01;03

Об устойчивости по отношению к радиальным возмущениям заряженного пузыря в диэлектрической жидкости

© А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет

Поступило в Редакцию 3 июня 1998 г.

Показано, что критические условия реализации неустойчивости заряженного парогазового пузыря в диэлектрической жидкости по отношению к виртуальным радиально-симметричным возмущениям объема существенно ниже критических условий его неустойчивости по отношению к виртуальным искажениям формы.

Исследование устойчивости заряженных пузырей в жидких диэлектриках представляет интерес в связи с многочисленными геофизическими, техническими и технологическими задачами: от электрического пробоя жидких диэлектриков до гидродинамической кавитации и флотации [1–5]. Тем не менее эта проблема пока находится в начальной стадии теоретического осмысления.

Пусть в жидком диэлектрике с диэлектрической проницаемостью ε имеется сферический пузырь радиуса R_0 с идеально проводящей (за счет большой поверхностной подвижности носителей заряда) поверхностью, подверженной действию капиллярных сил с коэффициентом поверхностного натяжения границы раздела фаз δ и действию сил электрического поля собственного заряда пузыря Q. Для равновесного сферического пузыря должно выполняться условие баланса давлений на его стенках:

$$P = P_v + P_g - 2\delta/R_0 + Q^2/8\pi\varepsilon R_\nu^4, \tag{1}$$

где P — давление в жидкости, у поверхности пузыря; P_v — давление насыщенного пара окружающей жидкости в пузыре; P_g — давление газа в пузыре. В (1) третье слагаемое сперва описывает капиллярное давление под сферической поверхностью, а четвертое — давление поля собственного заряда.

Учтем, что газ и пар, заполняющие пузырь, в отличие от окружающей жидкости, принимаемой несжимаемой, хорошо сжимаемы, и рассмотрим устойчивость пузыря по отношению к виртуальным радиально-симметричным изменениям его объема. Подобные изменения объема могут быть связаны с радиально-симметричными движениями стенок пузыря, которые для маленьких пузырьков будут характеризоваться малыми характерными временами, превышающими, однако, характерное время выравнивания газового давления в пузырьке, определяемое по порядку величины отношением радиуса пузырька к скорости звука в парогазовой смеси, заполняющей пузырек. В таких условиях давление насыщенного пара P_v будем принимать постоянным, а газовое давление P_g будем считать изменяющимся по адиабатическому закону. Тогда соотношение (1) перепишется в виде

$$P = P_v + \left(P_0 - P_v + \frac{2\sigma}{R_0} - \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon R_0^4}\right) \cdot \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} - \frac{2\sigma}{R} + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon R^4}, \quad (1a)$$

γ — показатель адиабаты. Второе слагаемое справа описывает адиабатически изменяющееся давление газа в пузыре.

Движение вязкой жидкости, характеризуемой коэффициентом кинематической вязкости ν, в окрестности пузырька при радиально-симметричных движениях его стенок также будем считать радиально-симметричным, т.е. одномерным в сферической системе координат с началом в центре пузырька и, следовательно, потенциальным. Парогазовую смесь, заполняющую пузырек, будем считать в любой момент времени однородной в гидродинамическом и тепловом смысле. Тогда уравнение радиально-симметричных движений стенки сферического пузырька, получающееся из системы уравнений гидродинамики вязкой жидкости с соответствующими граничными условиями и с учетом сосотношения (1), запишется в виде

$$\ddot{R}R + 1.5\dot{R}^2 - \rho^{-1}\left(P_0 - P_v + \frac{2\sigma}{R_0} - \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon R_0^4}\right) \cdot \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma}$$
$$+ \frac{4\nu\dot{R}}{R} + \frac{2\sigma}{\rho R} - \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon R^4} + \frac{P_v - P}{\rho} = 0. \quad (2)$$

Точкой над R обозначена производная по времени: $\dot{R} \equiv \frac{dR}{dt}$; ρ — плотность жидкости.

В безразмерных переменных, в которых $\rho = 1$, $\sigma = 1$, $R_0 = 1$, уравнение (2) перепишется в виде

$$\ddot{X}X + 1.5\dot{X}^2 + \eta\dot{X}X^{-1} - \beta X^{-3\gamma} - WX^{-4} + X^{-1} - \beta_* = 0; \tag{3}$$

$$X = \frac{R}{R_0};\ \tau = \frac{t}{R_0^{3/2}}\left(\frac{2\sigma}{\rho}\right);\ \eta = 2\nu\left(\frac{2\rho}{\sigma R_0}\right)^{1/2};\ W = \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon R_0^3\sigma};$$

$$\beta_* = \frac{(P_v - P)R_0}{2\sigma};\quad \beta = \frac{R_0}{2\sigma}\left(P_0 - P_v + \frac{2\sigma}{R_0} - \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon R_0^4}\right),$$

P_0 — давление в жидкости в окрестности пузырька в начальный момент, определяемое атмосферным давлением над свободной поверхностью и гидростатическим давлением столба жидкости над пузырьком.

Уравнение (3) (как и (2)) нелинейно, в аналитическом виде не решается и должно интегрироваться численно. Однако некоторые выводы о движении стенок пузырька можно сделать и на основе качественного анализа.

Заменой $Y \equiv \dot{R}$ и переходом от t к новой независимой переменной X понизим порядок уравнения (3), приведя его к виду

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = \frac{1.5Y^2 + \eta YX^{-1} - \beta X^{-3\gamma} - WX^{-4} + X^{-1} - \beta_*}{-YX}. \tag{4}$$

Уравнение (4) имеет изолированную особую точку $X = X_*$; $Y = Y_* = 0$, где X_* является решением уравнения

$$\beta_* X^{3\gamma} - X^{3\gamma-1} + WX^{3\gamma-4} + \beta = 0.$$

X_* и Y_* характеризуют радиус и скорость движения стенок исследуемого пузырька.

Линеаризуем числитель и знаменатель уравнения (4) и составим характеристическое уравнение для особой точки, из анализа которого несложно получить, что в зависимости от физических параметров задачи особая точка может быть либо "седлом", и тогда пузырек неустойчив по отношению к виртуальным радиально-симметричным возмущениям его объема, либо "устойчивым узлом", и тогда пузырек устойчив. Зависимость между параметрами W, β и β_*, разделяющая устойчивые и неустойчивые состояния пузырька, имеет вид (при $\gamma = 4/3$):

$$W + \beta - 0.1055\beta_* = 0.$$

В реальных условиях, когда значение параметра β_*, характеризующего разность давления насыщенного пара и статического давления в окружающей пузырек жидкости, не намного отличается от единицы, критическое для реализации неустойчивости пузырька по отношению к виртуальным радиально-симметричным возмущениям его объема значение суммы параметров W и β примерно на порядок более слабо, чем соответствующее критическое значение для неустойчивости заряженного пузырька по отношению к сфероидальным искажениям равновесной сферической формы (при постоянном объеме), которое имеет вид [5]:

$$W + \beta \geqslant 1. \tag{5}$$

Тем не менее следует иметь в виду, что неустойчивость пузырька по отношению к изменению объема при $W + \beta \neq 0$ означает лишь, что состояние равновесия, определяемое значениями X_* и Y_*, неустойчиво и что пузырек в результате реализации неустойчивости перейдет к другому, устойчивому, состоянию равновесия с радиусом X_+, отличным от X_*, сохранив сферическую форму (здесь следует указать, что уравнение ($1a$), определеяющее равновесные размеры пузырька, в соответствии с правилом знаков Декарта, имеет два вещественных положительных решения, одно из которых соответствует устойчивому состоянию, а другое — неустойчивому). Пузырек, устойчивый по отношению к радиально-симметричным виртуальным возмущениям объема при достаточно большом поверхностном заряде и газовом давлении, может претерпеть неустойчивость по отношению к искажению формы в соответствии с (5).

Заключение. В отличие от критических условий неустойчивости сильно заряженной сферической капли несжимаемой жидкости [6,7], объем которой при произвольных деформациях капли неизменен, критические условия неустойчивости сильно-заряженного сферического парогазового пузыря в жидком диэлектрике определяются не виртуальными искажениями формы пузыря, но виртуальным изменением его объема при радиально-симметричных деформациях.

Список литературы

[1] *Garton C.G., Krasucki Z.* // Tranc. Faraday Soc. 1964. V. 60. P. 211–226.
[2] *Гегузин Я.Е.* Пузыри. М.: Наука, 1985. 174 с.
[3] *Глазков В.В., Синкевич О.А., Смирнов П.В.* // ТВТ. 1991. Т. 29. № 6. С. 1095–1102.
[4] *Пылаева И.В., Синкевич О.А., Смирнов П.В.* // ТВТ. 1992. Т. 30. № 2. С. 367–371.
[5] *Григорьв А.И., Коромыслов В.А., Жаров А.Н.* // ПЖТФ. 1997. Т. 23. В. 19. С. 60–65.
[6] *Grigor'ev A.I., Shiryaeva S.O.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 1990. V. 23. N 11. P. 1361–1370.
[7] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.