01

Фазовая мультистабильность в системах с квазипериодическим воздействием

© Т.Е. Вадивасова, О.Н. Сосновцева, А.Г. Баланов

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступило в Редакцию 31 мая 1999 г.

Исследуется влияние квазипериодической накачки на режим фазовой мультистабильности в связанных фейгенбаумовских осцилляторах. Обнаружен ряд новых эффектов, связанных со странными нехаотическими аттракторами.

Особенностью взаимодействия осцилляторов с фейгенбаумовским механизмом образования хаоса является возникновение мультистабильности периодических и хаотических режимов [1–5]. Мультистабильность в данном случае связана с возможностью взаимной синхронизации осцилляторов в различных фазах по отношению друг к другу и поэтому может быть названа фазовой мультистабильностью (ФМ). Для периодических колебаний, претерпевших k раз удвоение периода, количество возможных предельных циклов в фазовом пространстве взаимодействующих осцилляторов становится равным 2^k. Фазовый сдвиг между осцилляторами может принимать значения $\phi_0 + 2\pi m$, где $m = 0, 1, 2, \dots 2^k - 1$. В системах с дискретным временем $\phi_0 = 0$, имеет смысл числа итераций, на которое сдвинуты во времени колебания парциальных систем. ФМ сохраняется и при переходе к слабо развитому хаосу.

В данной работе рассматривается влияние на ФМ квазипериодического внешнего воздействия. Исследуется система связанных логистических отображений, в каждое из которых введено квазипериодическое возбуждение с одним и тем же числом вращения:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \varepsilon - x_n^2 + \gamma(x_n^2 - y_n^2) + a_1 \cos 2\pi z_n, \\ y_{n+1} &= \varepsilon - y_n^2 + \gamma(y_n^2 - x_n^2) + a_2 \cos 2\pi z_n, \\ z_{n+1} &= z_n + W, \quad \mod 1, \end{aligned} \tag{1}$$

где x_n, y_n — динамические переменные парциальных систем; ε — параметр нелинейности; γ — параметр связи; z_n — фаза воздействия, которая предполагается одинаковой для обеих парциальных систем; W —

число вращения, задаваемое внешней силой (соответствует отношению частот воздействия в потоковой системе). Оно фиксировалось равным золотому сечению: $W = 0.5(\sqrt{5} - 1)$. Символ mod 1 означает, что $0 \leqslant z_n \leqslant 1$. Амплитуды воздействия на первый и второй осциллятор есть соответственно: $a_1 = a_0$ и $a_2 = pa_0$, где p — расстройка амплитуд. Предполагалось, что расстройка отсутствует ($p = 1$), в этом случае у системы (1) имеется инвариантное многообразие U, задаваемое условием $x_n = y_n$. Траектории, стартующие из точек, принадлежащих U, никогда не покидают инвариантного многообразия. Движения в плоскости U соответствуют случаю $m = 0$ и называются синфазными. Режимы, для которых $m \neq 0$, называются несинфазными. Соответствующие им фазовые траектории не лежат в U. Мультистабильность в системе (1) в отсутствие внешнего воздействия ($a_0 = 0$) исследовалась в [3,4]. При слабой связи наблюдалось сосуществование режимов, принадлежащих нескольким ветвям, порождаемым предельными циклами, соответствующими различным значениям m. С ростом параметра ε происходит возникновение хаотических режимов различных ветвей и их последующее объединение в глобальный хаотический аттрактор. С ростом параметра связи γ несинфазные режимы исчезают, и наблюдается переход к так называемой полной синхронизации [5,6].

Как показали исследования системы (1) при $a_0 \neq 0$, $p = 1$ и $\gamma = 0.002$, проведенные в данной работе, явление ФМ оказывается достаточно грубым по отношению к слабому квазипериодическому воздействию. Сохраняются основные ветви режимов, существовавшие в автономной системе. Однако вместо периодических колебаний наблюдаются квазипериодические режимы и режимы, соответствующие странному нехаотическому аттрактору [7–12]. Последние возникают в результате фрактализации инвариантной замкнутой кривой, являющейся образом двухчастотных квазипериодических колебаний в системе с дискретным временем. В системе (1) обнаружены два механизма фрактализации: 1) постепенное искажение формы кривой, приводящее к потере гладкости [11]; 2) мгновенная фрактализация в результате кризиса, вызванного касанием устойчивой и неустойчивой инвариантной кривой [8,9]. Для диагностики режима странного нехаотического аттрактора наряду с расчетом ляпуновских показателей использовался критерий фазовой чувствительности, предложенный в [10]. Для краткости будем применять следующие обозначения динамических режимов: T — квазипериодические двухчастотные колебания, СНА — странный нехаотический аттрактор, СА — странный хаотический аттрактор; цифра, стоящая перед буквенным обозначением, соответствует количеству лент (частей) аттрактора, верхний индекс: 0, 1, 2, 3 равен числу m, определяющему фазовый сдвиг между последовательностями x_n и y_n. Знак Σ указывает на объединение предельных множеств различных ветвей.

Последовательность режимов с ростом ε, типичная для малых амплитуд a_0, отражена на диаграмме рис. $1, a$ $(a_0 = 0.01)$. Отмечены три ветви режимов: **A**, **B** и **C**, порождаемые квазипериодическими аттракторами, для которых $m = 0$, 1 и 2 соответственно. Синфазный квазипериодический аттрактор T^0 (ветвь **A**) претерпевает две бифуркации удвоения (при $\varepsilon \approx 0.750$ и $\varepsilon \approx 1.253$), после чего происходит его фрактализация первым из указанных способов $(\varepsilon \approx 1.376)$. Образование СНА в инвариантном многообразии U сопровождается нарушением грубости синфазного режима. При задании начальной точки вне многообразия U наблюдается длительная переходная перемежаемость [13–15]. Малая расстройка амплитуд воздействия (≈ 1.0001) или слабый шум приводят к явлениям типа "bubbling" (пузырение) [13,14]. Такое поведение наводит на мысль, что не только хаотический, но и странный нехаотический аттрактор может иметь свойства аттрактора Милнора [16]. Дальнейшее увеличение ε приводит при $\varepsilon \approx 1.380$ к бифуркации прорыва, которая диагностируется по смене знака трансверсального ляпуновского показателя [6,15]. Однако во всех исследованных случаях бифуркации прорыва предшествовал переход к хаотическому поведению. При $a_0 = 0.01$ переход к хаосу наблюдается при $\varepsilon \approx 1.379$. После бифуркации прорыва образуется аттрактор $2\mathrm{CA}_A^\Sigma$, уже не лежащий в U. Далее он становится хаотическим седлом $(\varepsilon \approx 1.392)$ и изображающая точка уходит на аттрактор ветви **C**. Несинфазный хаос ветви **C** развивается по аналогичному сценарию: $\mathrm{T} \to \mathrm{CHA} \to \mathrm{CA}$ (соответственно при $\varepsilon \approx 1.378$ и $\varepsilon \approx 1.379$). При $\varepsilon \approx 1.394$ происходит объединение частей хаотического аттрактора ветви C с одновременным присоединением хаотического седла ветви **A**. Образовавшийся объединенный хаос $2\mathrm{CA}_C^\Sigma$ при $\varepsilon \approx 1.519$ также перестает быть притягивающим, и изображающая точка переключается на аттрактор ветви **B**. Для ветви **B** характерно рождение трехчастотного квазипериодического режима $(\varepsilon \approx 1.259)$, образом которого является двумерный тор отображения. На торе рождается пара инвариантных замкнутых кривых $4\mathrm{T}^1$ и $4\mathrm{T}^3$, соответствующих $m = 1$ и 3. Они обладают свойством взаимной симметрии относительно замены $x_n \to y_n$. С ростом ε происходит их фрактализация $(\varepsilon \approx 1.382)$ и возникновение хаоса $(\varepsilon \approx 1.385)$. Хаотические аттракторы $4\mathrm{CA}^1$ и $4\mathrm{CA}^3$

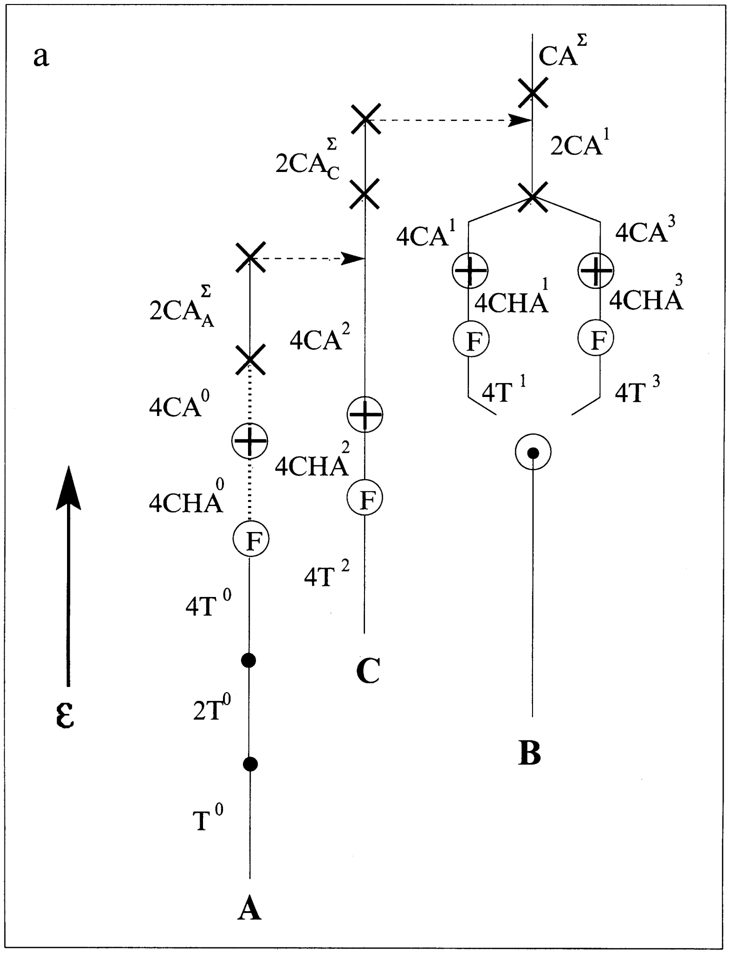


Рис. 1. Диаграмма режимов системы (1) без расстройки ($p = 1$): a — при изменении параметра ε и фиксированном значении $a_0 = 0.1$; b — при изменении параметра a_0 и фиксированном значении $\varepsilon = 1.2$: *1* — удвоение периода, *2* — фрактализация инвариантной кривой, *3* — граница хаоса, *4* — кризис, *5* — рождение трехмерного тора, *6* — участки негрубого аттрактора.

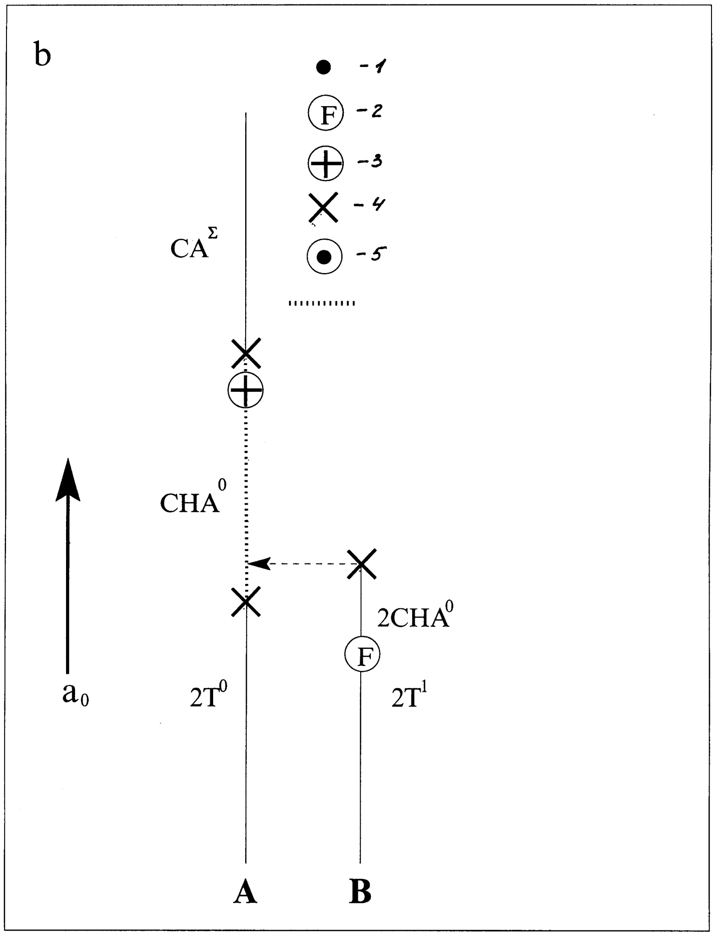


Рис. 1 (*продолжение*).

объединяются при $\varepsilon \approx 1.398$ в один аттрактор $2CA^1$. При $\varepsilon \approx 1.523$ происходит объединение аттрактора $2CA^1$ с непритягивающим хаотическим множеством и возникает глобальный аттрактор CA^{Σ}, включающий хаотические множества всех ветвей.

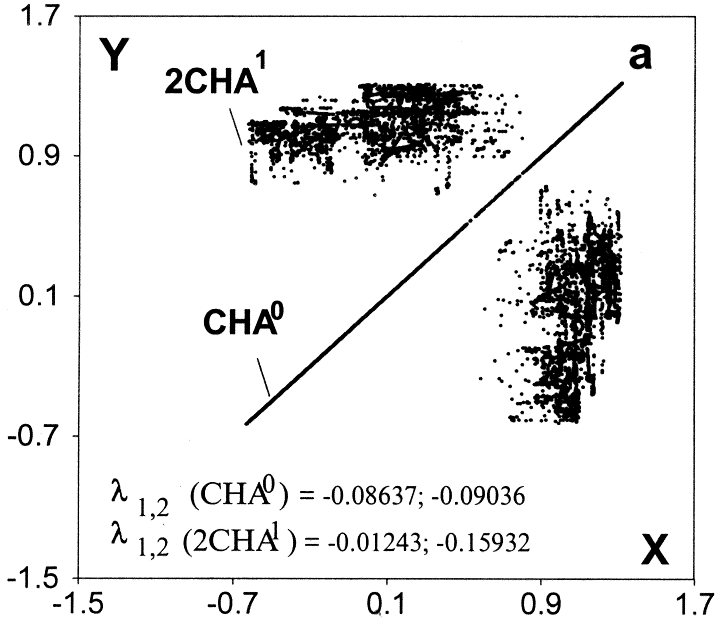
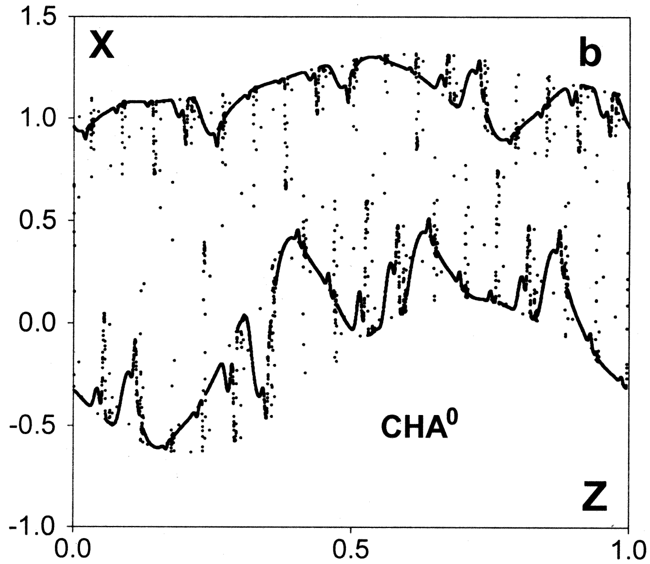


Рис. 2. Проекции странных нехаотических аттракторов и соответствующие ненулевые ляпуновские показатели при $\varepsilon = 1.2$: *a* — **X**—**Y**-проекции сосуществующих аттракторов СНА^0 и 2СНА^1; *b* — **X**—**Z**-проекция аттрактора СНА^0; *c* — **X**—**Y**-проекция нехаотического режима перемежаемости, возникающего при введении расстройки $p = 1.0001$.

Начиная с некоторого значения амплитуды воздействия a_0, мультистабильность отсутствует. На диаграмме (рис. 1, *b*) представлена последовательность режимов при $\varepsilon = 1.2$ в интервале изменения амплитуды от $a_0 \approx 0.118$ до $a_0 \approx 0.130$. Здесь наблюдаются режимы только ветвей **A** и **B**, которые объединяются с ростом a_0. При $a_0 \approx 0.1185$ синфазный квазипериодический аттрактор 2T^0 (ветвь **A**) претерпевает кризис, сопровождающийся объединением частей аттрактора [8]. В результате происходит фрактализация инвариантной кривой, и возникает синфазный странный нехаотический аттрактор СНА^0. На ветви **B** также наблюдается фрактализация кривой 2T^1 ($a_0 \approx 0.1182$), но без кризиса. Возникает несинфазный аттрактор 2СНА^1. Проекции СНА^0 и 2СНА^1



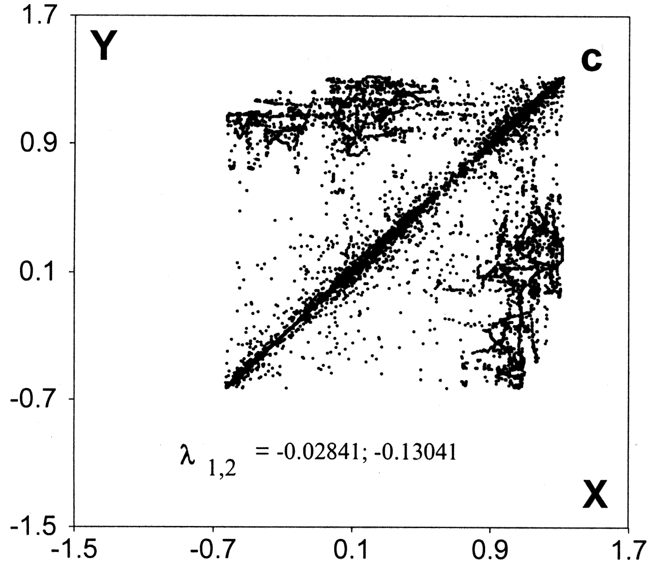


Рис. 2 (*продолжение*).

представлены на рис. 2, a, b. При $a_0 \approx 0.1188$ нехаотическое фрактальное множество ветви **B** перестает быть притягивающим. Аттрактор CHA^0 становится единственным в фазовом пространстве. Однако он не является грубым. Расстройка $p = 1.0001$ приводит к объединению нехаотических фрактальных множеств ветвей **A** и **B**. Объединенный аттрактор (рис. 2, c) также не является хаотическим. В отсутствие расстройки переход к хаосу и бифуркация прорыва наблюдаются почти одновременно при $a_0 \approx 0.1260$, после чего образуется объединенный хаотический аттрактор CA^{Σ}.

Данная работа частично поддержана грантом РФФИ (N 98–02–16531). Т.Е. Вадивасова также благодарит за поддержку Международную соросовскую программу в области точных наук (грант N d99–835, 1999 г.)

Список литературы

[1] *Kaneko K.* // Progr. Theor. Phys. 1983. V. 69. N 5. P. 1427–1442.
[2] *Кузнецов С.П.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. № 8. С. 991–1007.
[3] *Астахов В.В.* и др. // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 15. В. 3. С. 60–64.
[4] *Астахов В.В.* и др. // ЖТФ. 1990. Т. 60. В. 10. С. 19–26.
[5] *Postnov D.E.* et al. // Chaos. 1999. V. 9. N 1. P. 227–232.
[6] *Pecora L.M., Carroll T.L.* // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. P. 821–823.
[7] *Grebogi C.* et al. // Physica D. 1984. V. 13. P. 261–268.
[8] *Heagy J.F., Hammej S.M.* // Physica D. 1994. V. 70. P. 140–153.
[9] *Feudel U., Pikovsky A.S.* // Physica D. 1995. V. 88. P. 176–186.
[10] *Pikovsky A.S., Feudel U.* // Chaos. 1995. V. 5. P. 253–260.
[11] *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Sosnovtseva O.V.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 53. N 5. P. 4451–4457.
[12] *Ramaswamy R.* // Phys. Rev. E. 1997. V. 56. P. 7294–7296.
[13] *Ashwin P., Buescu J., Stewart I.* // Nonlinearity. 1994. V. 9. P. 703–737.
[14] *Hasler M., Maistrenko Y.* // IEEE Transactions on Circuits and Systems. Fundamental Theory and Applications. 1997. V. 44. P. 856.
[15] *Ott E., Sommerer J.C.* // Phys. Lett. A. 1994. V. 188. P. 39–47.
[16] *Milnor J.* // Commun. Math. Phys. 1985. V. 99. P. 177–195.