01;06

Масштабная инвариантность и функция Гелл–Манна и Лоу кондактанса слоя с экспоненциально широким спектром сопротивлений

© *А.А. Снарский, К.В. Слипченко, А. Дзедзиц*

Национальный технический университет Украины "КПИ", Киев
"Наука–Сервис", Москва
Вроцлавский политехнический институт, Вроцлав, Польша

Поступило в Редакцию 3 ноября 1998 г.

Изучается слой с экспоненциально широким спектром локальных сопротивлений, один из размеров которого меньше размера самоусреднения.

Исследуется гипотеза о масштабной инвариантности и функция Гелл–Манна и Лоу для конечного скейлинга в системах с экспоненциально широким разбросом сопротивлений. Дан сравнительный анализ масштабного поведения таких систем со случаем сильной локализации.

В ряде случаев при изучении электрофизических свойств материалов их можно моделировать с помощью среды с экспоненциально широким спектром локальных сопротивлений. Примером могут служить легированные полупроводники (так называемая сетка Миллера и Абрахамса), проводящие клеи, некоторые толстопленочные резисторы и т. д. [1,2]. Для решения задачи об эффективной проводимости таких систем используется перколяционно-подобный подход [1], с помощью которого удается получить эффективную проводимость, опираясь на информацию о двухфазной среде вблизи порога протекания. Благодаря сильной неоднородности, рассматриваемые системы имеют большие значения радиуса корреляции ξ — размера, на котором физические свойства самоусредняются. Поэтому значительный практический интерес представляет случай, когда какие-то из линейных размеров образца меньше величины ξ трехмерной задачи. Так, например, кондактанс слоя с $L < \xi$ сильно (экспоненциально) зависит от его толщины L.

В работе найден поперечный кондактанс слоя размерами $\mathcal{L} \times \mathcal{L} \times L$, где $\mathcal{L} \gg \xi$, а $L < \xi$, в котором спектр локального сопротивления имеет экспоненциально широкий разброс.

Пусть локальная проводимость равна $\sigma = \sigma_0 \exp(\lambda x)$, где $\lambda \gg 1$ — величина, характеризующая ширину разброса значений σ, $0 < x < 1$ — случайная переменная с равномерной функцией распределения. Радиус корреляции трехмерной системы $\xi = \mathrm{a}_0 \lambda^\nu$ [1,3], где a_0 — минимальный размер в системе, в случае сетки это длина связи, ν — критический индекс корреляционной длины двухфазной перколяционной среды.

Разобьем условно слой на кубические реализации рамерами $L \times L \times L$ и заменим их эффективными однородными кубами с кондактансами, равными кондактансам отдельных реализаций. Выражение для поперечной и продольной проводимости слоя, полученные на основании этого подхода в случае двухфазной системы, хорошо согласуются с известными результатами [4–6]. Согласно [1], кондактанс отдельной реализации

$$G_r \approx g_0 e^{\lambda x_c}, \quad g_0 = \mathrm{a}_0 \sigma_0, \quad x_c = 1 - p_c, \tag{1}$$

где p_c — случайная величина, задающая порог протекания этой реализации. Соответственно G_r — также случайная величина. Распределение для p_c близко к гауссовому с центром в $\langle p_c \rangle = p_{c3} + A(L/\mathrm{a}_0)^{-1/\nu}$, и дисперсией $S = B(L/\mathrm{a}_0)^{-1/\nu}$, где A и B — некоторые константы, причем $B > A$ [1]. Значение поперечного кондактанса рассматриваемого слоя $G_\perp$ в принятом приближении — сумма кондактансов кубов $L \times L \times L$. Таким образом, $G_\perp$ можно выразить через среднее по реализациям

$$G_\perp = N\{G_r\}, \quad \{G_r\} = g_0\, e^{x_{c3}\lambda - A\lambda\left(\frac{L}{\mathrm{a}_0}\right)^{-1/\nu} + B^2\lambda^2\left(\frac{L}{\mathrm{a}_0}\right)^{-2/\nu}}, \tag{2}$$

где N — количество кубов, на которые разбит слой, а фигурные скобки означают среднее по реализациям. Для усреднения мы воспользуемся распределением Гаусса для x_c с дисперсией S и средним значением $\langle x_c \rangle$. Из (2) получим удельный к площади кондактанс

$$\frac{G_\perp}{\mathcal{L}^2} = \frac{g_0}{L^2}\, e^{x_{c3}\lambda - A\lambda\left(\frac{L}{\mathrm{a}_0}\right)^{-1/\nu} + B^2\lambda^2\left(\frac{L}{\mathrm{a}_0}\right)^{-2/\nu}}. \tag{3}$$

Это выражение справедливо, когда продольный размер слоя $\mathcal{L}$ достаточен для самоусреднения, т. е. при $\mathcal{L} \gg \xi_\perp$, где $\xi_\perp$ — радиус корреляции слоя. Для определения величины $\xi_\perp$ найдем флуктуацию кондактанса $G_\perp$, который представляет собой сумму кондактансов, составляющих слой эффективных кубов $G_\perp = \sum G_r$.

Поскольку $G_\perp$ — сумма независимых случайных величин, то в данном приближении относительная флуктуация $\delta_{G_\perp} = \delta_{G_r}/N$ и

$$\delta_{G_\perp} = \frac{\{G^2\} - \{G\}^2}{\{G\}^2 N} = \frac{L^2}{\mathcal{L}^2}\left[e^{B^2\lambda^2\left(\frac{L}{a_0}\right)^{-2/\nu}} - 1\right]. \tag{4}$$

Когда $L \ll \xi_\perp$, единицей в скобках можно пренебречь, и тогда радиус корреляции

$$\xi_\perp \approx L\, e^{B^2\lambda^2\left(\frac{L}{a_0}\right)^{-2/\nu}}. \tag{5}$$

Действительно, из условия $\mathcal{L} \gg \xi_\perp$ следует, что $\delta_{G_\perp} \ll 1$. С другой стороны, когда $L \approx \xi$, из (4) получим $\xi_\perp \approx L \approx \xi$.

Из (2) следует, что средний по реализациям кондактанс $\{G_r\}$ просто выражается через удельный к площади кондактанс слоя $G_\perp$, а именно $\{G_r\} = (L/\mathcal{L})^2 G_\perp$. Таким образом, измерение кондактанса слоя позволяет напрямую получать средний по реализациям кондактанс кубов с размером L, меньшим корреляционной длины.

Проанализируем зависимость $\{G_r\}$ от L подробнее. Хорошо известна [1,7] аналогичная задача — определение зависимости кондактанса от размеров системы при сильной локализации. Согласно гипотезе о масштабной инвариантности [1,7], кондактанс является единственной величиной, определяющей поведение системы при изменении ее размеров. Это утверждение можно записать, введя функцию Гелла–Манна и Лоу $\beta(G)$:

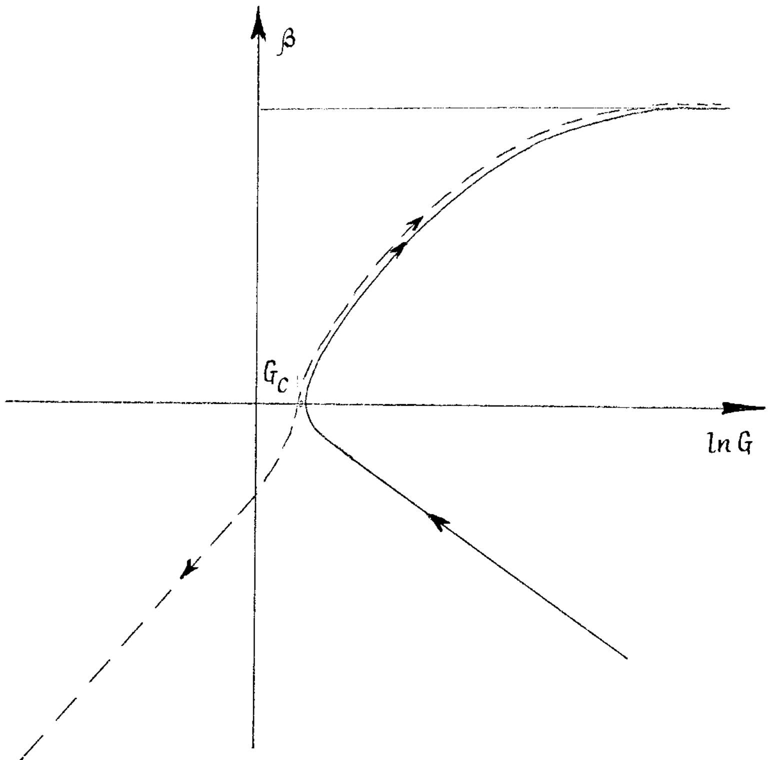
$$\beta(G) = \partial \ln G/\partial \ln L; \tag{6}$$

на рисунке пунктирной линией показана ее зависимость от $\ln G$ в задаче сильной локализации.

В [3] для $\{G_r\}$ была сформулирована гипотеза подобия (конечного скейлинга), которую в используемых выше терминах можно записать в виде

$$\{G_r\} = G_c F(L^{1/\nu}\lambda^{-1}), \qquad G_c = g_0 e^{\lambda x_c}, \tag{7}$$

где скейлинговая функция имеет следующие асимптотики: $F(z \ll 1) \to 1$ и $F(z \gg 1) \to z^\nu$, и мы ограничились рассмотрением трехмерного случая. Согласно этой асимптотике, $\{G_r(L^{1/\nu}\lambda^{-1} < 1)\} \sim G_c$ и $\{G_r(L^{1/\nu}\lambda^{-1} \gg 1)\} \sim G_c L\lambda^{-\nu}$. Из (3) следует, что полученное в нашей работе $\{G_r\}$ удовлетворяет этим асимптотикам. Мало того, явное выражение позволило вычислить функцию $\beta(\{G\})$ — сплошная линия



Пунктирная линия — функция Гелл–Манна и Лоу $\beta(G)$ в задаче сильной локализации, сплошная линия — та же функция для среды с экспоненциально широким спектром распределения сопротивлений. Направление стрелок на линиях указывает возрастание L — размера образца.

на рисунке. Как видно из рисунка, функция Гелл–Манна и Лоу для рассматриваемой задачи принципиально отличается от таковой для задачи сильной локализации. Если в случае сильной локализации значение G_c разделяет две принципиально разные зависимости кондактанса от L — выше кондактанс G растет с увеличением размера, а ниже падает, то в нашем случае $\{G_r\}$ растет при увеличении размеров как выше, так и ниже G_c.

Заметим, что приведенные выше рассужения мы можем использовать для определения продольной проводимости рассмотренного слоя — $\sigma^e_{\|}$. После замены реализаций однородными кубами мы переходим к двумерной системе. Эта система удовлетворяет условиям получения точного решения [8]. Пусть локальная проводимость двумерной системы $\sigma(\mathbf{r})$ имеет случайное распределение. Введем переменную $\chi(\mathbf{r}) = \ln\sigma(\mathbf{r}) - \langle\ln\sigma(\mathbf{r})\rangle$, где угловые скобки означают среднее. Согласно [8], если функция плотности распределения χ является четной, задача об эффективной проводимости имеет точное решение $\sigma_e = \exp(\langle\ln\sigma\rangle)$. Используя последнее соотношение, получим известное выражение Шкловского–Эфроса [1]

$$\sigma^e_{\|} = \sigma_0 e^{x_c\lambda - A\lambda\left(\frac{L}{\mathrm{a}_0}\right)^{-1/\nu}}. \tag{8}$$

Размер самоусреднения $\xi_{\|}$ для величины $G_{\|}$ отличается от $\xi_{\perp}$. Полученную двумерную систему мы можем рассматривать как систему с экспоненциально широким спектром локальных сопротивлений. Тогда ее корреляционная длина определяется характерной шириной спектра λ^* [3]: $\xi_{\|} = L(\lambda^*)^{\nu_2}$, где ν_2 — двумерный перколяционный индекс корреляционной длины, L — минимальный размер в системе из однородных кубов $L \times L \times L$. В нашем случае $\lambda^* = \lambda B(L/a_0)^{-1/\nu}$, тогда

$$\xi_{\|} = L(B\lambda)^{\nu_2}\left(\frac{L}{\mathrm{a}_0}\right)^{-\nu_2/\nu} = \mathrm{a}_0(B\lambda)^{\nu_2}\left(\frac{L}{\mathrm{a}_0}\right)^{1-\nu_2/\nu}. \tag{9}$$

В отличие от $\xi_{\perp}, \xi_{\|}$ достаточно слабо зависит от толщины слоя — $1 - \nu_2/\nu \approx 0.2$.

Мы признательны Э.М. Баскину за многочисленные обсуждения затронутых вопросов.

Работа частично поддержана ISSEP QSU082187, PSU082057.

Список литературы

[1] *Shklovskii B.I., Efros A.L.* // Electronic properties of doped semiconductors. Springer, Berlin, 1984.
[2] *Dziedzic A.*. // Microelectron. Reliab. 1991. V. 31. P. 537.
[3] *Le Dousal P.* // Phys. Rev. Lett. 1989. B39. P. 881.

[4] *Clerc J.P., Giraud G., Alexander S., Guyon E.* // Phys. Rev. 1980. B22. P. 2489. A.
[5] *Gadenne P., Gadenne M.* // Physica A. 1989. V. 157. P. 344.
[6] *Неймарк В.* // ЖЭТФ. 1990. Т. 98. С. 611.
[7] *Абрикосов А.А.* Основы теории металлов. М.: Наука, 1987. С. 520.
[8] *Дыхне А.М.* // ЖЭТФ. 1970. Т. 59. С. 110.