

## К теории распада жидкой струи на капли

© С.К. Асланов

Одесский государственный университет им. И.И. Мечникова,  
270026 Одесса, Украина

(Поступило в Редакцию 19 октября 1998 г.)

На основе уравнений баланса массы и энергии построена теория для приближенного описания распада на капли тонкой струи жидкости, истекающей из отверстия. Главное внимание уделено действию сил поверхностного натяжения. Произведенный математический анализ позволяет однозначно оценить относительную величину среднего диаметра образующихся капель и расстояний между ними в хорошем согласии с известными результатами экспериментальных наблюдений и значением длины волны Рэлея из линейной теории неустойчивости струи.

Тонкая струя жидкости, истекающей под давлением сквозь круглое отверстие, даже при небольших скоростях распадается в окружающей атмосфере на капли, что находит широкое применение в технической практике. Пренебрегая эффектами вязкости, сжимаемости и тяжести (когда возможно), Рэлей [1] объяснил это явление неустойчивостью образующегося жидкого цилиндрического тела, главным источником развития которой служат силы поверхностного натяжения. Их действие приводит к прогрессивному нарастанию случайного локального уменьшения диаметра струи относительно своего среднего значения  $2a$ , что сопровождается соответствующим вытеснением жидкости и образованием соседних утолщений струи. В результате формируется регулярное чередование пережатий и разбуханий первоначально равновесной круговой цилиндрической конфигурации жидкого столба. Утоньшенные участки, постепенно вытягиваясь в длину, разрываются с образованием мелких капелек, а утолщенные превращаются в большие (основные) капли, разделенные одинаковыми промежутками и подвергающиеся деформационным пульсациям. С позиций линейного анализа малых осесимметричных возмущений струи  $\sim F(r) \cdot \exp(ikz + \omega t)$ ,  $\lambda = 2\pi/k$  было показано [1], что максимальному темпу их нарастания отвечает длина волны  $\lambda_* = 4.51 \cdot (2a)$ .

В настоящей работе сделана попытка аналитического расчета самого процесса регулярного распада струи, позволившая определить величину  $2R$  диаметра образующихся капель, которая количественно согласуется с известными экспериментальными наблюдениями [2], а также величину расстояний  $L$  между каплями, близкую к  $\lambda_*$ . Поскольку своего наибольшего развития гидродинамическая неустойчивость столба истекающей жидкости будет достигать на его конце, то рассмотрим процесс отрыва капли, образующейся на последнем из повторяющихся по длине струи циклов пережатия–разбухания, который заштрихован на рис. 1 (сплошными линиями схематически показана равновесная конфигурация струи, а штриховыми — ее возмущенное состояние). Считая такой процесс регулярным, применим к этому контрольному объему уравнения баланса массы

и энергии. Жидкость предполагается несжимаемой и невязкой, так что для небольших скоростей истечения, близкого к горизонтальному, главное внимание можно сосредоточить на действии сил поверхностного натяжения. На нелинейной стадии развития волнообразных осесимметричных отклонений поверхности струи от первоначальной цилиндрической в среднем формы следует ожидать появления разницы  $\Delta l$  в длине участков ее пережатия и разбухания ( $l$ ). С точностью до мелких промежуточных капелек  $K$ , образующихся при разрыве перемычки, общая исходная масса последнего цикла струи пойдет на формирование основной отрывающейся капли диаметра  $2R$ , представленной на рис. 2. После этого под влиянием поверхностного натяжения оставшийся конец струи  $AB$  опять примет первоначально предполагаемую полусферическую форму. В результате баланс массы запишется в виде

$$(2l + \Delta l)\pi a^2 = (4/3)\pi R^3. \quad (1)$$

Энергия, приобретенная за счет суммарной работы сил поверхностного натяжения по пережатию струи на всем участке  $ABCD$ , будет затрачиваться на работу образования основной капли, т. е. ее разбухания от исходного диаметра  $2a$  до окончательного  $2R$  за счет притока вытесненной жидкости. Локальное напряжение поверхностного натяжения  $\sigma_r = \sigma/r$  на цилиндре радиуса  $r$  порождает для промежутка  $BC$  полного схлопывания (разрыва) перемычки струи (рис. 2) силу, постоянную в течение всего промежутка стягивания, так что величина соответ-

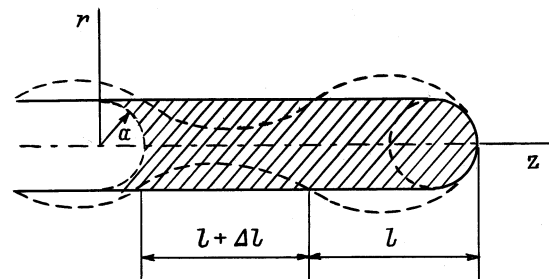


Рис. 1.

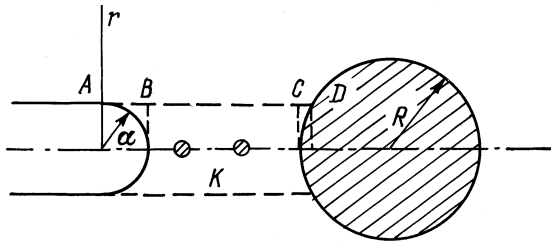


Рис. 2.

ствующей работы выразится  $W_1 = 2\pi\sigma a(l + \Delta l)$ . На участке  $AB$  окончания рассматриваемого цикла величина работы вытеснения жидкости выразится интегралом.

$$W_2 = 2\pi\sigma \int_0^a (a - \sqrt{a^2 - x^2}) dx = 2\pi\sigma \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) a^2.$$

На участке  $CD$  вытеснение жидкости будет происходить вплоть до поверхности формирующейся капли, так что величина соответствующей работы представляется аналогично

$$\begin{aligned} W_3 &= 2\pi\sigma \int_{-R}^{-\sqrt{R^2 - a^2}} (a - \sqrt{R^2 - x^2}) dx \\ &= 2\pi\sigma \left\{ a \left( R - \sqrt{R^2 - a^2} \right) + \frac{1}{2} \left[ a\sqrt{R^2 - a^2} - R^2 \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{1 - (a/R)^2} \right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

если отсчет координаты  $x$  производить от центра капли. Локальное поверхностное напряжение на сфере  $2\sigma_r$  приводит к следующей величине работы разрастания капли:

$$W_4 = \int_a^R 2\sigma_r \cdot 4\pi r^2 dr = 4\pi\sigma(R^2 - a^2).$$

В результате обсуждаемый баланс энергии с точностью до осевой деформации капли запишется в виде  $W_1 + W_2 + W_3 = W_4$ . Исключая из последнего  $b = l/R$  с помощью (1), получим уравнение для определения  $\eta$

$$f(\eta, \varepsilon) = 0; \quad q = 1 + (1 + 1/\varepsilon)^{-1};$$

$$\eta = a/R; \quad \varepsilon = \Delta l/2l;$$

$$f(\eta, \varepsilon) = \left(3 - \frac{\pi}{4}\right) \eta^3 + \eta^2$$

$$+ \frac{\eta}{2} \left( \arcsin \sqrt{1 - \eta^2} - \eta\sqrt{1 - \eta^2} - 4 - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{2}{3}q. \quad (2)$$

Так как экспериментальные наблюдения [2] свидетельствуют об относительной вытянутости ( $\Delta l > 0$ ) участка пережатия струи, для параметра  $\varepsilon$  допустимы исключительно положительные значения  $\varepsilon > 0$  ( $q > 1$ ),

т. е.  $\varepsilon = 0$  ограничивает снизу возможное расположение кривой  $\xi = f(\eta, \varepsilon)$  на плоскости  $(\eta, \xi)$ . В последнем случае она принимает минимальное ( $f_\eta = 0, f_{\eta\eta} > 0$ ) значение  $\xi_m = f(\eta_*, 0) \cong -0.05$  при  $\eta = \eta_* \cong 0.53$ , так что условие  $\xi > \xi_m$  остается справедливым для любого  $\varepsilon > 0$ . Вследствие численной малости величины  $\xi_m$  сравнительно со значениями  $\xi > 2/3$  на концах пригодного интервала  $0 < \eta < 1$  изменения  $\eta$ , уравнение (2) имеет два близких корня, которые сливаются в  $\eta = \eta_*$ , когда минимум кривой  $\xi = f(\eta, \varepsilon)$  в предельном случае  $\varepsilon = \varepsilon_*$  попадает непосредственно на ось  $\xi = 0$ , и одновременное выполнение  $f = f_\eta = 0$  определяет  $\eta = \eta_* \cong 0.53, \varepsilon_* \cong 0.081$  ( $q = q_* \cong 1.075$ ).

Если учесть эффект образования мелких промежуточных капелек при разрыве перемычки струи, то к правой части уравнения баланса массы (1) следует добавить величину их объема. Последнее повлечет за собой некоторое возрастание значения  $q(\varepsilon)$  и соответственно общий подъем кривых  $\xi = f(\eta, \varepsilon)$  над нижней границей  $\xi_m < 0$ . Поэтому преимуществом реализации будет обладать узкая окрестность параметра  $\varepsilon \leq \varepsilon_*$  вблизи его предельного значения  $\varepsilon = \varepsilon_*$  ( $q = q_*$ ), которое может быть использовано в качестве оценки величины среднего размера образующихся капелек. Полученное в результате этого значение их диаметра  $2R = 2a/\eta_* \cong 1.89 \cdot 2a$  хорошо согласуется с известными результатами экспериментальных наблюдений для тонких струй слабовязких жидкостей [2]. По найденным значениям  $\eta_*, \varepsilon_*$  из уравнения (1) определяется  $b = b_* \cong 2.167$ , позволяющее оценить среднее расстояние между основными каплями распадающейся струи

$$L = 2l + \Delta l = \frac{b_*}{\eta_*} (1 + \varepsilon_*) \cdot 2a \cong 4.42 \cdot 2a,$$

что также отвечает этим эксперимента и близко вышеприведенной длине волны  $\lambda_*$ .

## Список литературы

- [1] Lord Rayleigh. // Proc. Lond. Math. Soc. 1879. Vol. 10. P. 4–10.
- [2] Прандтль Л. Гидроаэромеханика. М.: ИЛ, 1949. 520 с.