01;03

Точное решение для стационарного профиля поверхности жидкого металла во внешнем электрическом поле

© Н.М. Зубарев

Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург

Поступило в Редакцию 13 июля 1999 г.

Рассмотрена задача о равновесной форме свободной поверхности жидкого металла во внешнем электрическом поле без учета сил тяжести. Показано, что использование метода конформных отображений позволяет найти широкий класс ее точных решений, соответствующий случаю плоской симметрии.

Задача о стационарном профиле свободной поверхности жидкого металла во внешнем электрическом поле играет важную роль в понимании основных закономерностей развития электрогидродинамической неустойчивости [1,2]. Имеется значительное количество работ (см., например, [3,4]), где подобная задача решалась в приближении малости возмущений поверхности (обычно рассматривается жидкость с конечной диэлектрической проницаемостью; случай жидкого металла соответствует пределу $\varepsilon \to \infty$). Покажем, что в двумерном случае, когда все величины зависят от пары независимых переменных x и y, использование метода конформных отображений позволяет снять это ограничение.

Пусть вектор напряженности внешнего поля величиной E_0 направлен вдоль оси y. Распределение потенциала электрического поля φ (напряженность поля задается соотношением $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$) над поверхностью S жидкого металла описывается уравнением Лапласа:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0,$$

которое следует дополнить условием эквипотенциальности границы проводника $\varphi|_S = 0$, а также условием однородности поля на бесконечности:

$$\varphi \to -E_0 y, \quad y \to \infty. \tag{1}$$

Заметим, что для радиуса кривизны эквипотенциальной поверхности справедливо: $R^{-1} = -\partial E/\partial\varphi$, где $E = |\mathbf{E}|$ — абсолютное значение напряженности поля. Тогда без учета поля тяжести условие баланса сил [5] запишется в виде:

$$p + \frac{E^2}{8\pi}\bigg|_S = \alpha \frac{\partial E}{\partial \varphi}\bigg|_S, \tag{2}$$

где α — коэффициент поверхностного натяжения, p — разность между давлением жидкости и внешним давлением, которую мы положим равной невозмущенному электростатическому давлению: $p = -E_0^2/(8\pi)$.

Примем E_0 за единицу напряженности электрического поля, а $8\pi\alpha E_0^{-2}$ за единицу длины. Далее, введем в рассмотрение вспомогательную функцию ψ, гармонически сопряженную с потенциалом φ (кривые $\psi = \text{const}$ задают силовые линии поля). Выражение $w = \varphi - i\psi$ (так называемый комплексный потенциал) является аналитической функцией комплексного переменного $z = x + iy$ [5]. В таком случае аналитической функцией также будет $f - i\theta \equiv \ln(-dw/dz)$. Величина θ имеет смысл угла наклона вектора напряженности электрического поля к оси абсцисс, а величина f связана с абсолютным значением поля соотношением $f = \ln E$. Используя свойства аналитических функций, в системе координат, где роль независимых переменных будут играть величины φ и ψ, получим при $\varphi < 0$:

$$f_{\varphi\varphi} + f_{\psi\psi} = 0. \tag{3}$$

Граничные условия для функции f несложно найти из (1) и (2):

$$\partial f/\partial\varphi = -e^{-f} + e^{f}, \quad \varphi = 0, \tag{4}$$

$$f \to 0, \quad \varphi \to -\infty. \tag{5}$$

То есть задача нахождения стационарного профиля поверхности жидкого металла во внешнем электрическом поле с учетом капиллярных сил сводится к рассмотрению нелинейной краевой задачи на полуплоскости (3)–(5).

Следует отметить, что система (3)–(5) с точностью до коэффициентов совпадает с полученной в работе [6] при решении задачи о стационарном профиле прогрессивной капиллярной волны. Аналогия связана с тем, что с математической точки зрения уравнения, описывающие двумерное распределение электрического поля в отсутствии пространственных зарядов, тождественны уравнениям для плоского потенциального течения идеальной жидкости.

Действуя по аналогии с [6], будем искать решение в виде:

$$f(\varphi, \psi) = \ln\left(\frac{Z(\varphi) + Y(\psi)}{Z(\varphi) - Y(\psi)}\right), \tag{6}$$

где Y и Z — неизвестные функции переменных ψ и φ, соответственно. Подставляя это выражение в (3)–(5), обнаруживаем, что должны выполняться следующие соотношения:

$$Z(\varphi) = (k/2 + 1)e^{-k\varphi} + (k/2 - 1)e^{k\varphi}, \quad Y(\psi) = \sqrt{k^2 - 4}\cos(k\psi),$$

в совокупности с (6) представляющие точные решения рассматриваемой краевой задачи.

В дальнейшем нам понадобятся зависимости функций E и θ от переменной ψ на поверхности проводника. Подставляя выражения для Z и Y в соотношение (6) и учитывая, что $E = \exp f$, получим, что абсолютное значение напряженности электрического поля задается выражением:

$$E|_{\varphi=0} = \frac{1 + c(k)\cos(k\psi)}{1 - c(k)\cos(k\psi)}, \tag{7}$$

где мы обозначили $c(k) = \sqrt{1 - 4/k^2}$. Что касается угла $\theta|_{\varphi=0}$, то используя условие Коши–Римана $\partial\theta/\partial\psi = \partial f/\partial\varphi$, находим из уравнения (4) интегрированием по ψ:

$$\theta|_{\varphi=0} = \frac{\pi}{2} + 2\arctan\left(\frac{kc(k)}{2}\sin(k\psi)\right). \tag{8}$$

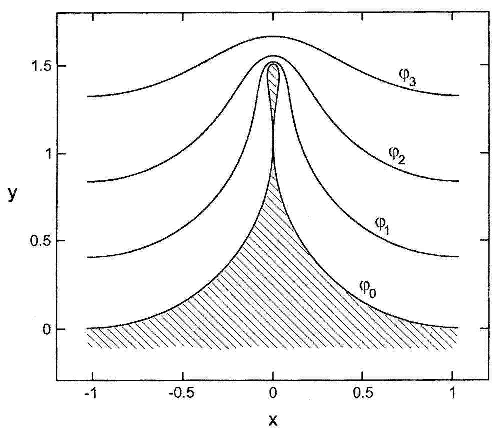
Построим теперь равновесные профили свободной поверхности жидкого металла в координатах $\{x, y\}$. Переход от переменных φ и ψ к переменным x и y осуществляется с помощью преобразования: $z = -\int \exp(-f + i\theta)dw$. Подставляя сюда выражения (7) и (8), отделяя вещественную часть от мнимой и учитывая, что на границе $w = -i\psi$, находим окончательно:

$$y = 1 - c(k) - \frac{4k^{-2}}{1 + c(k)\cos(k\psi)}, \tag{9}$$

$$x = \frac{\pi}{k} - \psi + \frac{2c(k)k^{-1}\sin(k\psi)}{1 + c(k)\cos(k\psi)}, \tag{10}$$

где $k \geqslant 2$. Таким образом, мы получили параметрические уравнения равновесной поверхности S. Видно, что длина волны задается соотношением $\lambda = 2\pi/k$, так что параметр k играет роль волнового числа.

Выражения (9), (10) позволяют найти зависимость амплитуды возмущения поверхности жидкого металла, определяемой как разность максимального и минимального значений y на периоде, от волнового числа: $A(k) = 2\sqrt{1 - 4/k^2}$. При увеличении k амплитуда монотонно растет, достигая максимального значения при $k = k_c \approx 3.042$, когда занимаемая жидкостью область становится неодносвязной — формируются отдельные жидкометаллические капли, соединенные с основной массой металла бесконечно тонкими перетяжками. Соответствующая критическому значению волнового числа $k = k_c$ равновесная поверхность представлена на рисунке; также изображено семейство эквипотенциальных поверхностей, дающее представление о распределении электрического поля над границей жидкого металла. В заключение отметим, что для приведенной на рисунке конфигурации проводящей жидкости отношение амплитуды возмущения поверхности к длине волны составляет 0.73, а значение электрического поля на острие превышает внешнее поле почти на порядок — в 7.1 раз.



Один период стационарного профиля свободной поверхности жидкого металла во внешнем электрическом поле для критического значения волнового числа $k = k_c \approx 3.042$. Приведены соответствующие различным значениям параметра φ ($\varphi_1 = -0.07$, $\varphi_2 = -0.19$ и $\varphi_3 = -0.42$) эквипотенциальные поверхности; на границе жидкого металла $\varphi = \varphi_0 = 0$.

Автор признателен Е.А. Кузнецову, любезно указавшего на работу [6], а также А.М. Искольдскому и Н.Б. Волкову за плодотворные обсуждения.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 97–02–16177.

Список литературы

[1] *Tonks L.* // Phys. Rev. 1935. V. 48. P. 562.
[2] *Френкель Я.И.* // ЖТФ. 1936. Т. 6. С. 347.
[3] *Шлиомис М.И.* // УФН. 1974. Т. 112. С. 427.
[4] *Кузнецов Е.А., Спектор М.Д.* // ЖЭТФ. 1976. Т. 71. С. 262.
[5] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
[6] *Crapper G.D.* // J. Fluid Mech. 1957. V. 2. P. 532.