

01

Спирально-волновая самоорганизация в решетке связанных отображений. Гидродинамический скейлинг

© В.И. Сбитнев

С.-Петербургский институт ядерной физики им. Б.П. Константинова РАН

Поступило в Редакцию 14 апреля 1998 г.

Размеры спиральных волн обнаруживают скейлинговое соответствие с длиной диффузии, которая является фундаментальной единицей длины в решетке связанных отображений.

Интерес к решеткам связанных отображений, поддерживающим пространственно-временной хаос [1,2], исключительно высок по ряду причин. Среди них наиболее важной, пожалуй, является возможность приложения их к решению проблемы синтеза информации, где динамический хаос может выполнять конструктивную роль [3,4]. "Клеточная нейтронная сеть", в которой рабочие элементы представлены контурами Чуа [5], является прекрасным примером технической реализации подобных решеток. Эта сеть способна воспроизводить широкий набор пространственно-временных паттернов, что делает ее довольно популярной.

Среди всего множества паттернов, возникающих в результате пространственно-временной хаотической активности, только ряд из них привлекает внимание в русле исследований явления самоорганизации динамических структур [6,7]. Спиральные волны (рис. 1) принадлежат к этому числу. Рукав спиральной волны может простираться на большие расстояния при всем том, что взаимодействие между активными элементами, составляющими его, как правило, является короткодействующим. Для описания данного явления оказывается достаточным учета только диффузии между соседними элементами активной среды [8]. При таком типе взаимодействия вызывает невольное удивление формирование паттернов с далекодействующим спирально-волновым упорядочением. По этой причине подобные динамические структуры представляют собой

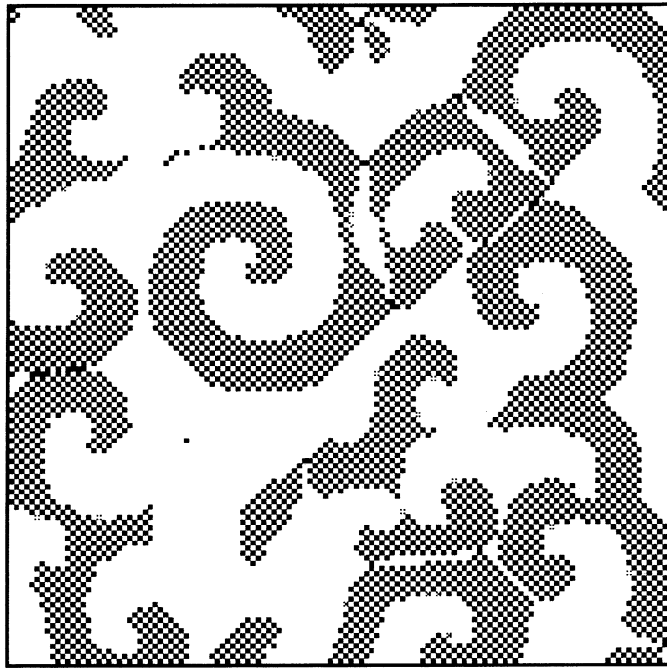


Рис. 1. Спиральные волны, возникшие в результате задания случайных начальных условий в решетке связанных отображений (I) с размерами $N^2 = 128 \times 128$. Здесь изображена переменная $y_{n,m}^t = \theta(x_{n,m}^t - v_i)$, равная нулю при $x_{n,m}^t \leq v_i$ (изображение дано белым цветом) и единице при $x_{n,m}^t > v_i$ (изображение черным цветом). Параметры решетки следующие: $q_e = 40$, $q_i = 80$, $\epsilon = 0.2$, $\zeta = 0.866$ ($l_D \approx 2.08$).

привлекательные объекты исследования механизмов самоорганизации, лежащих в основаниях синтеза информации.

Спирально-волновая самоорганизация была обнаружена в двумерной решетке связанных отображений [9]. Существует широкая область вариаций управляющих параметров, в пределах которой такая самоорганизация является родовым свойством этой решетки. В данной работе описываются скейлинговые признаки спиральных волн. Они

оказываются гомологичными подобным же признакам в гидродинамике турбулентных течений [10].

Решетка связанных отображений имеет следующий вид [11]:

$$x_{n,m}^{t+1} = (1 - \epsilon)u_{n,m}^t + \frac{q_e}{1 + \exp(-\beta(u_{n,m}^t - v_e))} - q_i\theta(x_{n,m}^t - v_i),$$

$$u_{n,m}^t = x_{n,m}^t + \zeta \Delta_{n,m}^t. \quad (1)$$

Подстрочные индексы $n, m = 1, 2, \dots, N$ определяют положение узлов на решетке с размерами N^2 , а t — дискретное время. Ключевыми параметрами являются q_e и q_i [9]. Здесь они фиксированы, $q_e = 40$ и $q_i = 80$. Пороги v_e и v_i являются зависимыми параметрами [12] и выражаются через q_e и q_i следующим образом

$$v_\nu = \ln(q_\nu + \exp(-q_\nu)), \quad \nu = e, i. \quad (2)$$

Параметр β в сигмоидной функции является аналогом обратной температуры. Для простоты его положим здесь равным единице.

Узлы решетки связаны друг с другом посредством диффузии

$$\Delta_{n,m}^t = \frac{\sum_{j,k} \bar{\omega}_{n+j,m+k} \cdot x_{n+j,m+k}^t}{\sum_{j,k} \bar{\omega}_{n+j,m+k}} - x_{n,m}^t. \quad (3)$$

Здесь индексы j и k пробегает значения $-1, 0, 1$. Член $\bar{\omega}_{n+j,m+k}$ равен единице, если только $n+j$ и $m+k$ заключены в интервале $[1, N]$, а $|j| + |k| = 1$. В противном случае он равен нулю. Аналитически этот член представляется в виде

$$\bar{\omega}_{n+j,m+k} = \delta_{|j|+|k|,1} \cdot \theta(n+j) \cdot \theta(m+k) \\ \times \theta(N+1 - (n+j)) \cdot \theta(N+1 - (m+k)). \quad (4)$$

Ступенчатая функция $\theta(x)$ равна нулю при $x \leq 0$ и единице при $x > 0$, $\delta_{|j|+|k|,1}$ — δ -функция Кронекера. Диффузионный член, определенный в виде (3), вводит граничные условия закрытого типа [9].

Сила диффузионной связи регулируется параметром ζ . С точностью до множителя $1/4$ он представляет безразмерный коэффициент диффузии. Диапазон вариаций его лежит в интервале $[0, 1]$. Параметр ϵ

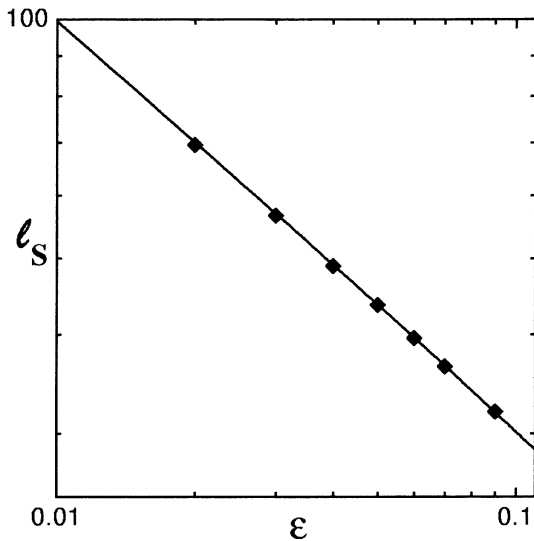


Рис. 2. Шаг рукава спирали l_S для разных значений ϵ (ромбики). Сплошная линия представляет функцию l_D , предварительно умноженную на масштабный коэффициент χ (в данном случае $\chi = 10.0$). График приведен в log-log представлении.

характеризует обратное время линейной релаксации переменной $x_{n,m}^t$ к состоянию покоя [4]. Опираясь на эти два параметра, можно ввести единицу длины

$$l_D = \sqrt{\zeta \cdot \epsilon^{-1}}, \quad (5)$$

которая, как видно, является длиной диффузии. Эта длина представляет короткодействующие масштабы, тогда как размеры спиральных волн (рис. 1) оказываются на порядок больше.

Размер спирали будем оценивать по ее шагу, представляющему кратчайшее расстояние между соседними витками спирали

$$l_S = \sqrt{(n_1 - n_2)^2 + (m_1 - m_2)^2}. \quad (6)$$

Здесь (n_1, m_1) и (n_2, m_2) представляют координаты, выбираемые вдали от ядра спирали на внутренних или внешних образующих ее рукава,

между соседними витками. На рис. 2 приведены результаты измерения расстояний l_S в зависимости от задания различных значений ϵ , а ζ задается в окрестности точки седлоузельной бифуркации $\zeta_b \sim 1 - \epsilon$ [4,9]. Здесь также нанесена l_D , с предварительно подобранным масштабным коэффициентом χ , обеспечивающим совмещение ее с l_S . Можно видеть, что обе зависимости ведут себя подобным образом:

$$l_S \propto l_D. \quad (7)$$

Масштабный коэффициент $\chi = l_S/l_D \gg 1$ указывает на преобладание кинетического и гидродинамического подходов в описании активности в решетке связанных отображений (1). В задачах гидродинамики существует малый параметр, известный как число Кнудсена **Kn**, указывающий на подобную связь [10]. Таким параметром в нашем случае является χ^{-1} .

Можно выделить ряд характерных длин l_D , в пределах которых наблюдается качественное различие в самоорганизации спиральных волн: а) $l_D < 1$ — решетка не обнаруживает признаков, указывающих на возможность спонтанного зарождения кончиков спиралей; б) $1 < l_D < 2$ — на этих длинах уже можно наблюдать их спонтанное зарождение; в) $l_D \geq 2$ — здесь уже достаточно места для того, чтобы могли формироваться рукава спиралей (рис. 1); г) $l_D \gg 2$ — по мере увеличения параметра l_D уменьшается кривизна спирального рукава. В результате рукав спирали оказывается неустойчивым объектом и разрушается. Неравенство $1 < l_D < 2$ выделено в отдельный пункт, поскольку ядро спирали является ее существенной компонентой [13].

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 97–01–01078.

Список литературы

- [1] Kaneko K. // Prog. Theor. Phys. 1985. V. 74. P. 1033–1044.
- [2] Kaneko K. // Physica D. 1989. V. 34. P. 1–41.
- [3] Афраймович В.С., Рабинович М.И., Сбитнев В.И. // Письма в ЖТФ. 1985. Т. 11. В. 6. С. 338–342.
- [4] Dudkin A.O., Sbitnev V.I. // Biol. Cybern. 1998 (in press).
- [5] Chua L.O. // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1997. V. 7. N 10. P. 2219.
- [6] Haken H. // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1997. V. 7. N 9. P. 1927–1952.

- [7] *Cross M.C., Hohenberg P.C.* // *Rev. Mod. Phys.* 1993. V. 65. N 3. P. 851–1112.
- [8] *Kuramoto Y.* *Chemical oscillations, waves, and turbulence.* Berlin, Heidelberg, N. Y., Tokio: Springer-Verlag, 1984, 156 p.
- [9] *Sbitnev V.I.* // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 1997. V. 7. N 11. P. 2569–2575.
- [10] *Климонтович Ю.Л.* *Статистическая теория открытых систем.* М.: ТОО Янус, 1995. 624 с.
- [11] *Sbitnev V.I.* // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 1996. V. 6. N 8. P. 1495–1508.
- [12] *Freeman W.J.* // *Biol. Cybern.* 1979. V. 33. P. 237–247.
- [13] *Starobin J.M., Starmar C.F., Starobin A.J.* // *Phys. Rev. E.* 1997. V. 56. N 4. P. R3757–R3760.