01

Волноводы, связанные через отверстия: асимптотика собственного значения

© *И.Ю. Попов*

С.-Петербургский институт точной механики и оптики
(технический университет)

Поступило в Редакцию 7 июля 1998 г.

Рассмотрена задача о волноводах, связанных через малые отверстия. Методом согласования асимптотических разложений решений найдена асимптотика по малому параметру — диаметру отверстия собственного значения, стремящегося к нижней границе непрерывного спектра. Аналогичная асимптотика получена в случае нескольких отверстий связи.

Задача изучения свойств спектра связанных волноводов привлекла внимание физиков и математиков довольно давно. В последнее время возникла новая волна интереса, вызванная развитием наноэлектроники. Дело в том, что описание многих мезоскопических квантовых систем сводится к анализу транспортных свойств электронной волны в квантовом волноводе [1–4]. В данной работе рассматривается система двух волноводов, связанных через одно и несколько малых отверстий. В [5] показано существование собственного значения, стремящегося к нижней границе непрерывного спектра при сужении отверстия, и получены вариационные оценки для него. Вопрос же о его асимптотике оставался открытым. Он и решается в данной статье.

Пусть $\Omega_\pm$ — двумерные волноводы с границами $\{(x_1, x_2) : x_2 = 0, x_2 = \pm d_\pm\}$, соединенные окном $\{(x_1, x_2) : x_2 = 0, -a < x_1 < a\}$. Рассмотрим случай $d_+ \geqslant d_-$. Пусть $\lambda_a = k_a^2$ — искомое собственное значение. Для отыскания его асимптотики используем схему согласования асимптотических разложений, предложенную в [6,7], но мы ищем асимптотический ряд в несколько другой форме:

$$\sqrt{\pi^2/d_+^2 - k_a^2} = \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} k_{ji} a^j \ln^i a.$$

При этом асимптотические ряды для соответствующей собственной функции

$$\psi_a(x) = \begin{cases} \mp\sqrt{\dfrac{\pi^2}{d_+^2} - k_a^2}\sum\limits_{j=0}^{\infty} a^j P_{j+1}(D_y, \ln a) G^{\pm}(x, y, k)\Big|_{y=0}, & x \in \Omega^{\pm}/S_{\sqrt{a}}, \\ \sum\limits_{j=1}^{\infty}\sum\limits_{i=0}^{[(j-1)/2]} v_{ji}\left(\dfrac{x}{a}\right) a^j \ln^i a, & x \in S_{2\sqrt{a}}, \end{cases}$$

где S_t — сфера радиуса t с центром в центре отверстия, $v_{ji} \in W^1_{2,\mathrm{loc}}(\Omega^+ \cup \Omega^-)$, P_m — некоторые полиномы от D_y (D_y — производная по переменной y). $G^{\pm}$ есть функции Грина волноводов $\Omega^{\pm}$, производные которых имеют асимптотики (при $d_+ > d_-$):

$$D_y^j G^+(x, 0, k) = \sin\frac{\pi x_2}{d_+} D_x^i \left(\sin\frac{\pi x_2}{d_+}\right)\Big|_{x_2=0} \left(\frac{\pi^2}{d_+^2} - k_a^2\right)^{-1/2} + \Phi_j(x, k)\ln r$$

$$+ g_j^+(x, k) + \sum_{i=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]} \sum_{t=0}^{j-2i-1} b_{it}^{(j)}(k) r^{-j+2(i+t)} \sin(j - 2i)\Theta,$$

$$D_y^j G^-(x, 0, k) = \Phi_j(x, k)\ln r + g_j^-(x, k)$$

$$+ \sum_{i=0}^{[j/2]} \sum_{t=0}^{j-2i-1} b_{it}^{(j)}(k) r^{-j+2(i+t)} \sin(j-2i)\Theta,$$

где (r, Θ) — полярные координаты, члены $b_{it}^{(j)}(k)$, $\Phi_j(x, k)$, $g_j^{\pm}(x, k)$ аналитичны по k в некоторой окрестности точки π/d_+, $\Phi_j \in C^{\infty}(\mathbf{R}^2)$ и нечетна по переменной x_2, $g_j^{\pm} \in C^{\infty}(\Omega^{\pm})$.

Проведя процедуру согласования асимптотических разложений, получаем главный член асимптотики λ_a по a в виде

$$\lambda_a = \begin{cases} \dfrac{\pi^2}{d_+^2} - \left(\dfrac{\pi^3}{2d_+^2}\right)^2 a^4 + o(a^4), & d_+ > d_-, \\ \dfrac{\pi^2}{d^2} - \left(\dfrac{\pi^3}{d^2}\right)^2 a^4 + o(a^4), & d_+ = d_- = d. \end{cases}$$

Аналогичным образом можно рассмотреть случай n отверстий связи ширины $2a\omega_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Здесь асимптотика основного состояния, близкого к границе непрерывного спектра, имеет вид:

$$\lambda_a = \begin{cases} \frac{\pi^2}{d_+^2} - \left(\frac{\pi^3}{nd_+^2}\sum_{i=1}^{n} c_{\omega_i}\right)^2 a^4 + o(a^4), & d_+ > d_-, \\ \frac{\pi^2}{d^2} - \left(\frac{2\pi^3}{nd^2}\sum_{i=1}^{n} c_{\omega_i}\right)^2 a^4 + o(a^4), & d_+ = d_- = d. \end{cases}$$

Здесь c_{ω_i} — гармоническая емкость отрезка ω_i (i-го окна связи) в $\mathbf{R}^2$. Отметим, что полученный результат объясняет появление в вариационных оценках [8] в качестве меры малости отверстий связи суммы квадратов длин отверстий.

Автор благодарит университет Тулона и Центр теоретической физики в Лумини (Марсель) за поддержку и профессора П. Дюкло за плодотворные дискуссии.

Работа частично поддержана грантом РФФИ.

Список литературы

[1] *Takagaki Y., Ploog K.* // Phys. Rev. B 1994. V. 49. N 3. P. 1782–1788.
[2] *Duclos P., Exner P.* // Rev. Math. Phys. 1995. V. 7. P. 73–102.
[3] *Bulla W., Gesztesy F., Renger W., Simon B.* // Proc. Amer. Math. Soc. 1997. V. 125. P. 1487–1495.
[4] *Popov I.Yu.* // Rep. Math. Phys. 1997. V. 40. N 3. P. 521–529.
[5] *Exner P., Vugalter S.* // Ann. Inst. Henry Poincare. Phys. Theor. 1996. V. 65. P. 109–123.
[6] *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 214 с.
[7] *Гадыльшин Р.Р.* // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4. № 2. С. 88–115.
[8] *Exner P., Vugalter S.* // J. Phys. A: Math. Gen. 1997. V. 30. P. 7863–7878.