01;07

Саморепродукция многомодовых пучков Гаусса–Эрмита

© *С.Н. Хонина, В.В. Котляр, В.А. Сойфер*

Институт систем обработки изображений РАН, Самара

Поступило в Редакцию 25 ноября 1998 г.

Получено и проанализировано условие для саморепродукции многомодовых пучков Гаусса–Эрмита. Рассмотрены также плоскости частичной саморепродукции. Приведен численный пример.

При распространении в однородном пространстве некоторых типов когерентных световых полей могут наблюдаться эффекты самовоспроизведения, т. е. повторения распределения интенсивности в поперечном сечении. Повторение или саморепродукция световых полей с поперечной периодической структурой называется эффектом Тальбота [1]. Общее условие, которым должны удовлетворять световые поля, обладающие продольной периодичностью, получил Монтгомери [2].

Одномодовые световые пучки являются примерами самовоспроизводящихся пучков с периодом, равным нулю. Это моды Бесселя [3], а также сохраняющие подобие моды Гаусса–Эрмита и Гаусса–Лагерра [4]. В [5–8] получены условия для вращения модовых световых пучков, которые также являются примерами полей с продольной периодичностью (с точностью до масштаба). В [9] получено условие, при котором многомодовый пучок Гаусса–Лагерра будет с точностью до масштаба саморепродуцироваться по интенсивности на некоторых расстояниях.

В данной работе аналогичное условие получено для многомодовых пучков Гаусса–Эрмита (ГЭ). С помощью численного моделирования показан эффект саморепродукции для конкретных модовых пуков.

Рассмотрим многомодовый пучок ГЭ, распространяющийся в свободном пространстве. Комплексная амплитуда такого пучка может быть записана в виде

$$E(x,y,z) = \sum_{m,n=0}^{N} C_{mn}\Psi_{mn}(x,y,z), \qquad (1)$$

где

$$\Psi_{mn}(x,y,z) = \frac{\omega_0}{\omega(z)} \exp\left[i(m+n+1)\eta(z) - \frac{ik(x^2+y^2)}{2R(z)} - \frac{x^2+y^2}{\omega^2(z)}\right] \times H_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{\omega(z)}\right) H_n\left(\frac{\sqrt{2}y}{\omega(z)}\right), \tag{2}$$

$$\omega(z) = \omega_0\left(1+\frac{z^2}{z_0^2}\right)^{1/2}, \quad R(z) = z\left(1+\frac{z_0^2}{z^2}\right), \quad \eta(z) = \mathrm{arctg}\left(\frac{z}{z_0}\right), \tag{3}$$

z — продольная, а (x,y) — поперечные декартовы координаты, ω_0 — радиус гауссового пучка (ГП) при $z = 0$, $\omega(z)$ — радиус ГП при любом z, $R(z)$ — радиус кривизны ГП, $z_0 = \frac{k\omega_0^2}{2}$ — параметр Рэлея ГП, $H_m(x)$ — многочлен Эрмита, k — волновое число, C_{mn} — комплексные коэффициенты.

Выражение для интенсивности света в поперечном сечении пучка ГЭ имеет вид

$$I(x,y,z) = \frac{\omega_0^2}{\omega^2(z)} \exp\left[-2\frac{x^2+y^2}{\omega^2(z)}\right] \left\{ \sum_{m,n=0}^{N} |C_{mn}|^2 H_m^2\left(\frac{\sqrt{2}x}{\omega(z)}\right) H_n^2\left(\frac{\sqrt{2}y}{\omega(z)}\right) + \sum_{m,n}^{N}\sum_{m',n'}^{N} |C_{mn}C_{m'n'}| H_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{\omega(z)}\right) H_{m'}\left(\frac{\sqrt{2}x}{\omega(z)}\right) \times H_n\left(\frac{\sqrt{2}y}{\omega(z)}\right) H_{n'}\left(\frac{\sqrt{2}y}{\omega(z)}\right) \cos\Phi_{m'n'}^{mn} \right\}, \tag{4}$$

где

$$\Phi_{m'n'}^{mn} = \arg C_{mn} - \arg C_{m'n'} + [(m-m') + (n-n')]\eta(z). \tag{5}$$

Чтобы распределение интенсивности (4) на расстоянии z_1 с точностью до масштаба повторилось на расстоянии z_2 нужно, чтобы функции (5) в каждом слагаемом в уравнении (4) удовлетворяли условию

$$\Phi_{m'n'}^{mn}(z_2) = \Phi_{m'n'}^{mn}(z_1) + 2\pi l, \qquad l = 1,2,3,\ldots \tag{6}$$

Подставив в уравнение (6) функцию (5), получим выражение для расстояния z_2:

$$z_2 = \frac{z_1 + z_0 \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi l}{p}\right)}{1 - \frac{z_1}{z_0} \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi l}{p}\right)}, \tag{7}$$

где

$$p = (m - m') + (n - n'). \tag{8}$$

Присутствие в формуле (7) параметра l показывает, что для пары мод с номерами (m, n), (m', n') может существовать несколько расстояний, на которых будет повторяться поперечное распределение интенсивности их суммы, зафиксированное на некотором z_1.

Рассмотрим пример для пары мод с $p = 20$ и найдем расстояния, на которых повторится распределение интенсивности, зафиксированное для $z_1 = 0$:

$$z_{l,p} = z_0 \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi l}{p}\right), \qquad l = 1, 2, 3, \ldots \tag{9}$$

В этом случае получается пять повторений с возрастающим периодом:

$$z_{1,20} = 0.3249 \cdot z_0, \quad z_{2,20} = 0.7265 \cdot z_0, \quad z_{3,20} = 1.3764 \cdot z_0,$$

$$z_{4,20} = 3.0777 \cdot z_0, z_{5,20} = \infty,$$

одно из которых появляется на бесконечности. Понятно, что все изменения, возникающие на интервале $[0, z_{1,p})$, будут повторяться на последующих периодах $[z_{l,p}, z_{l+1,p})$ с замедляющейся с ростом l скоростью.

Далее рассмотрим способы выбора номеров мод для самовоспроизводящегося...

Если выбрана пара мод с номерами (m, n), (m', n'), $p_0 = (m - m') + (n - n')$, то добавление мод с теми же фазовыми скоростями, а именно с номерами (m'', n''), такими что

$$m'' + n'' = m + n \qquad \text{или} \qquad m'' + n'' = m' + n', \tag{10}$$

позволит сформировать пучок, саморепродуцирующийся на тех же расстояниях (7), что и для первоначальной пары мод. Это обусловлено тем, что дополнительные моды будут давать только два значения $p' = p_0$ и $p' = 0$. При $p = 0$ в (5) пропадает зависимость от z, Расположение точек саморепродукции

Значение $\|p_0\|$	Точки саморепродукции z_{l,p_0}
$\|p_0\| < 4$	Нет
$\|p_0\| = 4$	$z_{1,p_0} = \infty$
$4 < \|p_0\| < 8$	$z_0 < z_{1,p_0} < \infty$
$\|p_0\| = 8$	$z_{1,p_0} = z_0$, $z_{2,p_0} = \infty$
$8 < \|p_0\| < 12$	$0 < z_{1,p_0} < z_0 < z_{2,p_0} < \infty$
$\|p_0\| = 12^*$	$0 < z_{1,p_0} < z_0 < z_{2,p_0} < \infty$, $z_{3,p_0} = \infty$

*Далее картина повторяется с кратным увеличением количества точек саморепродукции.

что характерно для стабильного пучка. Примером такого многомодового пучка с $p_0 = 20$ может служить композиция из семи мод $(0,1) + (1,0) + (10,11) + (11,10) + (9,12) + (8,13) + (0,20)$.

Еще одна степень свободы в выборе номеров дополнительных мод появляется, если рассмотреть следующее условие повторения для выражения (7):

$$z_{l,p} = z_{l',p'}. \tag{11}$$

Так, если выбрана пара мод с номерами (m,n), (m',n'), $p_0 = (m - m') + (n - n')$, то для повторения на тех же расстояниях разность номеров дополнительных мод должна быть следующей:

$$p = |p_0|q, \quad q = 0, 1, 2, \dots, \tag{12}$$

и номера дополнительных мод находятся из следующего соотношения:

$$m'' + n'' = m + n + |p_0|q, \quad q = 0, 1, 2, \dots \tag{13}$$

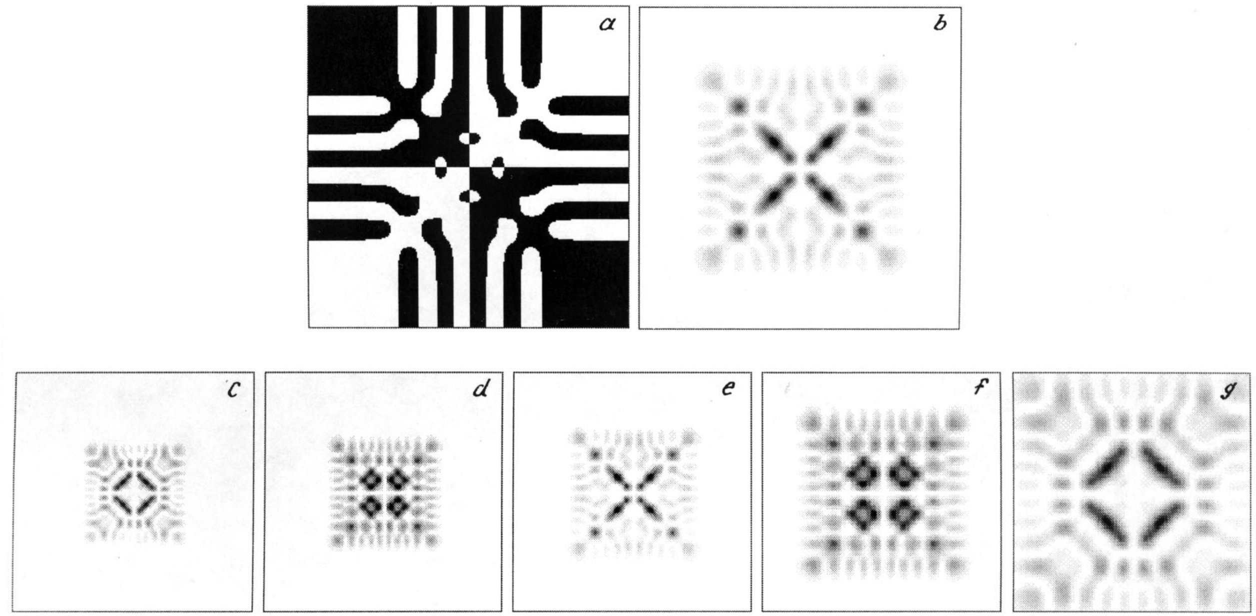
Например, если пучок $(1,1) + (5,5)$ повторяет свое начальное (при $z_1 = 0$) поперечное распределение интенсивности на расстоянии (см.(9)):

$$z_{1,8} = z_0 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = z_0,$$

то и пучок $(1,1) + (0,2) + (5,5) + (4,6) + (9,9) + (8,10)$ повторится на этом расстоянии:

$$z_{1,8} = z_{2,16} = z_0.$$

Интересно, что в зависимости от значения $|p_0|$ в (13) можно предсказать расположение повторений начального (при $z_1 = 0$) распределения интенсивности относительно z_0 (см. таблицу).



Бинарная фаза (a) (белый — 0, черный — π), интенсивность (b) в плоскости $z = 0$, распределения интенсивности на плоскостях: $z = 20.71$ mm (c), $z = 33.16$ mm (d), $z = 49.63$ mm (e), $z = 74.27$ mm (f), $z = 120.71$ mm (g).

Если расстояния z_1 и z_2 в (7) заданы, то номера мод ГЭ, которые должны входить в пучок, чтобы он имел подобные поперечные распределения интенсивности на этих расстояниях, будут удовлетворять условию

$$\frac{2\pi l}{p} = \operatorname{arctg}\left[\frac{z_0(z_2 - z_1)}{z_2 z_1 + z_0^2}\right], \quad |p| > 4l. \tag{14}$$

Из уравнения (14) следует, что расстояния z_1 и z_2 нельзя задавать произвольно.

Кроме расстояний саморепродукции распределения интенсивности на расстоянии z_1 могут быть интересны расстояния "частичного" периода (4). Здесь можно провести аналогию с "частичным" периодом Тальбота для решеток [11]. Расстояния для q-й части периода саморепродукции будут выглядеть следующим образом ($z_1 = 0$):

$$z_{l,p}^q = z_0 \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{q} \cdot \frac{l}{p}\right), \quad l = 1, 2, 3, \dots \tag{15}$$

Значение $q = 2$ соответствует "половинному" периоду. В этом случае при нечетных $l = 2s + 1$, $s = 0, 1, 2, \dots$ в выражении (4) вместо добавления перекрестных членов происходит их вычитание: $\cos(x \pm \pi l) = -\cos(x)$, что можно определить как квазиконтрастирование. Аналогичная ситуация наблюдается на половине периода Тальбота для решеток [11], когда сдвиг первоначального изображения решетки выглядит как ее контрастирование.

На рисунке приведены результаты численного моделирования для 3-модового пучка ГЭ $(1, 1) + (5, 5) + (9, 9)$. Все моды входят в состав пучка с одинаковыми весами. При этом использовались следующие параметры: размерность массивов 512×512 пикселов, область изменения аргументов $x, y \in [-0.5\,\text{mm}, 0.5\,\text{mm}]$, длина волны $\lambda = 0.63\,\mu\text{m}$, радиус ГП $\omega_0 = 0.1\,\text{mm}$, параметр Рэлея $z_0 = \frac{k\omega_0^2}{2} = 49.63\,\text{mm}$.

Используя выражение (15), можно получить следующие расстояния для саморепродукции (при $q = 2$, l — четные) и квазиконтраста (при $q = 2$, l — нечетные) ($z_1 = 0$):

$$z_{2,8}^2 = z_0 \operatorname{tg}\left(\pi\frac{1}{4}\right) = z_0 \approx 49.63, \quad z_{4,8}^2 = z_0 \operatorname{tg}\left(\pi\frac{1}{2}\right) = \infty,$$

$$z_{1,8}^2 = z_0 \operatorname{tg}\left(\pi\frac{1}{8}\right) \approx 20.71, \quad z_{3,8}^2 = z_0 \operatorname{tg}\left(\pi\frac{3}{8}\right) \approx 120.71.$$

Для четвертей периода будут следующие расстояния (при $q = 4$, $l = 2s + 1$, $s = 0, 1, 2 \ldots$):

$$z_{1,8}^4 = z_0 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{8}\right) \approx 9.87, \quad z_{3,8}^4 = z_0 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{3}{8}\right) \approx 33.16,$$

$$z_{5,8}^4 = z_0 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{5}{8}\right) \approx 74.27, \quad z_{7,8}^4 = z_0 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{7}{8}\right) \approx 249.51.$$

На рис. 1, a показана бинарная фаза (белый — 0, черный — π), а на рис. 1, b — интенсивность в плоскости $z = 0$ (размер соответствует размеру апертуры 1 mm). На последующих рисунках показаны распределения интенсивности на разных расстояниях: $z_{1,8}^2 = 20.71$ mm (c), $z_{3,8}^4 = 33.16$ mm (d), $z_{2,8}^2 = z_0 = 49.63$ mm (e), $z_{5,8}^4 = 74.27$ mm (f), $z_{3,8}^2 = 120.71$ mm (g) (размер каждого кадра равен 1.6 mm).

Из рис. 1 видно, что картины интенсивности при $z_1 = 0$ (b) и $z = z_0$ (e) совпадают с точностью до масштаба. Такое же совпадение наблюдается для расстояний полупериода $z = 20.71$ mm (c) и $z = 120.71$ mm (g). Их совпадение можно предсказать и с помощью формулы (7).

Для четверти периода подобие картины распределения интенсивности на рис. 1, d и f возможно только при $\arg C_{mn} - \arg C_{m'n'} = 0$ (что и было выполнено в нашем случае).

Таким образом, в работе получено условие ((формулы (7), (8)), которое требуется наложить на номера мод пучка ГЭ, чтобы имел место эффект саморепродукции. Рассмотрено также условие частичной саморепродукции. Приведен численный пример для 3-модового пучка ГЭ с двумя плоскостями саморепродукции.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 98–01–00894, 99–01–00430).

Список литературы

[1] *Talbot H.F.* // Phil. Mag. 1936. V. 9. P. 401.
[2] *Montgomery W.D.* // J. of Opt. Soc. Am. 1967. V. 57. N 6. P. 772–778.
[3] *Durnin J.* // J. of Opt. Soc. Am. A. 1987. V. 4. N 4. P. 651–654.
[4] *Ярив А.* Введение в оптическую электронику. М.: Высш. школа, 1983.
[5] *Abramochkin E., Volostnikov V.* // Opt. Commun. 1993. V. 102. P. 336–350.
[6] *Schechner Y.Y., Piestun R., Shamir J.* // Physical Review E. 1996. V. 54. N 1. P. 50–53.

[7] *Kotlyar V.V., Soifer V.A., Khonina S.N.* // J. Modern Opt. 1997. V. 44. N 7. P. 1409–1416.
[8] *Котляр В.В., Сойфер В.А., Хонина С.Н.* // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23. В. 17. С. 1–6.
[9] *Piestun R., Schechner Y.V., Shamir J.* // Opt. Lett. 1997. V. 22. N 4. P. 200–202.
[10] *Kotlyar V.V., Khonina S.N., Soifer V.A.* // Optik. 1998. V. 108. N 1. P. 20–26.
[11] *Westerholm J., Turunen J., Huttunen J.* // J. of Opt. Soc. Am. A. 1994. V. 11. P. 1283–1290.