

01;03

Деформации и перекрытия зон неустойчивости уравнения Матъе–Хилла

© А.И. Григорьев, А.С. Голованов

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Поступило в Редакцию 2 июля 1999 г.

На основе численного анализа уравнения Матъе–Хилла, описывающего временную эволюцию амплитуд капиллярных волн на границе раздела двух жидких сред, верхняя из которых движется относительно более плотной нижней со скоростью, зависящей от времени, показано, что при определенных значениях характерных физических параметров зоны неустойчивого роста амплитуд деформируются и перекрываются, формируя единую односвязную зону неустойчивости.

В задаче об устойчивости тангенциального разрыва двух несмешивающихся идеальных жидкостей различных плотностей ρ_1 и ρ_2 , каждая из которых заполняет полубесконечное пространство, а верхняя жидкость движется с переменной во времени скоростью $U = U\{t\}$ параллельно заряженной с постоянной поверхностной плотностью заряда σ границе раздела сред, дифференциальные уравнения, описывающие временную эволюцию амплитуд капиллярных волн, являются уравнениями с зависящими от времени коэффициентами типа Матъе–Хилла. Как известно из теории, уравнения Матъе–Хилла имеют дискретные зоны, в которых решения неустойчивы [1–3]. Определение формы таких зон для обсуждаемой электрогидродинамической задачи представляет интерес в связи с многообразными академическими, техническими и технологическими приложениями электрогидродинамических неустойчивостей [4].

1. Пусть потенциалы полей скоростей движения верхней и нижней жидкостей есть $\psi_1(\mathbf{r}, t)$ и $\psi_2(\mathbf{r}, t)$ соответственно. Тогда математическая формулировка задачи об исследовании временной эволюции амплитуд капиллярных волн в такой системе в декартовой системе координат, плоскость XOY которой совпадает с невозмущенной границей раздела сред, а ось OZ направлена вниз, в направлении действия силы тяжести, имеет вид [5,6]:

$$\Delta\psi_j = 0; \quad j = 1, 2;$$

$$z \Rightarrow -\infty \quad \psi_1 - x \cdot U(t) \Rightarrow \text{const} = 0;$$

$$z \Rightarrow \infty \quad \psi_2 \Rightarrow \text{const} = 0;$$

$$z = \xi(x, t); \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \approx U \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial t}; \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \approx \frac{\partial \xi}{\partial t};$$

$$\rho_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \rho_1 g \xi + \frac{1}{2} \rho_1 [(\nabla \psi_1)^2 - U^2(t)] = \rho_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial t} + \rho_2 g \xi + 4\pi \sigma^2 k \xi - \alpha \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

где $\xi(x, t)$ — возмущение границы раздела, связанное с тепловым капиллярным волновым движением; $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t)$ — однородная по координатам x и z , зависящая от времени скорость движения верхней жидкости относительно нижней. Направление вектора \mathbf{U} определяет ориентацию оси OX ; α — коэффициент поверхностного натяжения границы раздела; k — волновое число.

Если принять, что

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}_0 + \mathbf{U}_* \cos \omega_0 t \quad (\mathbf{U}_0 \parallel \mathbf{U}_*),$$

то дифференциальное уравнение, описывающее временную эволюцию амплитуд фиксированных мод тепловых капиллярных волн, принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \zeta [F(k) - D(k) \cdot \cos \omega_0 t + L(k) \cdot \cos^2 \omega_0 t] = 0, \quad (1)$$

$$F(k) \equiv \frac{k}{(\rho_2 + \rho_1)} \left[g(\rho_2 - \rho_1) + \alpha k^2 - 4\pi \sigma^2 k - k \rho_1 U_0^2 + k U_0^2 \frac{\rho_1^2}{(\rho_2 + \rho_1)} \right],$$

$$L(k) = k^2 \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_2 + \rho_1)^2} U_*^2, \quad D(k) \equiv 2L(k)U_0/U_*.$$

Получившееся уравнение является уравнением Матье–Хилла, которое в зависимости от соотношения величин коэффициентов F , D , L и частоты ω_0 может иметь либо параметрически устойчивые, либо параметрически неустойчивые, экспоненциально нарастающие со временем решения. Кроме того, при некоторых значениях входящих параметров (при $F(k) \leq 0$ и $\omega_0 = 0$) из уравнения (1) следует также возможность реализации в анализируемой системе) неустойчивостей Тонкса–Френкеля и Кельвина–Гельмгольца.

2. В (1) перейдем к безразмерным переменным, в которых капиллярная постоянная нижней жидкости, плотность нижней жидкости и частота

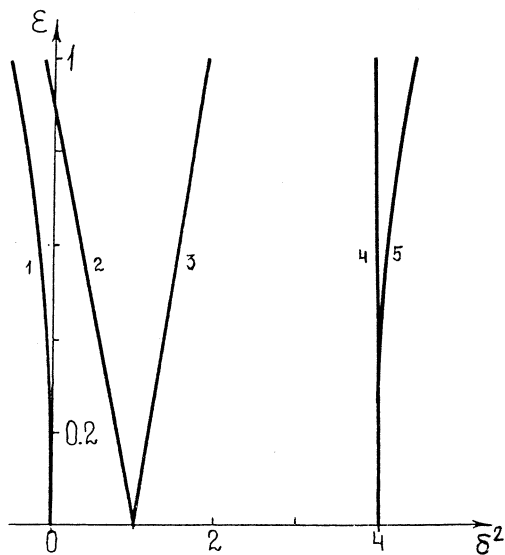


Рис. 1. Границы зоны неустойчивости в плоскости параметров δ , ε для уравнения (2) при $\alpha = 0$: 1 — правая граница зоны неустойчивости при $\delta^2 = 0$, левая граница находится на $-\infty$; 2 — левая граница зоны неустойчивости при $\delta^2 = 1$; 3 — правая граница зоны неустойчивости при $\delta^2 = 1$; 4 — левая граница зоны неустойчивости при $\delta^2 = 4$; 5 — правая граница зоны неустойчивости при $\delta^2 = 4$.

периодического внешнего воздействия на границу раздела сред ω_0 равны единице, и, оставляя прежние обозначения, перепишем (1) в виде:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \zeta [\delta - \alpha \cdot 2\varepsilon \cos t + 2\varepsilon \cos 2t] = 0; \quad (2)$$

$$\alpha = 4U_0/U_*; \quad \delta = F(k) + 0.5L(k); \quad \varepsilon = L(k)/4.$$

При $\alpha = 0$ уравнение (2) переходит в уравнение Матъе, положение нескольких первых зон неустойчивости решений которого, рассчитанных путем разложения по малому безразмерному параметру ε (как это подробно описано в [7]), приведено на рис. 1. Видно, что вершины зон неустойчивости начинаются на оси абсцисс при целочисленных значениях параметра δ^2 , т. е. при $\delta^2 = 0, 1, 2, \dots$

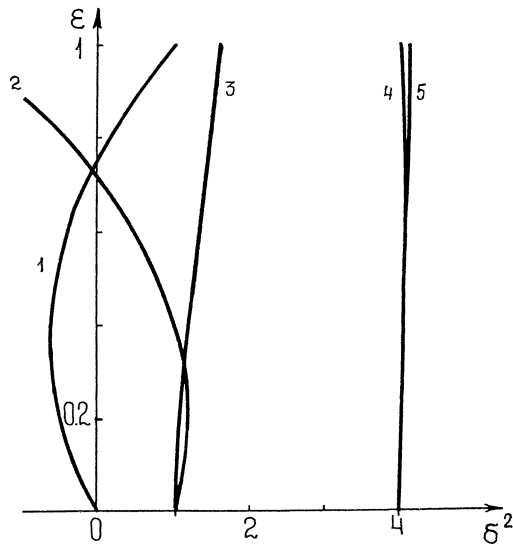


Рис. 2. Зависимости, аналогичные рис. 1, при $\delta^2 = 1$, $\alpha = 1, 3$.

Уравнение (2) содержит еще один безразмерный параметр α , характеризующий отношение постоянной и переменной компонент поля скоростей движения как целого верхней среды. При увеличении параметра α зоны неустойчивости начинают деформироваться, и при некотором значении α левая и правая границы зоны соответствующей $\delta^2 = 1$ пересекаются между собой, как это показано на рис. 2, полученном при $\alpha = 1, 3$. Геометрическое место точек, расположенных между граничными кривыми этой зоны как ниже точки пересечения, так и выше ее (включая и саму точку пересечения), соответствует периодической неустойчивости решения уравнения (2) с экспоненциально нарастающей амплитудой (что проверено прямым расчетом по уравнению (2)).

Дальнейшее увеличение параметра α приводит к перекрытию соседних зон неустойчивости и образованию на плоскости значений (δ, ε) единой зоны, в которой любой паре значений δ и ε соответствуют неустойчивые решения (2), как это видно из рис. 3, полученного при $\alpha = 6$.

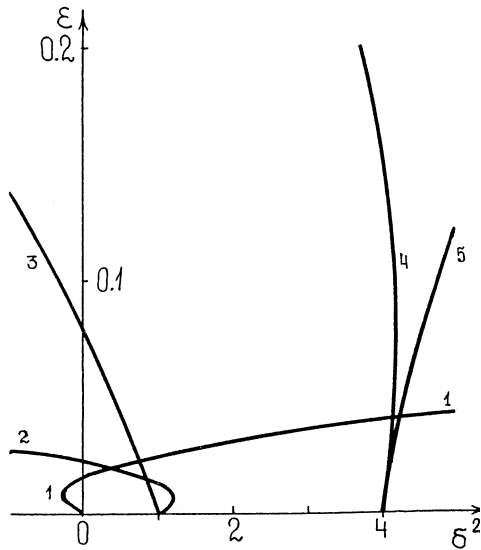


Рис. 3. Зависимости, аналогичные рис. 2, при $\alpha = 6$.

С математической точки зрения деформация и перекрытие отдельных зон неустойчивости связано с различием в (2) в знаках при $\cos t$ и $\cos 2t$. С физической точки зрения образование единой зоны неустойчивости уравнения (2) при увеличении параметра α связано с увеличением в общей картине неустойчивости роли колебательной неустойчивости Кельвина–Гельмгольца, которая реализуется и становится доминирующей при достаточно больших скоростях U_0 (при достаточно больших α) и охватывает весь спектр волн [8].

3. *Заключение.* Уравнение Матье–Хилла, описывающее временную эволюцию амплитуд капиллярных волн на заряженной границе раздела двух жидких сред, верхняя из которых движется относительно более плотной нижней со скоростью, зависящей от времени, имеет неустойчивые решения, характерные для всех трех типов неустойчивости, возможных в анализируемой системе. При варьировании физических параметров задачи дискретные зоны неустойчивого роста амплитуд, характерные для параметрической неустойчивости, деформируются и

перекрываются, формируя единую односвязную зону неустойчивости, в которой доминирующую роль играет неустойчивость Кельвина–Гельмгольца.

Список литературы

- [1] Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовиц, И. Стиган / М.: Наука, 1979. 831 с.
- [2] *Ширяева С.О., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1992. Т. 62. В. 11. С. 49–56.
- [3] *Любимов Д.В., Хеннер М.В., Шоц М.М.* // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 3. С. 25–31.
- [4] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
- [5] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
- [6] *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
- [7] *Найфе А.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
- [8] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.