

01

## Двухуровневое управление хаосом в нелинейных осцилляторах

© Б.П. Безручко, Р.Н. Иванов, В.И. Пономаренко

Институт радиотехники и электроники РАН (Саратовский филиал)

Поступило в Редакцию 9 апреля 1998 г.

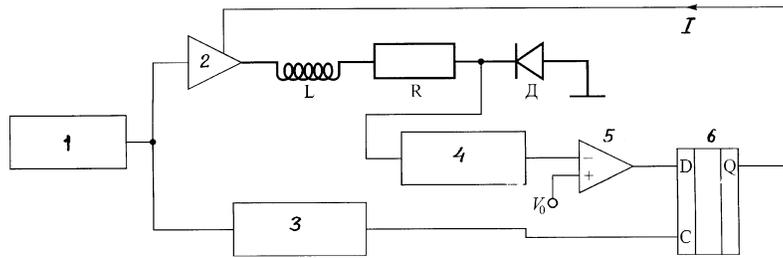
Впервые экспериментально в неавтономной  $RL$ -диод цепи и численно в ее модели (многопараметрическом одномерном отображении) осуществлено управление хаосом с помощью двухуровневой схемы, являющейся модификацией классического метода Отта–Гребоджи–Иорка и отличающейся от него простотой реализации в реальных системах.

1. Экспериментальная реализация методов управления хаосом в нелинейных системах зачастую упирается в сложность алгоритмов изменения управляющего параметра и требует разработки их упрощенных вариантов. К таким подходам можно отнести предложенную в [2] модификацию метода Отта–Гребоджи–Иорка (ОГИ) [1], в которой изменение параметра  $p$ , в классическом варианте пропорциональное отклонению состояния системы от стабилизируемого, заменено на переключение между двумя фиксированными значениями  $p$  и  $p_2$  — двухуровневое управление:

$$p = p_0 + k \operatorname{sgn}(x_n - x_0) = \begin{cases} p_1, & \text{если } x_n \leq x_0 \\ p_2, & \text{если } x_n > x_0 \end{cases}, \quad (1)$$

где  $k = (p_2 - p_1)/2$ ,  $p_0 = (p_1 + p_2)/2$ ,  $p_2 > p_1$ ,  $x_n$  и  $x_0$  — соответственно текущее мгновенное значение переменной и значение на стабилизируемой неустойчивой орбите в сечении Пуанкаре (в общем случае — вектор).

В данной работе двухуровневая стабилизация реализуется в физическом и численном экспериментах в вариантах: а) с включением алгоритма (1) лишь при достижении изображающей точки в фазовом пространстве заданной окрестности стабилизируемой орбиты (при попадании в "окно") и б) еще более упрощенном — без введения окна, при постоянном действии алгоритма (1). Объектами исследования являются



**Рис. 1.** Схема экспериментальной установки (жирной линией выделена исследуемая система): 1 — генератор, 2 — усилитель, 3 — формирователь импульсов, 4 — амплитудный детектор, 5 — компаратор, 6 — триггер,  $I$  — управляющая цепь.

нелинейный диссипативный осциллятор, периодически возбуждаемый внешней силой — неавтономная  $RL$ -диод цепь (выделена жирным на рис. 1) и многопараметрическое одномерное отображение, хорошо моделирующее сложную динамику экспериментальной системы в области частот субгармонических резонансов:

$$x_{n+1} = A + x_n \exp(-d/N) \cos(2\pi/(N(1 + \beta x_n))), \quad (2)$$

где  $A$  — аналог амплитуды внешнего воздействия,  $N = T_0/T$  — нормированная частота воздействия,  $d$  характеризует диссипацию,  $\beta$  — параметр нелинейности,  $n = 1, 2, 3 \dots$  — дискретное время.<sup>1</sup>

Продемонстрирована работоспособность рассматриваемой упрощенной процедуры управления и проанализированы ее возможности и недостатки: движения происходят в заданном интервале динамической переменной в окрестности выбранной орбиты; увеличение периода стабилизируемых движений сопровождается уменьшением области параметров, в которой возможна стабилизация.

<sup>1</sup>  $RL$ -диод цепь широко используется как селективный элемент с электронной перестройкой, делитель и умножитель частоты, рассматривалась как ячейка памяти с фазовой записью информации [5], но в последние годы после обнаружения в ней хаотической динамики [3] стала полигоном для исследования различных нелинейных колебательных феноменов. Модельное отображение (2) получено для диссипативных осцилляторов с нелинейностью типа "мягкая пружина", периодически возбуждаемых импульсами силы, в течение которых в систему вносятся дополнительные потери. Для  $RL$ -диод цепи последнее реализуется при положительной для диода полярности импульсов [4].

2. Для начала рассмотрим процедуру двухуровневого управления на многопараметрическом отображении (2), которое перепишем в виде:  $x_{n+1} = A + f(x_n)$ , где  $A$  — параметр управления. В малой окрестности неподвижной точки  $x_0$  динамика системы описывается уравнением

$$x_0 + \tilde{x}_{n+1} = A_0 + f(x_0) + \left. \frac{df}{dx_n} \right|_{x_0} \tilde{x}_n + \tilde{A}_n, \quad (3)$$

где  $\tilde{x}_{n+1}$ ,  $\tilde{x}_n$  соответствуют малым возмущениям, а вариация управляющего параметра  $\tilde{A}_n$  введена дополнительно для целей управления. Разделим (3) на уравнение неподвижной точки

$$x_0 = A_0 + f(x_0) \quad (4)$$

и уравнение для вариаций

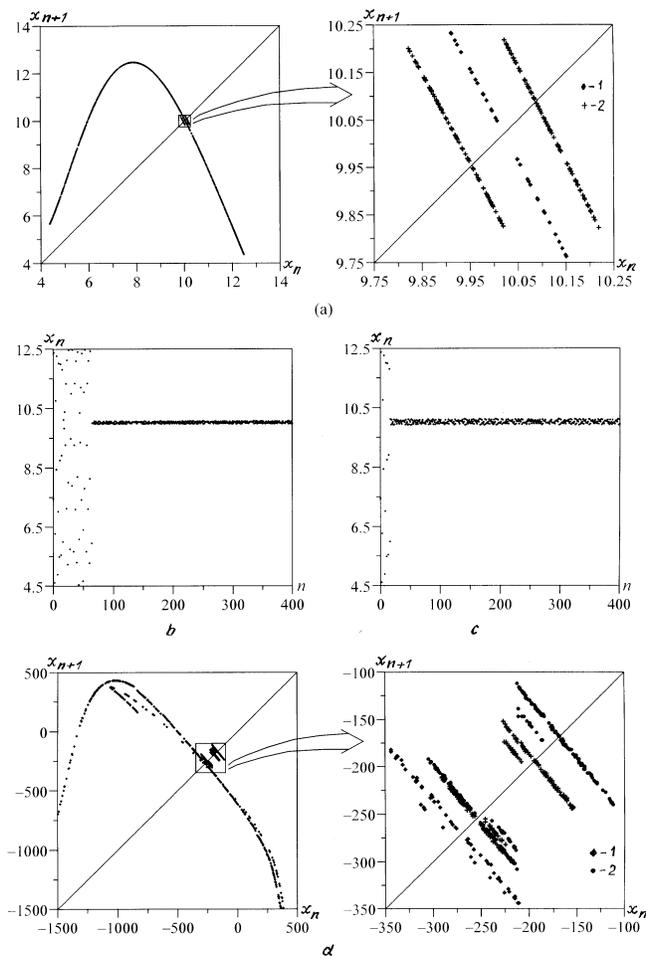
$$\tilde{x}_{n+1} = \tilde{A}_n + \left. \frac{df}{dx_n} \right|_{x_0} \tilde{x}_n. \quad (5)$$

Зададимся целью при значениях параметров  $A_0$ ,  $\beta$ ,  $d$ ,  $N$ , соответствующих хаосу, с помощью  $\tilde{A}_n$  сосредоточить движения в малой окрестности неустойчивой неподвижной точки  $x_0$  (неустойчивого цикла периода 1). Для этого определим из (4) значение  $x_0$ , найдем производную функции  $f$  в этой точке и зададим "окно"  $\sigma$ . Затем будем итерировать (3) начиная с некоторых начальных условий до тех пор, пока  $x_n$  не попадает в  $\sigma$ -окрестность точки  $x_0$ , т.е.  $|\tilde{x}_n| < \sigma$ . После этого следует изменять параметр  $\tilde{A}_n$  в соответствии с правилом (1) ( $\tilde{A}_n = k$ , если  $x_n > 0$ ;  $\tilde{A}_n = -k$ , если  $x_n < 0$ ) так, чтобы изображающая точка не покидала заданной окрестности неподвижной точки  $|\tilde{x}_{n+1}| < \sigma$ . Это возможно, если, согласно (5), выполняется неравенство

$$-\sigma \left( 1 + \left. \frac{df}{dx_n} \right|_{x_0} \right) < k < \sigma. \quad (6)$$

Следовательно, условием нахождения  $x_n$  вблизи неподвижной точки периода 1 является  $(df/dx_n)_{x_0} > -2$ . Эту последовательность действий легко перенести на циклы периода  $m = 2, 4, 8, \dots$ , если оперировать не с (2), а с формулами для соответствующих итераций  $x_{n+m} = f^m(x_n)$ .

Результаты численных экспериментов по реализации описанной процедуры управления на отображении (2) при значениях  $A_0$ ,  $\beta$ ,  $d$ ,



**Рис. 2.** *a* — вид отображения на плоскости  $x_{n+1}-x_n$  при выключенном (1) и включенном (2) управлении; *b*, *c* — временные реализации колебаний в системе (2) для  $A_0 = 7$ ,  $d = 0.13$ ,  $\beta = 0.205$ ,  $N = 0.4$  при одинаковых начальных условиях для  $k = 0.05$  и  $k = 0.10$  соответственно; *d* — отображение последования экспериментальной системы без управления (1) и с управлением для  $\Delta = 0.04(+)$  и  $\Delta = 0.07(2)$ .

$N$ , соответствующих хаосу, представлены на рис. 2. Без управления установившиеся движения системы на фазовой плоскости происходят на хаотическом аттракторе, занимающем протяженную область параболы (рис. 2, *a*), а при включении управления ограничиваются заданной окрестностью точки  $x_0$ . Степень "сжатия" аттрактора и длительность процесса установления (от включения управления до стабилизации) определяется выбором величины  $k$ : при небольших  $k$  значения  $x_n$  располагаются ближе к  $x_0$ , при увеличении  $k$  разброс  $x_n$  увеличивается, а длительность переходного процесса уменьшается. Это иллюстрируют временные реализации колебаний в системе на рис. 2, *b*, *c*: при  $k = 0.05$  стабилизации предшествует 80 итераций, а при  $k = 0.1$  — около 20. Расчеты показывают, что с помощью двухуровневого управления можно добиться стабилизации движения и вблизи неустойчивых циклов периода 2 и 4. Однако чем выше период неустойчивого цикла, тем больше значение его мультипликатора по модулю и меньше область, в которой возможна стабилизация.

Упростим процедуру управления, оставив за параметром  $A$  два фиксированных значения  $A_0 + k$  и  $A_0 - k$ , но упразднив контроль попадания  $x_n$  в  $\sigma$ -окрестность неподвижной точки периода 1. В этом случае управляющий параметр  $A$  не принимает значения  $A_0$ , как в предыдущем случае. Расчеты показывают, что новая процедура также приводит к стабилизации движения вблизи неподвижной точки периода 1, но сулит значительно упростить экспериментальное воплощение схемы управления.

3. В физическом эксперименте схема двухуровневого управления (рис. 1) строилась в соответствии со вторым (упрощенным) вариантом из рассмотренных в п. 2. Исследуемая  $RL$ -цепь с диодом ( $L = 100$  мН, диод типа КД202) возбуждалась импульсным сигналом от генератора через усилитель. Коэффициент усиления  $p$  мог принимать два значения:  $p_1 = 1$  и  $p_2 = 1 + \Delta$ , где  $\Delta$  регулировалось в процессе эксперимента в пределах от 0.00 до 0.07. С помощью схемы управления в моменты времени с фиксированной фазой внешнего воздействия сравнивались значения напряжения  $V$  на диоде и на источнике опорного напряжения  $V_0$ . В зависимости от знака  $(V - V_0)$  уровень возбуждающего сигнала устанавливался равным одному из двух значений. Вид стабилизируемого движения определялся заданием величины опорного напряжения  $V_0$ , величиной  $\Delta$  и длительностью интервала времени между актами сравнения напряжения на диоде с опорным. Заметим, что, как и в [2],

в экспериментальной процедуре существует два уровня управляющего параметра  $p_1$  и  $p_2$ , но значение  $p_0 = (p_2 + p_1)/2$  управляющий параметр не принимает никогда.

Результаты экспериментальных исследований показали работоспособность упрощенного варианта двухуровневого управления и качественное соответствие результатам численного моделирования. Рис. 2, *d* иллюстрирует стабилизацию движений в окрестности неустойчивого цикла период внешнего воздействия в случае, когда до включения управления в системе существовали хаотические колебания, сформировавшиеся в результате последовательности бифуркаций удвоения этого цикла.<sup>2</sup> На нем представлена зависимость  $V_{i+1}(V_i)$ , где  $V_i$  — значения напряжения на диоде в дискретные моменты времени  $i$  через период воздействия. Основной картинке соответствует случай, когда схема управления отключена, а увеличенный фрагмент — зависимости после включения управления с различными значениями  $\Delta$  (крестики —  $\Delta = 0.04$ , кружки —  $\Delta = 0.07$ ). Как и в численном эксперименте, при включении управления точки в стробоскопическом сечении образуют кусочно-линейные множества с разрывом вблизи опорного значения. При уменьшении  $\Delta$  наблюдается сокращение окрестности неустойчивого цикла, посещаемой изображающей точкой. С приближением значения  $\Delta$  к нулю управление скачком прекращается.

4. Двухуровневая схема управления позволяет организовать движение системы в заданной области фазового пространства неавтономных осцилляторов, находящихся в хаотическом движении на базе любого из субгармонических циклов. Метод достаточно груб, устойчив по отношению к возмущениям, неизбежным в физическом эксперименте. Достоинством данной схемы управления являются предельная простота алгоритма и соответственно конструкции цепей управления. Однако с ее помощью достигается лишь ограничение движений заданным интервалом, а не достаточно длительное движение на неустойчивой орбите, как в классической процедуре стабилизации.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № (6-02-16755).

---

<sup>2</sup> Утолщение линий экспериментального отображения и их расслоение на рис. 2, *d* связано с неоднородностью реальной системы и с техническими моментами (неустраняемостью прохождения управляющего сигнала электронного ключа в сигнал возбуждения колебательного контура).

## Список литературы

- [1] *Ott E., Grebogi C., Yorke J.A.* // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. P. 1196–1199.
- [2] *Galias Z., Ogorzalek M.J.* // Proc. of the 3rd International Workshop NDES'95. Dublin, Ireland, 1995. P. 229–232.
- [3] *Linsay P.S.* // Phys. Rev. Lett. 1981. V. 47. N 19. P. 1349–1352.
- [4] *Bezruchko B.P., Prokhorov M.D., Seleznev E.P.* // Chaos, Solitons & Fractals. 1995. V. 5. N 11. P. 2095–2107.
- [5] *Каплан А.Е., Крайцов Ю.А., Рылов В.А.* // Параметрические генераторы и делители частоты. М.: Сов. радио, 1966. 334 с.