01

Исследование гармонического состава периодического решения уравнения Кортевега–де Вриза

© *Ю.Н. Зайко*

Поволжская Академия государственной службы, Саратов

Поступило в Редакцию 2 июня 1998 г.

Исследуется поведение n-й гармоники периодического решения уравнения Кортевега–де Вриза в зависимости от номера n в промежуточной области, которая обычно не исследовалась методами теории солитонов. Полученные асимптотики позволяют уточнить поведение гармоник.

Вопрос, которому посвящена статья, не является абсолютно новым. Напомним, что речь идет об исследовании свойств периодических решений уравнения:

$$v_t + vv_x + Bv_{xxx} = 0, \tag{1}$$

t, x — время и координата; B — коэффициент, вид которого зависит от конкретной задачи. В [1] указано, что для решений (1) вида $v(\theta)$, $\theta = x - ct$ с периодом λ:

$$v(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(\frac{2\pi i n}{\lambda}\,\theta\right); \quad v(\theta + \lambda) = v(\theta) \tag{2}$$

асимптотическая зависимость амплитуд гармоник a_n от номера n определяется выражением ($c > 0$):

$$a_n \sim \begin{cases} \dfrac{3c}{N}, & n \leqslant N, \\ \exp(-n/N), & n \gg N, \end{cases} \tag{3}$$

где $N \sim (\pm c/B)^{1/2}\lambda$. Там же отмечается, что такая зависимость характерна и для периодических решений других нелинейных уравнений. Целью настоящей работы является уточнение выражения (3).

Для решений $v(\theta)$ (1) однократным интегрированием приводится к уравнению нелинейного осциллятора: $v_{xx} - c/B \cdot v = -1/2B \cdot v^2$. Теория нелинейных операторов в банаховых пространствах [2] позволяет утверждать, что при $\pm c/B = n^2(\pm B > 0)$ имеет место бифуркация рождения n-й гармоники 2π-периодического решения исходного уравнения КдВ. Строго это показать можно, приведя уравнение нелинейного осциллятора к интегральному уравнению типа Гаммерштейна [2], что сделано в работе [3]. Этот вывод основан на непрерывности, положительной определенности и симметричности ядра соответствующего уравнения Гаммерштейна [3].

Рассмотренный случай принадлежит к малоисследованным, что связано с четной кратностью характеристических значений уравнения Гаммерштейна и видом собственных функций его линеаризованной части. По этой причине трудно сделать какие-либо дополнительные общие утверждения о характере бифуркации рождения очередной гармоники периодического решения уравнения КдВ. Можно, однако, исследовать этот вопрос непосредственно используя известное кноидальное решение уравнения КдВ [4]:

$$v(\theta) = \frac{2b}{s^2} dn^2(\zeta, s) + b_3; \quad s^2 = \frac{b_1 - b_2}{b_1 - b_3},$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{b}{6B}} \frac{\theta}{s}, \quad b = \frac{b_1 - b_2}{2}. \tag{4}$$

Здесь $dn(\zeta, s)$ — эллиптическая функция Якоби с модулем s. Амплитудой волны является b; величины $b_{1,2,3}$ — постоянные, зависящие от скорости волны c, причем $b_1 > b_2 \geqslant b_3$, $b_2 \leqslant v \leqslant b_1$. Период волны равен $\lambda = 2\pi = 2\sqrt{6B/b} \cdot sK(s)$, $K(s)$ — полный эллиптический интеграл 1-го рода. С помощью теории эллиптических функций можно получить выражения для a_n:

$$a_0 = 3B\left[\frac{4}{\pi^2} E(s) K(s) - 1\right],$$

$$a_n = 6B \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}(m\theta)\operatorname{ch}\big((m-n)\theta\big)}, \quad n \geqslant 1,$$

$$\theta = \frac{\pi K'}{K}; \quad K = K(s); \quad K' = K\sqrt{1-s^2}), \tag{5}$$

$E(s)$ — полный эллиптический интеграл второго рода.

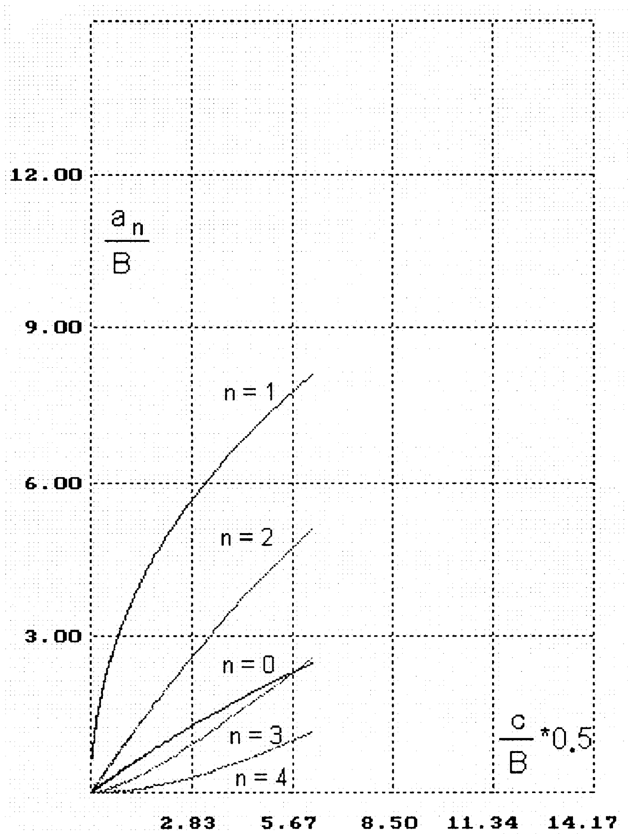

Рис. 1. Зависимость амплитуды n-й гармоники периодического решения уравнения Кортевега–де Вриза (1) от параметров c и B.

На рис. 1 показаны результаты расчета первых нескольких гармоник в зависимости от параметра $c/B = 4\pi^2 \cdot K^2(s)[2-s^2]-2$, выражения для которого, а также для параметра $b_3 = -3B$ получаются из естественного требования, что нулевая гармоника в пределе слабой нелинейности $(s \to 0)$ должна совпадать со значением $v = 0$ или $v = 2c$, в которых соответствующая потенциальная функция $U(v) = -c/2B \cdot v^2 + 1/6B \cdot v^3$

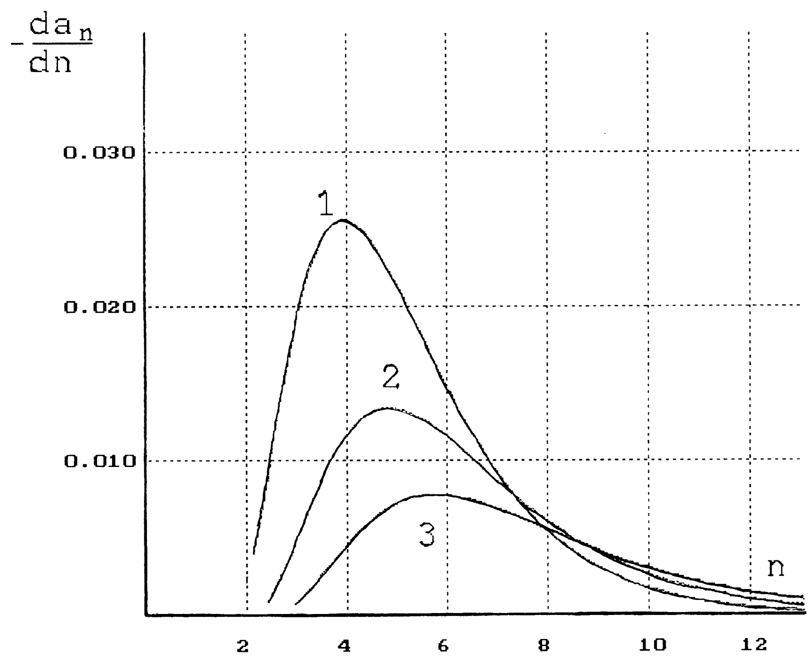

Рис. 2. Зависимость производной da_n/dn n-й гармоники от n при различных значениях c/B: *1* — $(c/B)^{1/2} = 4$; *2* — $(c/B)^{1/2} = 5$; *3* — $(c/B)^{1/2} = 6$.

имеет минимум. Левая граница диапазона $c/B = 0$ соответствует гармоническим решениям (1) при $s \to 0$, правая — сильно нелинейным решениям при $s \to 1$.

На основе этих расчетов можно утверждать, что все бифуркации являются двусторонними, т. е. нетривиальные решения (1) существуют по обе стороны от точки бифуркации. Этим настоящая задача напоминает известную задачу А.И. Некрасова о волнах на поверхности воды [5]. Кроме того, нулевая гармоника при переходе параметра c/B через нуль получает конечное изменение $2c$, что связано с изменением положения равновесия, определяемого потенциальной функцией $U(v)$.

Более детальное исследование поведения гармоник можно провести, исходя из асимптотического выражения для a_n, которое можно получить, заменяя сумму в (5) интегралом для не слишком малых n:

$$a_n \sim \frac{6B}{\mathrm{ch}(n\theta)}\left\{1 - \frac{1}{\mathrm{th}(n\theta)}\ln\left[\frac{\mathrm{ch}(1)}{\mathrm{ch}(n\theta - 1)}\right]\right\}, \quad n \gg 1. \tag{6}$$

Из (6) следуют различные асимптотики для a_n:

$$a_n \sim \begin{cases} 6B, & n\theta \ll 1, \\ 12B \cdot n\theta \cdot \exp(-n\theta), & n\theta \gg 1, \end{cases},$$

$$a_n = \begin{cases} -\dfrac{n}{16^n} \cdot s^{2n-4} \cdot \ln(s^2), & s \ll 1, \\ \dfrac{\pi^2}{\ln^2(1 - s^2)}, & s \to 1. \end{cases} \tag{7}$$

На рис. 2 показана зависимость производной da_n/dn от n при различных значениях c/B, откуда можно заключить, что в точке бифуркации $c/B = n^2$ n-я гармоника характеризуется максимальной скоростью изменения. С ростом n растет ошибка, обусловленная конечной точностью программы расчета эллиптических интегралов $(2 \cdot 10^{-8})$ [6].

Список литературы

[1] *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику. М.: Наука, 1988. 368 с.
[2] *Функциональный* анализ / Под ред. С.Г. Крейна. М.: Наука, 1964. 424 с.
[3] *Зайко Ю.Н.* // Письма в ЖТФ. 1992. Т. 18. В. 23. С. 63–65.
[4] *Карпман В.И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 176 с.
[5] *Габов С.А.* Введение в теорию нелинейных волн. М.: Изд-во МГУ, 1988. 177 с.
[6] *Справочник* по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.