О., Муничев М.И., Григорьев А.И. // *ЖТФ.* 1996. Т. 66. Вып. 7. С. 1–8.
- [12] Rayleigh Lord (Strett J.V.) // *Phil. Mag.* 1982. Vol. 14. P. 184–186.