01;03

Характерное время развития неустойчивости капли, заряженной до рэлеевского предела

© Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет

Поступило в Редакцию 21 апреля 1999 г.

На основе решения нелинейной задачи о капиллярных колебаниях заряженной капли проведена оценка характерного времени развития неустойчивости капли, несущей критический заряд. Обнаружен эффект задержки распада, связанный с гидродинамической инерционностью капли.

Исследование капиллярных колебаний и устойчивости заряженных капель представляет значительный интерес в связи с многочисленными приложениями в геофизике, научном приборостроении, технической физике и технологии [1]. Но большая часть теоретических работ выполнена в рамках линеаризованной системы уравнений гидродинамики, и лишь сравнительно недавно стали проводиться работы, принимающие во внимание реальную нелинейность феномена [2–3]. Имея в виду нелинейность проблемы расчета формы осциллирующей капли в любой момент времени, будем решать задачу о капиллярных колебаниях заряженной капли, т. е. задачу Рэлея [4], но в отличие от [4] в нелинейной постановке во втором порядке малости по амплитудам отдельных мод.

Пусть капля идеальной, идеально проводящей жидкости с плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения γ несет заряд Q. На основании линейной теории [4] считается, что существует момент времени, который можно принять за начальный $t = 0$, когда форма капли описывается второй модой линейных капиллярных колебаний с малой конечной амплитудой ε, а поле скоростей — нулевое. Исходная капля равновелика капле сферической формы с радиусом R.

В сферической системе координат с началом в центре капли математическая формулировка задачи в безразмерных переменных, в которых принимаются равными единице плотность жидкости $\rho \equiv 1$, коэффициент поверхностного натяжения $\gamma \equiv 1$ и радиус равновеликой сферической капли $R \equiv 1$, представлена соотношениями:

$$\Delta\psi = 0, \quad \mathbf{U} = \nabla \cdot \psi,$$

$$\Delta\Phi = 0, \quad \mathbf{E} = -\nabla \cdot \Phi,$$

$$r \to \infty: \qquad |\nabla\Phi| \to 0,$$

$$r = 0: \qquad |\nabla\Psi| < \infty,$$

$$-\frac{1}{4\pi}\oint \frac{\partial\Phi}{\partial n} dS = Q, \qquad S(r, Q, \varphi) \equiv \begin{cases} r = 1 + \xi(\theta, t), \\ 0 \leqslant Q \leqslant \pi, \\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

$$r = 1 + \xi(\theta, t): \qquad \Phi = \mathrm{const},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\xi}{\partial\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},$$

$$\Delta\mathcal{F} - \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla \cdot \psi)^2 + \mathcal{F}_E = \mathcal{F}_\gamma, \quad \mathcal{F}_E = \frac{E^2}{8\pi},$$

$$t = 0: \quad r = 1 + \xi_* + \varepsilon P_2(\cos(\theta)), \quad \psi = 0,$$

$$\int\limits_V dv = \frac{4}{3}\pi, \quad V(r, \theta, t) \equiv \begin{cases} 0 \leqslant r \leqslant 1 + \xi_* + \varepsilon P_2(\cos(\theta)), \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, 0 \leqslant \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Решение выписанной задачи, определяющее форму капли в любой момент времени, с точностью до слагаемых второго порядка малости по параметру ε, имеет вид:

$$\begin{aligned} r = 1 &- \frac{\varepsilon^2}{5}\cos^2(\omega_2 t) + \varepsilon\cos(\omega_2 t)P_2(\cos(\theta)) \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{\omega_2^2}\Big(\chi_1 - \Big(\chi_1 + \chi_2\Big)\cos(\omega_2 t) + \chi_2\cos(2\omega_2 t)\Big)P_2(\cos(\theta)) \\ &+ \frac{18}{35}\varepsilon^2\Big(\chi_3 - \Big(\chi_3 + \chi_4\Big)\cos(\omega_4 t) + \chi_4\cos(2\omega_2 t)\Big)P_4(\cos(\theta)), \quad (1) \end{aligned}$$

$$\chi_1 \equiv \frac{44 - 5W}{14}, \qquad \chi_2 \equiv \frac{23W - 116}{42}, \qquad \chi_3 \equiv \frac{36 - 5W}{\omega_4^2},$$

$$\chi_4 \equiv \frac{12+W}{4(10-W)}, \qquad W \equiv \frac{Q^2}{4\pi},$$
$$\omega_2^2 \equiv 2(4-W), \qquad \omega_4^2 \equiv 12(6-W).$$

В соотношении (1) поправка второго порядка малости ко второй моде капиллярных колебаний имеет при $W \to 4$, $\omega_2^2 \to 0$ бесконечно малый знаменатель. Поэтому при $W = 4$ невозможно рассчитать форму поверхности капли непосредственно по формуле (1). Интересно, что для конечных значений t предельный вид выражения (1) при $W \to 4$ нетривиален. Это связано с тем, что $\lim\limits_{W\to 4} \omega_2 = 0$ и, следовательно, при конечном t, когда $W \to 4$, имеем: $\cos(\omega_2 t) = 1 - \omega_2^2 t^2/2 + o(\omega_2^2 t^2)$, $\cos(2\omega_2 t) = 1 - 2\omega_2^2 t^2 + o(\omega_2^2 t^2)$. Поэтому при околокритических значениях W числитель коэффициента при $P_2(\cos(\theta))$ имеет тот же порядок малости $\sim o(\omega_2^2)$, что и знаменатель, а само слагаемое стремится к конечному значению

$$\varepsilon^2 t^2 \left(\chi_1 - 3\chi_2\right) P_2(\cos(\theta)) = \frac{12}{7}\varepsilon^2 t^2 P_2(\cos(\theta)).$$

Поскольку в других слагаемых (1) никаких особенностей при $W = 4$ нет, можно найти:

$$W = 4: \quad r = 1 + \varepsilon P_2(\cos(\theta)) - \frac{\varepsilon^2}{5}$$
$$+ \varepsilon^2 \frac{18}{35} \sin^2\left(t\sqrt{6}\right) P_4(\cos(\theta)) + \frac{12}{7}\varepsilon^2 t^2 P_2(\cos(\theta)). \quad (2)$$

Видно, что при $W = 4$ в линейном приближении (первые два слагаемых в (2)) капля принимает вытянутую неосциллирующую форму. Слабое превышение параметром W критического значения $W_c = 4$ влечет экспоненциальное во времени вытягивание капли. При $W < 4$ капля устойчиво осциллирует.

Линейные по ε слагаемые (2) в малой левой полуокрестности значения $W = 4$ ограничены, а добавка первого порядка малости не превышает главного члена разложения при любых t. Это означает равномерность по t асимптотического приближения первого порядка малости.

Для разложения второго порядка малости малая левая полуокрестность значения $W = 4$ — область неравномерности асимптотического разложения: при околокритических значениях $W \to 4$ поправка второго по ε порядка малости в (2) мала по сравнению с предыдущими членами разложения лишь в начальный момент времени. За характерное время $t \sim o(\varepsilon^{-1/2})$ значение этой добавки становится сравнимым с предыдущим членом разложения, а при дальнейшем росте t превосходит его. Согласно общей методике теории возмущения, это означает допустимость применения разложения (2) только при малых $t = o(\varepsilon^{-1/2})$.

Разложение (2) не может быть преобразовано в равномерное по методу перенормировки, который позволяет выявлять периодические по времени решения задачи. Поэтому при $W = 4$ движение поверхности заряженной капельки не может быть периодическим. Непериодическое незатухающее движение может интерпретироваться как неустойчивость.

Водные капельки миллиметрового размера можно считать маловязкими и хорошо проводящими [1]. Для водной капельки ($\rho = 1\,\mathrm{g/cm^3}$) с радиусом $R \sim 10^{-1}$ cm капиллярные колебания с амплитудой порядка ангстрема, т.е. $\sim 10^{-8}$ cm в безразмерных переменных характеризуются амплитудой $\varepsilon \sim 10^{-7}$. Поэтому безразмерное время $t \sim \varepsilon^{-1/2} \sim 3 \cdot 10^3$. В выбранных безразмерных переменных единицей временнóй шкалы является $t_* = \left((\rho R^3)/\gamma\right)^{1/2} \sim 4 \cdot 10^{-3}$ s, поэтому реальное физическое время $t_f = t \cdot t_* \sim 10$ s. Это — время, в течение которого можно пользоваться разложением (2) для описания эволюции формы поверхности во времени, после сообщения капельке критического заряда. Из физических соображений ясно, что критически заряженная капелька должна быть неустойчивой. Поэтому полученное значение t_f можно интерпретировать как оценку времени, прошедшего с момента зарядки этой капельки до момента начала сброса части заряда для перехода в устойчивое состояние. Причиной задержки реализации неустойчивости является гидродинамическая инерционность.

Следует отметить, что полученная оценка характерного времени реализации неустойчивости критически заряженной капли совпадает с оценкой этой величины по результатам теоретического расчета [5], где для описания временнóй эволюции неустойчивой капли в рамках сфероидального приближения для ее формы (с использованием качественных данных работы [6]) получено и решено нелинейное интегральное уравнение, из решения которого вытекает оценка, аналогичная вышеприведенной. Причем в обоих расчетах, выполненных совершенно различными способами, совпадают не только численная величина характерного времени реализации неустойчивости критически заряженной капли t_f, но и аналитические зависимости t_f от радиуса капли R, плотности жидкости ρ и коэффициента поверхностного натяжения ее свободной границы γ, которая в обоих случаях имеет вид

$$t_f \sim R^2 \rho^{1/2} \gamma^{-1/2}.$$

Отмеченное совпадение оценок является как подтверждением справедливости расчетов, выполненных в [5] и в данном рассмотрении (с выходом за пределы асимптотичности выражения (1)), так и указанием на корректность результатов, полученных в [6] с широким использованием качественных соображений.

Заключение. Капелька воды миллиметрового размера, несущая критический в смысле устойчивости заряд, деформируется по закону (2) в течение времени порядка десятка секунд. Такой большой интервал времени легко фиксируется в эксперименте и сам эффект может быть зафиксирован. В экспериментах по проверке критерия Рэлея и исследованию закономерностей распада сильно заряженной капли (см. обзор [1] и указанную там литературу) экспериментаторы работали с каплями на порядок меньшего размера и в силу инерционности системы с электростатическим подвесом капли ее свободным испарением на указанную задержку не обратили внимания. Сам же обнаруженный эффект задержки распада сильно заряженной капли может играть важную роль в устройствах, использующих заряженные ионно-кластерно-капельные пучки.

Список литературы

[1] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
[2] *Tsamopoulos J.A., Brawn R.A.* // J. Fluid Mech. 1984. V. 147. P. 373–395.
[3] *Wang T.G., Anilkumar A.V., Lee C.P.* // J. Fluid Mech. 1996. V. 308. P. 1–14.
[4] *Reyleigh (Lord Strett)* // Phil. Mag. 1882. V. 14. P. 184–186.
[5] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1995. Т. 65. В. 3. С. 39–45.
[6] *Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1985. Т. 55. В. 7. С. 1272–1278.