

01;07

Топологическая фаза в непараксиальном гауссовом пучке

© А.В. Воляр, Т.А. Фадеева, В.Г. Шведов

Симферопольский государственный университет

Поступило в Редакцию 5 июля 1999 г.

Рассматривается структура и эволюция сингулярностей непараксиального гауссова пучка. Показано, что гауссов пучок может быть представлен семейством прямых линий, лежащих на поверхности гиперboloида. Показано, что волновой фронт этого пучка является функцией точечного источника, помещенного в точку на оси z с мнимой координатой iz_0 . Аргумент этой комплексной функции является топологической фазой пучка, которая характеризует поворот волнового фронта. Сингулярности непараксиального гауссова пучка расположены в фокальной плоскости и являются кольцевыми краевыми дислокациями. Дислокационные процессы вблизи перетяжки гауссова пучка возникают только в результате апертурной дифракции.

Общепринятое описание лазерных пучков, широко используемое в литературе при расчете лазерных резонаторов, возбуждении оптических волокон и в других областях лазерной физики, основано на так называемом параксиальном приближении в решении волнового уравнения.

Дело в том, что волновое уравнение

$$(\nabla^2 + k^2) \Psi = 0 \quad (1)$$

(k — волновое число) имеет симметричный вид по всем трем пространственным координатам (подразумевается, что волновой процесс стационарный).

Очевидно, что волновая функция, удовлетворяющая этому уравнению также должна отвечать этим симметричным свойствам. Поэтому, если волновая функция зависит от трех координат, то проблематично выделить ту из них, вдоль которой происходит распространение света, и одновременно удовлетворить волновому уравнению (1). Для разрешения этой ситуации приходится использовать приближенное волновое описание лазерного пучка, считая, что его расходимость мала (радиус

перетяжки пучка много больше длины волны). Это позволяет пренебречь в волновом уравнении второй производной по выделенной координате, тем самым нарушив симметрию в самом операторе волнового уравнения. Хотя такой подход обеспечивает широкие возможности для решений многих практических задач лазерной и волоконной техники, он не позволяет дать корректное описание преобразований поля в области перетяжки пучка.

В настоящее время разработан ряд различных математических способов, позволяющих с той или иной степенью точности преодолеть указанную трудность (см., например, [1–4]).

В частности, в работе [5] на основании асимптотической оценки интеграла Фурье (разложения поля гауссова пучка в ряд по плоским волнам всевозможных направлений) показано, что в области перетяжки возникают дислокационные кольца Эйри, которые могут рождаться и уничтожаться при малейших возмущениях формы перетяжки пучка. Такие процессы рождения и аннигиляции сингулярностей на волновом фронте М. Берри назвал дислокационными реакциями [5].

Целью нашей работы явилось изучение структуры непараксиального пучка и дислокационных реакций в области его перетяжки на основании строгого решения волнового уравнения в аналитическом виде.

Для описания ограниченного в пространстве лазерного пучка удобно представить его как неоднородную сферическую волну, аналогично тому, как это делается для плоских волн с неоднородным распределением амплитуды [6]. Можно считать, например, что точечный источник и сток сферической волны помещен в точку с мнимой координатой $z = iz_0$ [7].

Тогда расстояние от источника до некоторой точки, лежащей на поверхности волнового фронта, приобретает вид функции комплексного переменного:

$$R = \sqrt{r^2 + (z - iz_0)^2} = \sqrt{r^2 + z^2 - z_0^2 + 2izz_0}, \quad (2)$$

где $r^2 = x^2 + y^2$; z_0 — волновой параметр пучка.

Частное решение волнового уравнения (1) можно представить в виде [8]:

$$\Psi(R) = J_{n+1/2}(kR) P_n^l(\cos \Theta) \left\{ \frac{\cos l\varphi}{\sin l\varphi} \right\}, \quad (3)$$

где $J_{n+1/2}(x)$ — сферическая функция Бесселя первого рода, P_n^l — многочлен Якоби, φ — азимутальный угол, Θ — комплексный угол.

Остановимся на анализе структуры непараксиального гауссова пучка низшего порядка с $l = 0$. Решение (3) запишем в виде:

$$\Psi(R) = A_0 \frac{\sin kR}{kR}. \quad (4)$$

Как показано в работе [9], параксиальный гауссов пучок можно представить в виде вложенных гиперboloидов вращения:

$$\frac{x^2 + y^2}{\rho^2} = \frac{(z + iz_0)(z - iz_0)}{z_0^2}. \quad (5)$$

Причем, на поверхности каждого гиперboloида вектор тока (вектор Пойнтинга) образует два семейства прямых линий, вдоль которых распространяется энергия, они эквивалентны геометрическим лучам, описываемым уравнением:

$$\varphi = -\sigma \arctan \frac{z}{z_0}. \quad (6)$$

Отсюда находим, что каждая точка, лежащая на поверхности волнового фронта, в процессе распространения поворачивается на угол (6) в плоскости $z = \text{const}$.

Расстояние вдоль линии тока от плоскости перетяжки до некоторой точки на волновом фронте с координатами (r, z) определяется уравнением

$$\mathcal{R}^2 = x^2 + y^2 + z^2 - \rho^2, \quad (7)$$

где ρ — радиус перетяжки гиперboloида вращения (5) в плоскости перетяжки $z = 0$, ($0 < \rho < \infty$).

Если выбрать фиксированную длину луча при $\rho = z_0$, то, как видно из сравнения (2) и (7), расстояние вдоль луча до выбранной точки равно действительной части подкоренного выражения для комплексного радиуса $R = \sqrt{\mathcal{R}^2 + iz_0 z}$. При фиксированном значении длины луча \mathcal{R} , уравнение для поверхности волнового фронта имеет вид:

$$k\mathcal{R} = kz \sqrt{\frac{r^2 + z^2 + z_0^2}{r^2 + z_0^2}}. \quad (8)$$

В частности, при условии $kz_0 \gg 1$ из (8) находим

$$k\mathcal{R} \approx kz + \frac{kr^2 z}{2(z^2 + z_0^2)} = kz + \frac{kr^2}{2R(z)}. \quad (9)$$

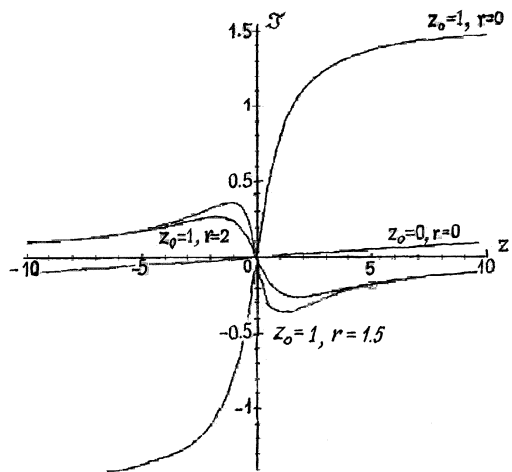
Это выражение в точности совпадает с выражением для динамической фазы параксиального гауссова пучка [1]. Мнимая часть комплексной длины (2), по-видимому, связана с вращением волнового фронта пучка. В соответствии с работой Берри [10] всякое циклическое изменение параметров волновой функции (например, вращение волнового фронта, изменение его формы) индуцирует появление топологической фазы, которая в данном случае и характеризуется аргументом комплексной длины.

Формально топологическая фаза гауссова пучка в k раз меньше динамической фазы и является аргументом комплексного радиуса, стоящего в знаменателе выражения (4) $\mathcal{J} = \arg R$:

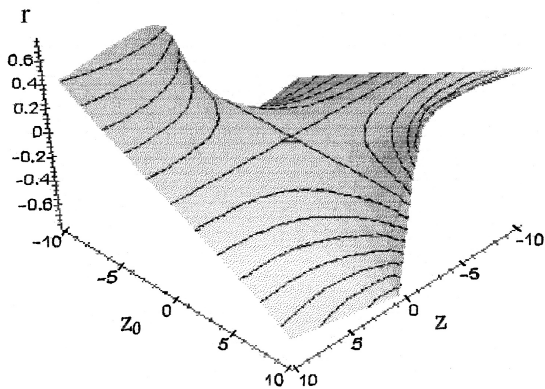
$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{z}{r+z_0} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{z}{r-z_0}. \quad (10)$$

Для больших длин Релея ($kz_0 \gg 1$) из (10) находим, что $\mathcal{J} \approx \operatorname{arctg} \frac{z}{z_0}$, т. е. совпадает с аномальной фазой Гуи, как и предполагалось. Уменьшение параметра z_0 усложняет поведение топологической фазы \mathcal{J} вблизи фокальной плоскости, поскольку в процессе ее накопления помимо вращения волнового, включаются и другие динамические процессы, например, изменение кривизны волнового фронта. При очень малых значениях параметра z_0 понятие волнового фронта вблизи фокальной плоскости вообще теряет физический смысл, поскольку волновая поверхность становится несвязанной. В этом случае величина \mathcal{J} , по-видимому, играет роль коэффициента связности. На рис. 1 приведены кривые, характеризующие поведение топологической фазы близи перетяжки пучка.

Проанализируем структуру фазовых сингулярностей непараксиального пучка вблизи плоскости $z = 0$. Построим линии равной фазы $\Phi(x, y, z, z_0) = \text{const}$ и равной амплитуды $|\Psi| = \text{const}$. Эти семейства линий приведены на рис. 2, а в координатах (r, z) . Из рисунка видно, что в окрестности перетяжки неограниченного непараксиального гауссового пучка формируются семейства концентрических кольцевых дислокаций в местах пересечений линий равной фазы. Отметим, что эти кольца располагаются на расстоянии $r > z_0$ от оси z . Мы не обнаружили, что слабое изменение параметра пучка z_0 может привести к рождению или уничтожению колец (дислокационные реакции), как предполагалось в работе [5]. Наблюдается только синхронное изменение положения дислокационных колец при любых изменениях радиуса перетяжки пучка.



а



б

Рис. 1. Топологическая фаза \mathcal{J} гауссова пучка как функция продольной координаты z при различных значениях радиальной координаты r и параметра перетяжки z_0 (а). Поверхность топологической фазы $\mathcal{J}(r, z, z_0) = 0$ в пространственных координатах r, z, z_0 (б). Все координаты приведены в единицах $1/k$, $k = 2\pi/\lambda$ ($\lambda = 0.63$ мкм).

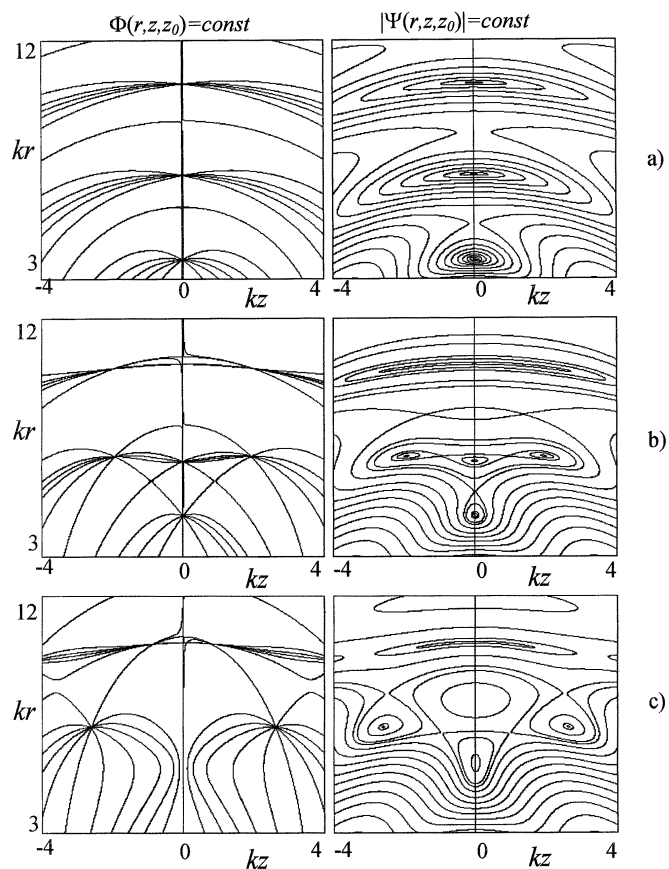


Рис. 2. Дислокационные реакции в непараксиальном гауссовом пучке вблизи перетяжки при изменении параметра z_0 : $a - kz_0 = 3$, $b - kz_0 = 5.884$, $c - kz_0 = 8.5$.

Тем не менее дислокационные реакции в непараксиальном гауссовом пучке начинают протекать при условии, если поле этого пучка линейно сложить с полем сферической волны, излучаемого точечным источником, помещенным в начало координат $x = y = z = 0$.

Результат такого сложения проявляется в цепных дислокационных реакциях, рождения и уничтожения фазовых сингулярностей по схеме, представленной в работе [11], так что суммарный топологический индекс всех фазовых сингулярностей и седел, а также полный топологический заряд, при дислокационных реакциях сохраняется.

Так, при очень слабом изменении радиуса перетяжки пучка на доли длины волны при некоторых значениях z_0 седло фазового фронта может совместиться с фазовой сингулярностью (рис. 2). В этот момент рождается две фазовые сингулярности одинаковых знаков и два седла. Дальнейший рост радиуса перетяжки приводит к аннигиляции пары седел и пары сингулярностей, что показано на рис. 2, *b, c*. Следует обратить внимание на субволновый масштаб, внутри которого протекают дислокационные реакции.

Таким образом дислокационные реакции в непараксиальном гауссовом пучке следует связывать не с самим пучком, а с дифракцией света, возникающей за счет прохождения такого пучка через непрозрачный экран с отверстием.

Список литературы

- [1] *Davis L.W.* // Phys. Rev. A. 1979. V. 19. N 3. P. 1177–1179.
- [2] *Lax M., Louisell W., McKnight B.* // Phys. Rev. A. 1975. V. 11. N 4. P. 1365–1370.
- [3] *Agrawal G.P., Pattanayak D.N.* // Journ. Opt. Soc. Am. 1979. V. 69. N 4. P. 575–578.
- [4] *Sheppard C.J.R., Saghati S.* // Phys. Rev. A. 1998. V. 57. N 4. P.2971–2979.
- [5] *Berry M.V.* // Journ. Mod. Opt. 1998. V. 45. P. 1845–1851.
- [6] *Born M.* Principles of Optics, London, New-York: Pergamon Press, 1968.
- [7] *Felson L.B.* // Journ. Opt. Soc. Am. 1976. V. 66. N 8. P. 751–760.
- [8] *Watson G.N.* A Treatise on the Theory of Bessel Function, London, 1945.
- [9] *Воляр А.В., Шведов В.Г., Фадеева Т.А.* // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. № 5. С. 87–94.
- [10] *Berry M.V.* // Proc. R. Soc. Lond. A. 1984. N 392. P. 45–57.
- [11] *Nye J.E.* // Journ. Opt. Soc. Am. A. 1998. V. 15. N 5. P. 1132–1138.