

01;03;04

## **Особенности гидродинамических характеристик импульсных процессов в сжимаемой среде при многократном (пульсирующем) законе ввода энергии**

© В.С. Крутиков, А.Г. Лопатнев

Институт импульсных процессов и технологий НАН Украины, Николаев  
Украинский государственный морской технический университет,  
Николаев

Поступило в Редакцию 17 февраля 1999 г.

Впервые решена обратная задача восстановления давления на подвижной границе цилиндрического плазменного поршня по пульсирующему давлению в точке волновой зоны. При этом закон движения плазменного поршня был неизвестен и подлежал определению. Получены кинематические и динамические параметры расширяющегося поршня, позволяющие определить закон ввода мощности в канал. В результате точного аналитического решения задачи показано, что если функция давления на стенке канала является последовательностью возрастающих по амплитуде импульсов, то функция давления в фиксированной точке волновой зоны есть также последовательность возрастающих импульсов. Период пульсации кривой давления на стенке канала равен периоду пульсации кривой ввода мощности и периоду пульсации кривой давления в фиксированной точке волновой зоны.

Обычно при электрическом разряде, лазерном импульсе и т.д. в сжимаемой среде закон ввода мощности имеет вид одиночного импульса, который достаточно хорошо изучен [1,2]. Возможности применения импульсных процессов существенно расширяются при использовании двух-, трех- и вообще многократного, пульсирующего по определенному закону, ввода мощности в расширяющийся плазменный канал. В работах [3–5] показано, что путем, например, параметрического изменения характеристик разрядной цепи можно в достаточно широких пределах изменять закон ввода мощности и, как следствие, получать импульсы давления сложной формы. В работе [6] рассмотрена внешняя гидродинамическая задача при двухимпульсном законе ввода мощности

в плазменный канал. При этом: а) из-за математических трудностей использовалось не точное решение волнового уравнения цилиндрической симметрии, а некоторое приближенное; б) исследуемые функции определялись некоторой суперпозицией их — наложением, вычисленных от линейного роста радиуса и от пульсаций малой амплитуды радиуса канала. В результате приближенного аналитического решения задачи сделаны выводы о том, что функция давления на стенке канала является последовательностью импульсов, убывающих по амплитуде, а функция давления для фиксированной точки волнового поля — последовательностью возрастающих импульсов [6]. Представляет интерес рассмотреть эту важную задачу без упомянутых допущений, в точной постановке. Точные аналитические решения волнового уравнения в областях с подвижными границами и их анализ позволят сделать более достоверные заключения.

Цилиндрическая симметрия относится к случаю особой сложности, до настоящего времени не было ни одного точного аналитического решения волнового уравнения в областях с подвижными границами.

Рассмотрим задачу

$$\varphi_{tt} - a^2 \varphi_{rr} - a^2 r^{-1} \varphi_r = 0, \quad r \geq R(t), \quad (1)$$

$$\varphi_t(r, 0) = \varphi(r, 0) = 0, \quad R(0) = r_0, \quad (2)$$

$$\rho \varphi_t \Big|_{r=r_1} = P = f(r_1, t), \quad (3)$$

где  $t$  — время;  $R(t)$ ,  $r_0$ ,  $r$ ,  $r_1$  — координаты подвижных границ: начальная, текущая, точки волновой зоны соответственно;  $a$ ,  $\rho$  — постоянные. Если условия заданы только в фиксированной точке волновой зоны (3), то этим определяется класс обратных задач. При решении обратных задач необходимо реконструировать значения исследуемых функций в других точках, включая подвижные границы, при этом закон движения границы неизвестен и подлежит определению. Решение волнового уравнения для случая расширения цилиндра в безграничной сжимаемой среде получим методом обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов [7–9].

Применяя одностороннее преобразование Лапласа к уравнению (1), с учетом нулевых начальных условий, получаем операторное уравнение, решая которое для случая движения границы в безграничной среде при

учете условия (3), получаем интересующие нас зависимости. Значения исследуемых функций таковы [7]:

$$\bar{\varphi} = -\frac{\bar{f}(r,s)K_0(\mu r)}{s\rho K_0(\mu r_1)}, \quad \bar{\varphi}_r = \frac{\bar{f}(r_1,s)K_1(\mu r)}{a\rho K_0(\mu r_1)},$$

$$s\bar{\varphi} = -\frac{\bar{f}(r,s)K_0(\mu r)}{\rho K_0(\mu r_1)}, \quad (4)$$

где  $\mu = s/a$ ,  $s$  — параметр преобразования,  $K_0$ ,  $K_1$  — модифицированные функции Бесселя.

Переход к оригиналам в (4) может быть осуществлен рациональным способом в каждом конкретном случае в зависимости от формы функции  $f$ .

Представим вид изображения  $P(r_1, t)$  в классе функций Бесселя, пусть для обратной задачи известно:

$$P(r_1, t) = f(r_1, t) = A \left( t - \frac{r_1^2}{a^2} \right)^{-1/2}, \quad t > r_1/a, \quad A = \text{const}, \quad (5)$$

тогда, учитывая (4) и переходя к оригиналам, получим для значений исследуемых функций в любых точках и на подвижной границе:

$$P(r, t) = A \left( t^2 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{-1/2}, \quad v(r, t) = \frac{A \cdot t}{r\rho} \left( t^2 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{-1/2}, \quad t > r/a, \quad (6)$$

$$P(R(t), t) = A \left( t^2 - \frac{R^2(t)}{a^2} \right)^{-1/2},$$

$$v(R(t), t) = \frac{A \cdot t}{R(t)\rho} \left( t^2 - \frac{R^2(t)}{a^2} \right)^{-1/2} = \frac{dR(t)}{dt}. \quad (7)$$

Функцию  $R(t)$  определяем из второго соотношения в (7):

$$R^2(t) = \frac{2A}{\rho} \sqrt{t^2 - \frac{R^2(t)}{a^2}} + \frac{2A^2}{\rho^2 a^2} \ln \left| \sqrt{t^2 - \frac{R^2(t)}{a^2}} - \frac{A}{\rho a^2} \right|. \quad (8)$$

Вычисление  $R(t)$  из (8) и ему подобных соотношений производится как и в случае сферической симметрии [8,9]. Хорошим приближением

является формула при  $a \rightarrow \infty$

$$R(t) = \left( \frac{2At}{\rho} \right)^{1/2}.$$

Для случая  $P(r_1, t) = f(r_1, t)$  — произвольной функции, соответствующие соотношения представлены в [7]. Полученные формулы являются точными, подстановка их в волновое уравнение превращает его левую часть в нуль. Проведено сравнение с результатами численного решения методом характеристик полной системы уравнений движения, сплошности и состояния в форме Тэта [7]. Границы применимости волнового уравнения и его точных решений в задачах импульсной гидродинамики и акустики определены и находятся в пределах  $M = v/a \leq 0.2$  [10],  $v$  — скорость расширения полости. При этом ударная волна сразу отходит от расширяющегося поршня со скоростью  $a_0 = \text{const}$ .

Для случая пульсирующего закона:

$$P(r_1, t) = \sum_{m=0}^n \frac{A_m \sigma_0(t - \alpha_m - \frac{r_1 - r_0}{a})}{\sqrt{(t - \alpha_m)^2 - (\frac{r_1 - r_0}{a})^2}}, \quad (9)$$

$$P(R(t), t) = \sum_{m=0}^n \frac{A_m \sigma_0(t - \alpha_m - \frac{R(t) - r_0}{a})}{\sqrt{(t - \alpha_m)^2 - (\frac{R(t) - r_0}{a})^2}} - \frac{1}{2} \rho v^2(R(t), t). \quad (10)$$

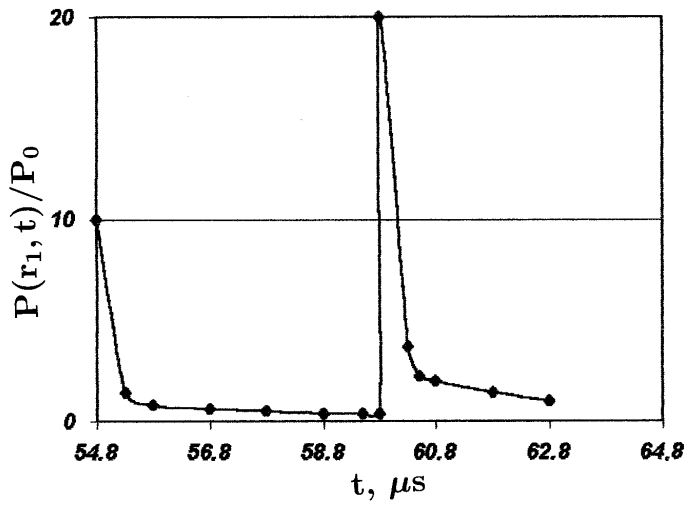
Давление на подвижной границе поршня определяется с учетом нелинейного члена интеграла Коши–Лагранжа [10,11]:

$$v(R(t), t) = \sum_{m=0}^n \frac{A_m(t - \alpha_m) \sigma_0(t - \frac{R(t) - r_0}{a} - \alpha_m)}{\rho(R(t) - r_0) \sqrt{(t - \alpha_m)^2 - (\frac{R(t) - r_0}{a})^2}}, \quad (11)$$

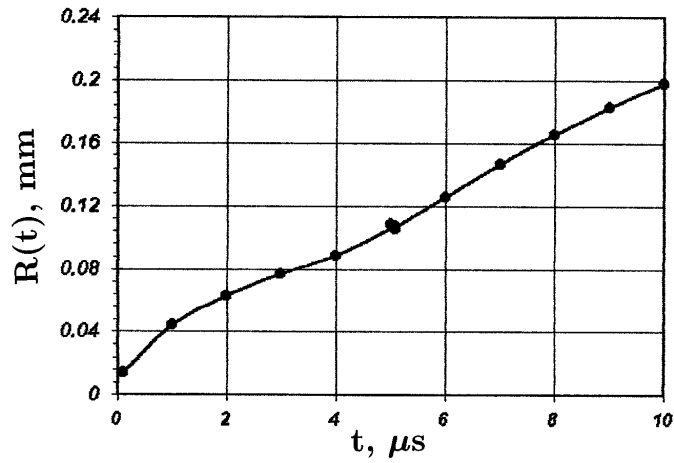
$$R(t) - r_0 = \sqrt{\sum_{m=0}^n \frac{2A_m(t - \alpha_m) \sigma_0(t - \alpha_m)}{\rho}}, \quad (12)$$

где  $\sigma_0$  — единичная разрывная функция нулевого порядка.

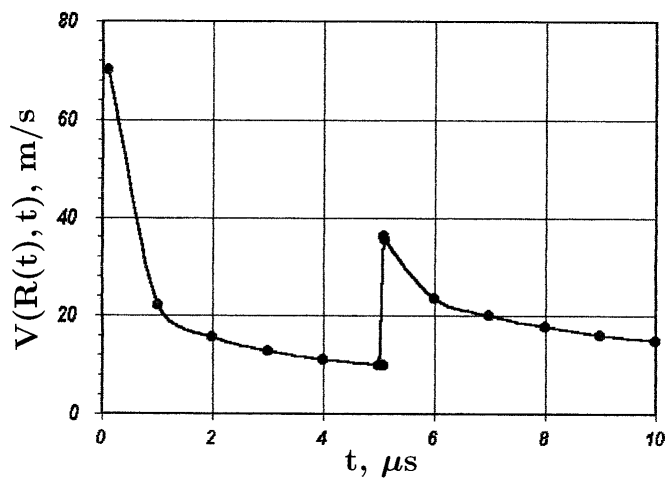
По известным кинематическим и динамическим параметрам (9)–(12) расширяющегося цилиндрического плазменного поршня можно, используя уравнение баланса энергии [1], определить вводимую в канал мощность.



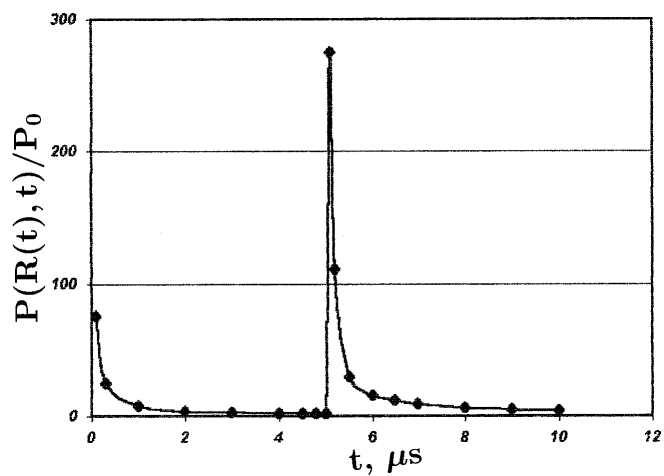
**Рис. 1.** Исходная для реконструкции возрастающая последовательность импульсов давления в зависимости от времени в фиксированной точке волновой зоны.



**Рис. 2.** Восстановление закона изменения радиуса подвижной границы плазменного поршня в зависимости от времени.



**Рис. 3.** Восстановление закона изменения скорости подвижной границы в зависимости от времени.



**Рис. 4.** Реконструкция закона изменения давления на подвижной границе плазменного поршня в зависимости от времени по заданному пульсирующему давлению в точке волновой зоны рис. 1.

На рис. 1–4 изображены результаты вычислений по формулам (9)–(12) при  $A_0 = 10 \cdot 10^{-6} \text{ kgf} \cdot \text{s}/\text{cm}^2$ ,  $A_1 = 20 \cdot 10^{-6} \text{ kgf} \cdot \text{s}/\text{cm}^2$ ,  $\rho = 102 \text{ kgf} \cdot \text{s}/\text{m}^4$ ,  $a = 1460 \text{ m/s}$ ,  $r_0 = 0.013 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ,  $r_1 = 0.08 \text{ m}$ ,  $\alpha_1 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ ,  $\alpha_0 = 0$ .

Анализ соотношений (9)–(12) показывает, что если в точке  $r_1$  волновой зоны функция давления имеет вид последовательности убывающих по амплитуде импульсов, то функция давления на стенке плазменного канала так же будет последовательностью убывающих по амплитуде импульсов. И наоборот, возрастающей последовательности импульсов на подвижной границе будет соответствовать так же возрастающая последовательность по амплитуде в точке волновой зоны. Последнее и показано на рисунках. Указанное соответствует физике явления в описании его волновым уравнением. Два разных скачка давления, зародившись на подвижной границе и распространяясь по среде, будут, во-первых, всегда находиться на одинаковом расстоянии друг от друга, пропорциональном величине  $\alpha_m$  ( $a = \text{const}$  и поджатия ожидать нельзя). Во-вторых, соотношение амплитуд (первый скачок больше второго, либо первый меньше второго скачка) будет всегда сохраняться, изменяясь одинаково для них в соответствии с величиной  $1/\sqrt{t^2 - (\frac{t-r_0}{a})^2}$ , хотя и с запаздыванием  $\alpha_m$ .

Изменение расстояния между скачками возможно, если хотя бы один из них перемещается со скоростью, превышающей  $a = \text{const}$  скорость звука. Однако в этом случае исследуемые явления описываются уже другими уравнениями, например полной системой (1) [10]. Также при распространении возможно увеличение амплитуды скачка, но при прохождении волной, например, участков двухфазной среды, насыщенной пузырьками определенных размеров и концентрации, что также должно описываться уже другими уравнениями.

Анализ формул (9)–(12) и уравнения баланса энергии для не слишком электрических разрядов в воде [11]

$$\frac{N(t)}{l} = S \frac{dP(R(t), t)}{dt} \frac{1}{\gamma - 1} + P(R(t), t) \frac{dS}{dt} \frac{\gamma}{\gamma - 1},$$

где  $S = \pi R^2(t)$ ,  $\gamma$  — эффективный показатель адиабаты плазмы,  $l$  — длина канала,  $N(t)$  — вводимая в канал мощность, показывает, что период пульсации кривой давления на стенке канала равен периоду

пульсации кривой ввода мощности и периода пульсации кривой давления в фиксированной точке военовой зоны.

На рис. 3 кривая скорости подвижной границы поршня имеет второй скачок меньше первого, в то время как на кривой давления  $P(R(t), t)$  рис. 4 второй скачок больше первого. Это соответствует физике явления, описываемого волновым уравнением. Второй скачок давления индуцируется со значительно большего (почти на порядок) радиуса канала, хотя и расширяющегося несколько медленнее.

## Список литературы

- [1] *Наугольных К.А., Рой Н.А.* Электрические разряды в воде. М.: Наука, 1971. 151 с.
- [2] *Лямшев Л.М.* // Успехи физич. наук. 1987. Т. 151. № 3. С. 479–527.
- [3] *Иванов А.В., Вовченко А.И., Богаченко О.А.* // Техническая электродинамика. 1981. № 6. С. 15–20.
- [4] *Иванов В.В.* // Электронная обработка материалов. 1982. № 3. С. 30–35.
- [5] *Вовченко А.И.* // Техническая электродинамика. 1983. № 1. С. 12–15.
- [6] *Вовченко А.И., Ковалев В.Г., Поздеев В.А.* // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23. № 9. С. 58–61.
- [7] *Крутиков В.С.* // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. № 6. С. 510–514.
- [8] *Крутиков В.С.* // Прикладная математ. и механика. 1991. Т. 55. № 6. С. 1058–1062.
- [9] *Крутиков В.С.* // Докл. Академии наук. 1993. Т. 333. № 4. С. 512–514.
- [10] *Крутиков В.С.* // Акуст. журн. 1996. Т. 42. № 4. С. 534–540.
- [11] *Слепян Л.И.* // Докл. АН СССР. 1985. Т. 282. № 4. С. 809–813.