01

К теории многократного рассеяния в среде фрактального типа

© В.В. Учайкин, Д.А. Коробко

Ульяновский государственный университет

Поступило в Редакцию 17 ноября 1998 г.

Рассматривается многократное рассеяние частиц со степенным распределением пробегов, соответствующим фрактальной среде. В малоугловом приближении получено выражение для углового распределения частиц, прошедших заданный путь. Приведены результаты численных расчетов.

В работах [1,2] теоретически исследуется рассеяние волн на неоднородных самоподобных структурах (фракталах). Актуальность таких расчетов мотивируется исследованием таких структур, как аморфные полимеры, коллоидные агрегаты и агрегаты, образующиеся в воздухе из микроскопических частиц твердой фазы,: пористые материалы, например пористые аэрогели, и др. [3]. В настоящей работе рассматривается многократное рассеяние частиц во фрактальной среде, представляющей собой случайное распределение рассеивающих центров с далекими корреляциями степенного типа [4].

В малоугловом приближении отклонение частицы от первоначального направления описывается двумерным вектором θ (см., например, [5]). Пусть $\sigma(\theta)$ — угловое распределение частицы при однократном рассеянии на отдельном атоме, $\int \sigma(\theta) d\theta = 1$, тогда распределение частицы, испытавшей n рассеяний, дается многократной сверткой таких распределений:

$$\sigma^{(n+1)}(\theta) = \int \sigma(\theta')\sigma^{(n)}(\theta - \theta')d\theta', \tag{1}$$

где $\sigma^{(0)}(\theta) \equiv \delta(\theta)$. Угловое распределение частиц, прошедших путь x, запишется в виде

$$\Psi(\theta, x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)\sigma^{(n)}(\theta), \tag{2}$$

где $p_n(x)$ — вероятность того, что на пути x частица испытает ровно n рассеяний. Последняя и характеризует среду. Она связана с плотностью распределения длины свободного пробега $q(x)$ соотношением

$$p_n(x) = \int_0^x Q(x - x')q^{(n)}(x')dx', \tag{3}$$

где

$$Q(x) = \int_x^\infty q(x')dx'$$

есть вероятность того, что случайный пробег превысит значение x, а $q^{(n)}(x)$ — многократная сверта распределений $q(x)$, описывающая распределение координаты точки n-го столкновения. В этих обозначениях распределение

$$\Psi(\theta, x) = \sum_{n=0}^\infty \sigma^{(n)}(\theta) \int_0^x Q(x - x')q^{(n)}(x')dx'. \tag{4}$$

В классической теории многократного рассеяния рассеивающие центры предполагаются расположенными независимо друг от друга с постоянной (в случае однородной среды) средней плотностью. Распределение свободного пробега в этом случае имеет вид

$$q_0(x) = \mu \exp(-\mu x), \tag{5}$$

где μ — линейный коэффициент рассеяния, обратный среднему пробегу. Поскольку $q_0^{(n)}(x) = \mu(\mu x)^{n-1} \exp(-\mu x)/(n-1)!$ и $Q_0(x) = \exp(-\mu x)$, угловое распределение (2) описывается обобщенным распределением Пуассона [6]

$$\Psi_0(\theta, x) = \exp(-\mu x) \sum_{n=0}^\infty \frac{(\mu x)^n}{n!} \sigma^{(n)}(\theta). \tag{6}$$

При $x \to \infty$ среднее значение случайного числа слагаемых растет как μx, а его относительные флуктуации убывают $\sim (\mu x)^{-1/2}$. Поскольку при больших n

$$\sigma^{(n)}(\theta) \sim \frac{1}{2\pi n\langle\Theta^2\rangle} \exp\left\{-\theta^2/[2n\langle\Theta^2\rangle]\right\}, \tag{7}$$

где
$$\langle \Theta^2 \rangle = \int \theta^2 \sigma(\theta) d\theta$$
— средний квадрат угла однократного расссеяния, угловое распределение частиц на больших глубинах имеет вид
$$\Psi_0(\theta, x) \sim \frac{1}{2\pi\mu x \langle \Theta^2 \rangle} \exp\left\{-\theta^2/[2\mu x \langle \Theta^2 \rangle]\right\}, \qquad x \to \infty, \tag{8}$$
полученный Э. Ферми в задаче о многократном кулоновском рассеянии заряженных частиц [7].

Фрактальное распределение случайных точек $\{x_i\}$ на прямой характеризуется степенной зависимостью среднего числа $\bar{N}(x)$ точек на отрезке $[x_i, x_i + x]$, один из концов которого совпадает с одной из точек фрактала:
$$\bar{N}(x) \sim Ax^{\alpha}, \qquad x \to \infty, \tag{9}$$
где $\alpha < 1$ — фрактальная размерность (при $\alpha = 1$ имеем однородный пуассоновский ансамбль, рассмотренный выше). В этом случае
$$q(x) \sim \alpha B x^{-\alpha-1}, \quad x \to \infty, \tag{10}$$
и, согласно теории устойчивых распределений [8],
$$q_0^{(n)}(x) \sim [nB\Gamma(1-\alpha)]^{-1/\alpha} g^{(\alpha)}((nB\Gamma(1-\alpha))^{-1/\alpha} x), \quad n \to \infty, \tag{11}$$
где $g^{(\alpha)}(x)$ — односторонняя плотность устойчивого закона, трансформанта Лапласа которого (в форме B) имеет вид
$$\tilde{g}^{(\alpha)}(\lambda) \equiv \int_0^{\infty} g^{(\alpha)}(x) e^{-\lambda x} dx = \exp(-\lambda^{\alpha}). \tag{12}$$
Плотности $g^{(\alpha)}(x)$, подобно нормальной плотности, описывают предельное распределение суммы независимых случайных величин, но в отличие от нормальной они относятся к распределениям типа (10), математическое ожидание которых бесконечно.

Вводя обозначения
$$Q^{(n)}(x) = \int_x^{\infty} q^{(n)}(x') dx', \qquad G^{(\alpha)}(x) = \int_0^{x} g^{(\alpha)}(x') dx',$$

запишем вероятность того, что на пути x частица испытает n столкновений:

$$p_n(x) = Q^{(n+1)}(x) - Q^{(n)}(x) = G^{(\alpha)}\Big((nB\Gamma(1-\alpha))^{-1/\alpha}x\Big)$$

$$- G^{(\alpha)}\Big([(n+1)B\Gamma(1-\alpha)]^{-1/\alpha}\, x\Big). \qquad (13)$$

Представляя аргумент вычитаемой функции в виде

$$\big[(n+1)B\Gamma(1-\alpha)\big]^{-1/\alpha}x = [nB\Gamma(1-\alpha)]^{-1/\alpha}x$$

$$- [nB\Gamma(1-\alpha)]^{-1/\alpha}x(n\alpha)^{-1} \qquad (14)$$

и разлагая ее в ряд, находим асимптотическое выражение

$$p_n(x) \sim [nB\Gamma(1-\alpha)]^{-1/\alpha}x(n\alpha)^{-1}g^{(\alpha)}$$

$$\times \Big([nB\Gamma(1-\alpha)]^{-1/\alpha}x\Big), \qquad x \to \infty. \qquad (15)$$

Далее, вновь используя (7) и переходя в выражении (2) от суммирования по n к интегрированию попеременной

$$\tau = [nB\Gamma(1-\alpha)]^{-1/\alpha}x,$$

приходим к распределению

$$\Psi(\theta, x) \sim (4Dx^{\alpha})^{-1} f^{(\alpha)}\big(|\theta|/\sqrt{4Dx^{\alpha}}\,\big), \qquad x \to \infty, \qquad (16)$$

где

$$D = \frac{\langle \Theta^2 \rangle \Gamma(1+\alpha)}{2B(\Gamma(1-\alpha))^2},$$

а

$$f^{(\alpha)}(u) = \pi^{-1} \int\limits_0^{\infty} d\tau e^{-u^2\tau^{\alpha}} \tau^{\alpha} g^{(\alpha)}(\tau), \qquad \alpha < 1. \qquad (17)$$

При $\alpha \to 1 g^{(\alpha)}(\tau) \to \delta(\tau - 1)$ и $f^{\alpha}(u)$ переходит в распределение Гаусса, но при $\alpha < 1$ мы получаем распределение иной формы: в нуле оно имеет логарифмическую особенность

$$f^{\alpha}(u) \sim [2\pi\Gamma(1-\alpha)]^{-1}|\ln u|, \qquad u \to 0, \qquad (18)$$

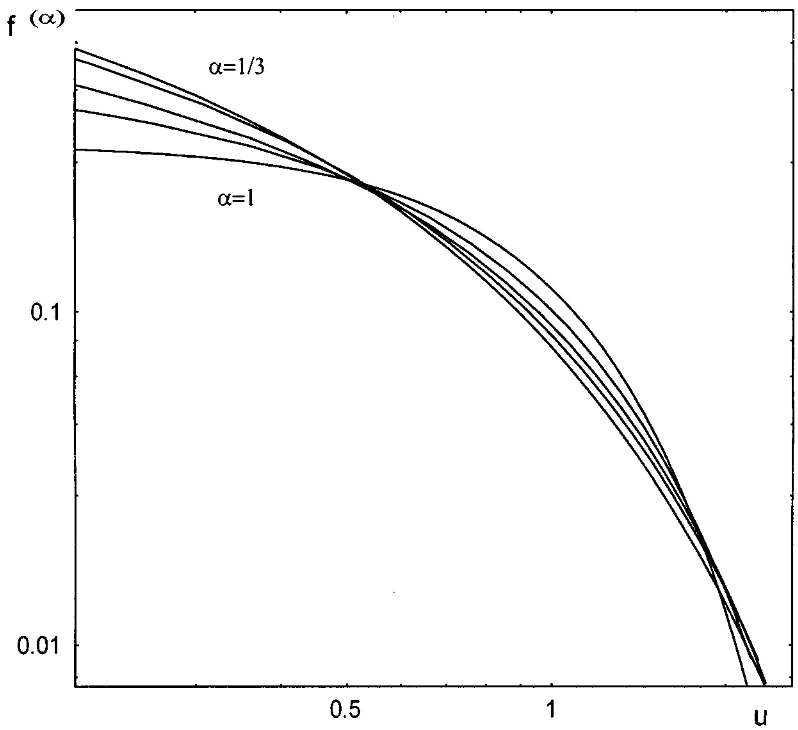

Рис. 1. Распределения $f^{\alpha}(u)$ для показателей $\alpha = 1/3, 1/2, 2/3, 5/6, 1$.

а за пределами этой области описывается асимптотическим выражением

$$f^{\alpha}(u) \sim \frac{\alpha^{(3\alpha-2)/2(2-\alpha)}}{\pi\sqrt{2-\alpha}} u^{-2(1-\alpha)/(2-\alpha)} \times \exp\left\{-(2-\alpha)\alpha^{\alpha/(2-\alpha)} u^{2/(2-\alpha)}\right\}. \tag{19}$$

Результаты численных расчетов по формуле (17) для нескольких показателей α, включая предельный случай $\alpha = 1$, представлены на рис. 1. Среднеквадратичный угол многократного рассеяния вычисляется аналитически

$$\overline{\theta^2}(x) = \frac{4}{\Gamma(\alpha+1)} Dx^{\alpha}. \tag{20}$$

Угловое распределение многократно рассеянных частиц во фрактальной среде по сравнению с однородной отличается более медленным ростом ширины $\propto x^{\alpha/2}$ вместо $\propto x^{1/2}$. Форма распределения (16) отличается от

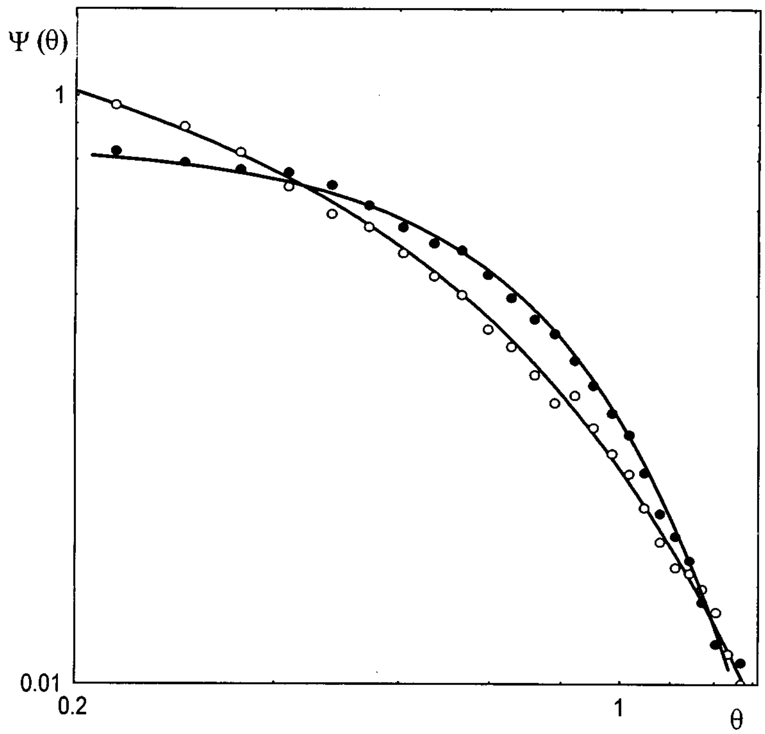

Рис. 2. Угловые распределения многократно рассеянных частиц $\Psi_0(\theta)$ (8) и $\Psi(\theta)$ (16) при $\alpha = 1/2$ для толщины, соответствующей в среднем 500 столкновениям. Среднеквадратичные углы однократного рассеяния $\langle\Theta^2\rangle$ равны. Кружками обозначены результаты моделирования Монте-Карло (10 000 историй). Темные соответствуют однородной среде (экспоненциальному распределению пробегов (5)), а светлые — фрактальной (степенному распределению пробегов (10)).

нормальной более высокой концентрацией вероятности в области малых и больших углов (рис. 2).

Как ширина, так и форма углового распределения частиц, многократно рассеянных во фрактальной среде, могут быть использованы для экспериментального определения фрактальной размерности α неоднородной структуры.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 98–01–03307).

Список литературы

[1] *West B.J.* // J. Opt. Soc. Am. A. 1990. V. 6. N 7. P. 1074.
[2] *Зосимов В.В., Лямшев Л.М.* // УФН. 1995. Т. 165. № 4. С. 361.
[3] *Фракталы* в физике / Под ред. Л. Пьетронеро, Э. Тозатти. М.: Мир, 1988. 672 с.
[4] *Uchaikin V.V., Gusarov G.G.* // Journ. Math. Phys. 1997. V. 38. N 5.
[5] *Кольчужкин А.И., Учайкин В.В.* Введение в теорию прохождения частиц через вещество. М.: Атомиздат, 1978. 256 с.
[6] *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее применения. Т. 2. М.: Мир, 1984. 752 с.
[7] *Fermi E.* // Phys. Rev. 1940. V 63. P. 485.
[8] *Золотарев В.М.* Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983. 304 с.