01;10

Электрические поля с кольцевыми особенностями в корпускулярной оптике

© Ю.К. Голиков, Д.В. Григорьев, Т.А. Шорина

С.-Петербургский государственный технический университет

Поступило в Редакцию 7 декабря 1998 г.

Вводится новый класс осесимметричных Лапласовых потенциалов с кольцевой особенностью, описываемых элементарными функциями. Обсуждаются возможности применения этого класса в задачах синтеза энергоанализирующих систем и линз. Приводятся эквипотенциальные портреты электрических полей с кольцевыми особенностями.

Генезис потенциалов нового класса

Осесимметричное уравнение Лапласа запишем в переменных x и y, где x играет роль радиальной координаты, а y — осевой:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial\omega}{\partial x}=0. \tag{1}$$

Стандартный способ разделения переменных доставляет фундаментальные решения в виде произведения экспонент и функций Бесселя [1]:

$$\omega(x,y)=\big(A_1J_0(x)+A_2Y_0(x)\big)\big(B_1e^{y}+B_2e^{-y}\big).$$

Можно существенно обогатить метод разделения переменных, если привести уравнение (1) к комплексной форме при помощи сопряженных комплексных переменных $z=x+iy$ и $\bar z=x-iy$, и искать новые решения в виде произведения функций от z и $\bar z$ по отдельности.

Используя операторы Г.К. Колосова [2]

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{2}$$

запишем (1) в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial \bar z}\left(2z\frac{\partial\omega}{\partial z}+\omega\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(2\bar z\frac{\partial\omega}{\partial \bar z}+\omega\right)=0. \tag{3}$$

Поиск решений вида $\omega = P(z)Q(\overline{z})$, где $P(z)$ и $Q(\overline{z})$ — неизвестные аналитические функции, непосредственно ведет к разделению переменных в уравнении (3):

$$\frac{2zdP/dz + P}{dP/dz} = -\frac{2\overline{z}dQ/d\overline{z} + Q}{dQ/d\overline{z}} = 2C, \tag{4}$$

где $C = a + ib$ — комплексная константа разделения. Оба уравнения в (4) немедленно интегрируются и дают следующие выражения для P и Q:

$$P(z) = \frac{A_1}{\sqrt{z - C}}, \quad Q(\overline{z}) = \frac{A_2}{\sqrt{\overline{z} + C}},$$

где A_1 и A_2 — произвольные комплексные числа. Главную часть искомого решения можно записать в виде

$$\omega(z, \overline{z}) = \varphi + i\psi = \frac{1}{\sqrt{(z - C)(\overline{z} + C)}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y - b + ia)^2}}. \tag{5}$$

Из (5) видно, что оба вещественных лапласовых потенциала φ и ψ имеют кольцевую особенность с радиусом $x = a$, лежащую в плоскости $y = b$. Конкретное значение b, очевидно, не влияет на форму эквипотенциалей, и потому положим $b = 0$, тогда:

$$\varphi = \frac{1}{M}\sqrt{\frac{M + x^2 + y^2 - a^2}{2}}, \quad \psi = \frac{1}{M}\sqrt{\frac{M - x^2 - y^2 + a^2}{2}},$$

$$M(x, y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2}. \tag{6}$$

Физическая интерпретация решений

На рис. 1 и 2 приведены эквипотенциальные портреты потенциалов φ и ψ. Потенциал φ описывает поле заземленного проводящего диска радиуса a, возле кромки которого сосредоточено бесконечно тонкое зарядовое кольцо. В пределе, при $a \to 0$, потенциал φ вырождается в потенциал точечного заряда, и потому случай "диск–кольцо" при малых a логично рассматривать как весьма ценный вариант обобщения поля точечного заряда. Потенциал ψ является инверсией в шаре потенциала φ, и его портрет отвечает полю бесконечной заземленной круговой диафрагмы радиуса a, возле кромки которой сосредоточена кольцевая нить заряда. Вследствие взаимной индукции, характер особенности в обоих случаях дипольный.

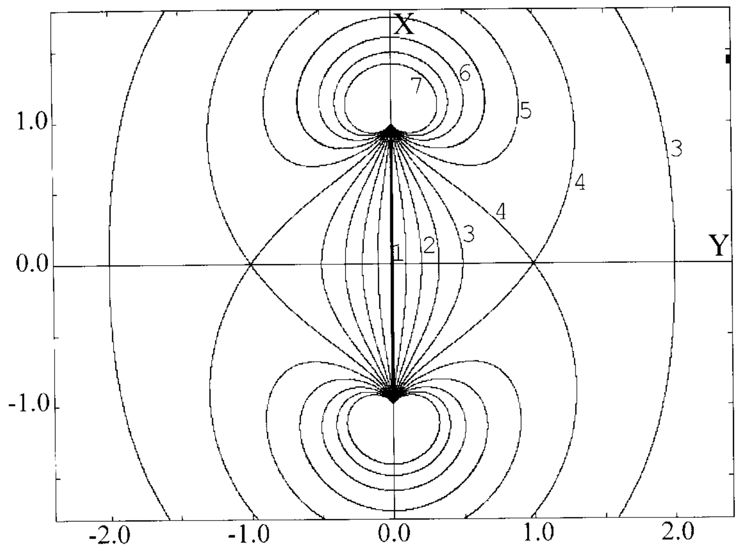

Рис. 1. Эквипотенциальный портрет гармонического потенциала φ (диск–заряженное кольцо). Номерам на рисунке соответствуют потенциалы: $1 - \varphi = 0.0$, $2 - \varphi = 0.2$, $3 - \varphi = 0.4$, $4 - \varphi = 0.5$, $5 - \varphi = 0.6$, $6 - \varphi = 0.8$, $7 - \varphi = 1.0$.

Кольцевые мультиполи

Дифференцирование выражений (6) по осевой координате y дает две цепочки потенциалов с кольцевой особенностью радиуса a, которые следует считать обобщением точечных мультиполей, получающихся такой же процедурой из обычного потенциала кулоновского центра. Общая формула для этих мультиполей в комплексной форме такова:

$$\omega_n = \varphi_n + i\psi_n = \frac{\partial^n}{\partial y^n}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + (y + ia)^2}}\right). \tag{7}$$

Например, комплексный кольцевой квадруполь имеет выражение

$$\omega_2 = \frac{y + ia}{[x^2 + (y + ia)^2]^{3/2}}.$$

Обобщенные комплексные мультиполи при $a \to 0$ превращаются в классические мультиполи того же порядка.

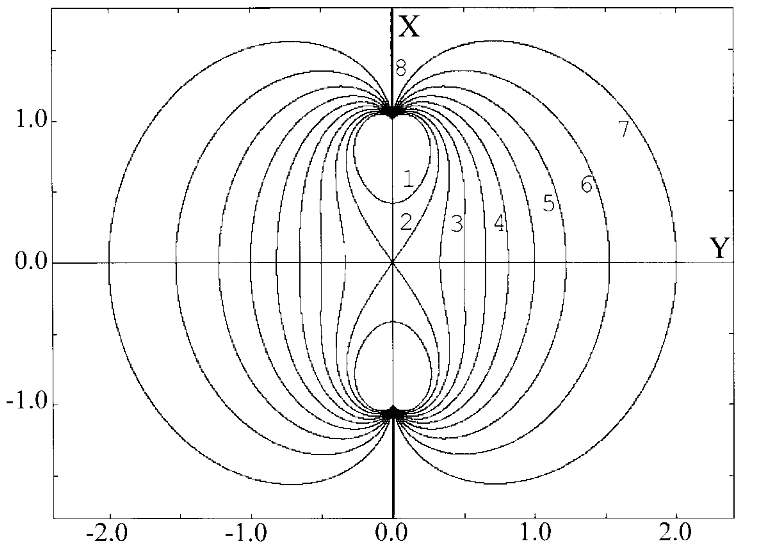

Рис. 2. Эквипотенциальный портрет гармонического потенциала ψ (диафрагма–заряженное кольцо). Номерам на рисунке соответствуют потенциалы: 1 — $\psi = -1.1$, 2 — $\psi = -1.0$, 3 — $\psi = -0.8$, 4 — $\psi = -0.6$, 5 — $\psi = -0.4$, 6 — $\psi = -0.3$, 7 — $\psi = -0.2$, 8 — $\psi = 0.0$.

Применения

В работе [3] показано, что движение заряженных частиц в поле с потенциалом вида линейной суперпозиции с произвольными коэффициентами

$$V(x, y) = \alpha\varphi + \beta\psi \tag{8}$$

приводится к аддитивному разделению переменных в уравнении Гамильтона–Якоби в сфероидальных координатах. В уравнении Шредингера с потенциальной функцией (8) также происходит разделение переменных, что может быть продуктивно использовано для создания новых квантово-механических моделей в физике твердого тела. Кроме того, обобщенный кулоновский центр φ можно применить в задаче синтеза энергоанализатора дефлекторного типа, обобщающего классический сферический дефлектор. Потенциал ψ физически соответствует варианту одиночной линзы, состоящей из заземленной диафрагмы, к отверстию которой примыкает заряженный до некоторого потенциала тор с почти круговым сечением. Эта линза замечательна тем, что ход траекторий в ней точно выражается в эллиптических функциях не только в параксиальной области [4], но и во всем пространстве [3], что обычно облегчает синтез систем для транспортировки полых конических пучков в энергоанализе. Базисный ряд кольцевых мультиполей с элементарным представлением в сочетании с известными классическими полевыми структурами: полями соосных цилиндров, концентрических сфер, гиперболоидов вращения и т.п. позволяет синтезировать электронно-оптические системы различного назначения, и в первую очередь — электростатические энергоанализаторы и линзовые устройства транспортировки полых и сплошных пучков. В предлагаемом подходе нет необходимости решения сложных краевых задач, поэтому расчет траекторий можно проводить с большой скоростью и точностью.

Список литературы

[1] *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959.
[2] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
[3] *Голиков Ю.К.* Определение электрических полей по заданным характеристикам движения заряженных и дипольных частиц. Докт. дис. Л., 1984.
[4] *Глазер В.* Основы электронной оптики. М.: ГИТТЛ, 1957.