01;03

Об аналогии между одной задачей магнитной гидродинамики и проблемой Бенара в приближении Буссинеска

© *Н.Б. Волков, Н.М. Зубарев, О.В. Зубарева*

Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург

Поступило в Редакцию 23 ноября 1998 г.

Показано, что уравнения движения, записанные в продольной плоскости симметрии жидкометаллического токонесущего проводника прямоугольного сечения тождественны уравнениям, описывающим термоконвекцию в подогреваемом снизу плоском слое жидкости в приближении Буссинеска. Выявлены основные параметры, определяющие порог конвективной неустойчивости в жидком металле с током, развивающейся под действием сил Лоренца.

В работе [1] была высказана гипотеза об аналогии между начальными стадиями развития турбулентности при термоконвекции и электрического взрыва проводника с током. В дальнейшем эта аналогия использовалась для объяснения различных физических эффектов в токонесущих плазмоподобных средах: стратификации проводника с током [2], формирования горячих точек [3], прерывания электрического тока [4,5]. Однако, несмотря на свою плодотворность, для рассмотренных в [1–5] задач указанная аналогия носила лишь качественный характер. В настоящей работе мы покажем, что уравнения магнитной гидродинамики, записанные в продольной плоскости симметрии токонесущего жидкометаллического проводника с несоизмеримыми размерами в поперечном сечении, тождественны уравнениям, описывающим формирование так называемых валов Бенара при термоконвекции в приближении Буссинеска.

Итак, рассмотрим жидкометаллический проводник следующей геометрии: сечение проводника — прямоугольник со сторонами $2b$ и $2a$, которые соответствуют осям y и x прямоугольной системы координат. Электрический ток течет вдоль оси z, являющейся осью симметрии проводника. Будем считать для простоты, что $a \ll b$ (в пределе $a/b \to 0$ это простейший случай плоской геометрии).

Будем считать проводящую жидкость несжимаемой, а ее кинетические коэффициенты постоянными. Уравнения магнитной гидродинамики в таком случае имеют вид:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \frac{1}{4\pi\rho}((\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H}) + \nu\nabla^2\mathbf{v}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{H} = (\mathbf{H} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \nu_m\nabla^2\mathbf{H}, \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \qquad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \tag{3}$$

где $\mathbf{v}$, $\mathbf{H}$, P — соответственно скорость, напряженность магнитного поля и давление, ρ — плотность, $\nu = \eta/\rho$ — кинематическая вязкость (η — динамическая вязкость), $\nu_m = c^2(4\pi\sigma)^{-1}$ — магнитная вязкость, σ — проводимость, c — скорость света.

Поскольку в первую очередь развиваются возмущения, не искривляющие силовые линии магнитного поля, будем считать, что все поля симметричны относительно плоскости $y = 0$. В таком случае, применяя операцию rot к уравнению (2), получим в плоскости симметрии проводника $y = 0$:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_z\frac{\partial}{\partial z} - \nu\nabla^2\right] \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) = \frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial H_x}{\partial y}\frac{\partial H_y}{\partial z}, \tag{4}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_z\frac{\partial}{\partial z} - \nu_m\nabla^2\right] \cdot H_y = 0, \tag{5}$$

где ∇^2 — трехмерный оператор Лапласа. Отметим, что при получении уравнений (4) и (5) не делалось никаких упрощающих предположений, кроме учета симметрий решений.

Представим магнитное моле $\mathbf{H}$ в виде суммы невозмущенного магнитного поля, соответствующего отсутствию гидродинамического движения в проводнике $\mathbf{v} = 0$, и возмущения магнитного поля:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H_0} + \mathbf{h}.$$

В линейном по возмущениям $\mathbf{v}$ и $\mathbf{h}$ приближении система уравнений (4)–(5) перепишется в виде:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \nu\nabla^2\right] \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) = \frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial H_{0x}}{\partial y}\frac{\partial h_y}{\partial z}, \tag{6}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \nu_m\nabla^2\right] \cdot h_y = H_{0y}\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial H_{0y}}{\partial x}v_x. \tag{7}$$

Невозмущенное распределение напряженности магнитного поля по проводнику определяется законом Био и Савара [6]:

$$\mathbf{H}_0 = \int\limits_V \frac{[\mathbf{j}\times\mathbf{R}]}{cR^3}dV = \int\limits_S \frac{2[\mathbf{j}\times\mathbf{r}]}{cr^2}dS,$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор, проведенный из элемента объема проводника dV в точку наблюдения, $\mathbf{r}$ — проекция этого вектора на поперечное сечение проводника (плоскость $\{x, y\}$), а dS — элемент площади этого сечения.

Считая полный ток I через проводник постоянным, невозмущенное распределение плотности тока — однородным, получаем для невозмущенного магнитного поля вблизи плоскости симметрии проводника $y = 0$ в основном порядка разложения по малому параметру a/b:

$$\mathbf{H}_0 = \left\{-\frac{2Iy}{cb^2}, \frac{\pi Ix}{abc}, 0\right\}. \tag{8}$$

Введем пару функций $h(x, z, t) = h_y|_{y=0}$ и $\psi(x, z, t) = \omega_y|_{y=o}$, где векторное поле $\mathbf{w}$ задается уравнением $(\nabla\times\mathbf{w}) = \mathbf{v}$ (вектор $\mathbf{w}$ всегда можно выбрать так, чтобы он в плоскости $y = 0$ имел лишь направленную по оси y компоненту). Используя эти функции, а также учитывая, что пространственный масштаб изменения величин вдоль оси y много больше, чем вдоль осей x и z, получаем из (6) и (7) в основном порядке разложения по a/b следующую систему уравнений, из которой исключена пространственная переменная y:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta\right] \cdot \Delta\psi = \frac{I}{2\pi c\rho b^2}\frac{\partial h}{\partial z}, \tag{9}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \nu_m\Delta\right] \cdot h = \frac{\pi I}{cab}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \tag{10}$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2$ — двухмерный оператор Лапласа. Эти уравнения с точностью до замены возмущенного магнитного поля температурным совпадают с уравнениями, описывающими одномерную термоконвекцию в подогреваемом снизу плоском слое жидкости в приближении Буссинеска [7]. Это свидетельствует о том, что в резистивной вязкой токонесущей среде с закрепленной границей под действием сил Лоренца могут развиваться крупномасштабные гидродинамические и токовые вихревые структуры с характерным размером порядка поперечного размера системы. В качестве основного отличия подобных структур от термоконвективных можно указать на наличие выделенного направления (направления, в котором течет электрический ток), ориентирующего пространственные структуры.

Введем теперь по аналогии с задачей о термоконвекции, где в качестве управляющего параметра использовалось число Рэлея [8], его аналог:

$$\mathcal{R} \equiv \frac{8I^2a^3}{c^2b^3\nu\nu_m\rho}. \tag{11}$$

Критическое значение этого параметра, то есть значение при котором исходно невозмущенное состояние системы становится неустойчивым, определяется характером граничных условий. Так $\mathcal{R}_c = 656$ для свободных границ [9], и $\mathcal{R}_c = 1708$ для одной твердой границы, а другой — свободной [8], и т. д. Из (11) ясно, что граница устойчивости определяется величиной полного тока через проводник, причем величина порогового тока задается следующим выражением:

$$I_c = c\left(\frac{b}{2a}\right)^{3/2}\sqrt{\mathcal{R}_c\nu_m\eta}. \tag{12}$$

Полагая, например, что отношение характерных размеров в сечении проводника $b/a = 10$, и, учитывая, что для большинства жидких металлов $\eta \sim 10^{-2}$ Pa и $\nu_m \sim 10^3$ cm^2/s, получим, что величина I_c исчисляется единицами килоампер, что по порядку величины соответствует пороговым значениям прерывания тока в эвтектике [4,5], а также характерным токам в экспериментах по электрическому взрыву проводников [2], сопровождающегося развитием крупномасштабных неустойчивостей. Следует заметить, что для жидкометалллических проводников цилиндрической геометрии конвективные структуры (кольцевые вихри) могут зарождаться лишь при нарастающем токе через проводник [2,5] —

при постоянном токе, в отличие от рассмотренной в настоящей работе ситуации, спонтанное появление структур невозможно.

Также отметим, что, как видно из выражения (12), неустойчивость возможна лишь при наличии кривизны линий магнитного поля (при $b \to \infty$ критические значения токов становятся бесконечно большими). Это связано с тем, что в этом пределе сила Лоренца становится потенциальной и, следовательно, не оказывает влияния на вихревое движение среды.

Интересно, что если формально считать возущение h_y вблизи плоскости симметрии зависящим лишь от пространственных переменных x и z (не зависящим от y), то нелинейные уравнения движения принимают вид:

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} = \frac{\partial(\Delta\psi, \psi)}{\partial(x, z)} + \frac{I}{2\pi c\rho b^2}\frac{\partial h}{\partial z} + \nu\Delta\Delta\psi, \qquad (13)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial(h, \psi)}{\partial(x, z)} + \frac{\pi I}{cab}\frac{\partial \psi}{\partial z} + \nu_m \Delta h, \qquad (14)$$

где $\partial(f, g)/\partial(x, z) = (\partial f/\partial x)(\partial g/\partial z) - (\partial f/\partial z)(\partial g/\partial x)$ — Якобиан. Эта система идентична системе, описывающей нелинейную динамику возмущенных полей температуры и скорости в теории эффекта Бенара [7] (формирования так называемых валов Бенара).

Таким образом, нами показано, при каких условиях применима аналогия с проблемой Бенара в магнитной гидродинамике несжимаемой проводящей жидкости с конечными вязкостью и проводимостью.

Нам приятно выразить признательность А.М. Искольдскому за интерес к работе и плодотворные дискуссии, а также Российский фонд фундаментальных исследований за частичную финансовую поддержку (проект 97–02–16177).

Список литературы

[1] *Волков Н.Б., Искольдский А.М.* // Письма в ЖЭТФ. 1990. Т. 51. С. 560.
[2] *Iskoldsky A.M., Volkov N.B. and Zubarev N.M.* // Phys. Lett. A. 1996. V. 217. P. 330.
[3] *Iskoldsky A.M., Volkov N.B. and Zubareva O.V.* // Physica D. 1996. V. 91. P. 182.
[4] *Волков Н.Б., Зубарев Н.М., Зубарев О.В., Шкатов В.Т.* // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. В. 13. С. 43.

[5] *Volkov N.B., Zubarev N.M., Zubareva O.V., Shkatov V.T.* // Physica D. 1997. V. 109. P. 315.
[6] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
[7] *Гершунин Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А.* Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989.
[8] *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
[9] *Rayleigh* // Phil. Mag. 1916. V. 32. P. 529.