

03

Гистерезис и метастабильность перехода от испарительного режима к капельному при течении жидкости через капилляр

© А.В. Мелких, В.Д. Селезнев

Уральский государственный технический университет, Екатеринбург

Поступило в Редакцию 10 декабря 1998 г.

В окончательной редакции 22 апреля 1999 г.

Построена модель перехода от испарительного к капельному течению жидкости через капилляр в поле сил тяжести, учитывающая взаимное влияние капель. Получена S -образная зависимость потока от перепада давления на капилляре, которая при определенных (критических) значениях управляющего параметра переходит в монотонную кривую. Найдены значения перепада давления, при которых капельный режим течения и режим при отсутствии капель соответственно теряют устойчивость. Показано, что в некоторой области перепада давлений при наличии шума возможны переходы как от испарительного режима к капельному, так и обратно (перемежаемость).

Явление перехода к капельному течению жидкости в капилляре используется в различных устройствах и технологических процессах: при электроструйной печати, при дозировании жидкостей в химической технологии, в медицинской технике и т. д. Переход к капельному режиму изучался как экспериментально [1–3], так и теоретически. В литературе рассмотрены уравнения капиллярных поверхностей для различных видов капель в поле сил тяжести, а также проведен линейный анализ устойчивости висящей капли [4,5]. Однако, когда падение капли уже состоялось, капли могут влиять друг на друга, что может приводить к нелинейным эффектам. Моделированию перехода от испарительного к капельному режиму с учетом взаимного влияния капель друг на друга и посвящена данная статья.

Рассмотрим тонкостенный вертикальный капилляр с жидкостью. Обозначим через Δp_{s0} такой перепад давления жидкости в капилляре, при котором висящая капля теряет устойчивость по отношению к отрыву от капилляра. Величину Δp_{s0} можно приближенно найти по

формуле:

$$\Delta p_{s0} = \frac{2\sigma}{r}, \quad (1)$$

где σ — поверхностное натяжение, r — радиус капилляра.

Очевидно, что после падения капли поверхность жидкости на торце капилляра не станет сразу равновесной. Время релаксации давлений на свободной поверхности обозначим через τ , а частоту возникающих при этом поверхностных колебаний через ω_0 .

Ярко выраженные колебания поверхности жидкости на торце капилляра будут иметь место, если

$$\tau \gg \omega_0^{-1}. \quad (2)$$

При $\tau \ll \omega_0^{-1}$ начальное возмущение угасает монотонно. Величины τ и ω_0 могут быть рассчитаны аналогично [6]:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{8\sigma}{\rho r^3}}, \quad \tau = \frac{\rho r^2}{8\eta}, \quad (3)$$

где η — динамическая вязкость. Оценка величин по формулам (3) показывает, что для воды (например, при $r' \sim 0.25$ mm) при комнатной температуре надежно выполняется условие (2).

Третье характерное время рассматриваемой задачи — обратная частота падения капель J^{-1} .

Если время релаксации возмущения τ становится сравнимым с периодом падения капель J^{-1} , то условия устойчивости будут отличаться для первой и последующих капель.

Рассмотрим более подробно случай, когда поверхность жидкости испытывает колебания. Амплитуда таких колебаний затухает по экспоненциальному закону:

$$\Delta x = \Delta x_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),$$

где Δx_0 — начальное возмущение.

В тот момент, когда капля оторвалась, поверхность жидкости оказывается растянутой с силой mg , где m — масса капли. Тогда амплитуда остаточного давления p_1 (связанного с деформацией поверхности после

отрыва капли) будет затухать со временем по закону:

$$p_1 = \xi \rho g r \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),$$

где ρ — плотность жидкости, ξ — безразмерный коэффициент порядка единицы.

Ясно, что следующая капля будет находиться в условиях, отличных от первой. Отличие это будет состоять в том, что остаточное давление позволит капле упасть при $\Delta p < \Delta p_{s0}$.

Условие устойчивости (1) в таком случае преобразуется к виду:

$$\Delta p_s = \frac{2\sigma}{r} - \xi \rho g r \exp\left(-\frac{1}{J\tau}\right). \quad (4)$$

Превышение разности давлений на капилляре над величиной Δp_s (4) является причиной гидродинамического переноса жидкости через канал. Возникающую при этом скорость потока можно оценить с помощью формулы Пуазейля:

$$u = -\frac{\pi r^2}{8\eta L} (\Delta p - \Delta p_s), \quad (5)$$

где η — динамическая вязкость жидкости, L — длина капилляра.

Усредняя (5) по времени на периоде возникновения капель, легко получить выражение для частоты падения капель:

$$J = \frac{\rho \pi r^4}{8\eta L m} (\Delta p - \Delta p_s) = \frac{3r}{32\eta L} (\Delta p - \Delta p_s), \quad (6)$$

где $m = 4\pi\rho\gamma r^3/3$ — масса капли, γ — коэффициент, учитывающий различие диаметров капли и капилляра [2].

Из (6) и (4) получим выражение для частоты падения капель:

$$\frac{32\eta\gamma L}{3r} J = \Delta p - \frac{2\sigma}{r} + \xi \rho g r \exp\left(-\frac{1}{J\tau}\right).$$

Удобно ввести безразмерные разность давлений и частоту падения капель:

$$\Delta p' = \frac{\Delta p}{\xi \rho g r} \quad \text{и} \quad J' = J\tau;$$

опуская штрихи, в дальнейшем получим:

$$\frac{32\eta\gamma L}{3r^2\xi\rho g\tau}J = \Delta\rho - \frac{2\sigma}{\rho g r^2\xi} + \exp\left(-\frac{1}{J}\right),$$

$$MJ = \Delta\rho - B^{-1} + \exp\left(-\frac{1}{J}\right), \quad (7)$$

где $B = \frac{\rho g r^2\xi}{2\sigma}$ — число Бонда, характеризующее отношение сил тяжести с силами поверхностного натяжения; $M = \frac{32\eta\gamma L}{3r^2\xi\rho g\tau}$ — некоторый безразмерный параметр, характеризующий отношение сил вязкости к силам тяжести.

Графики зависимости J от $\Delta\rho$ при различных значениях чисел M приведены на рис. 1.

Вид кривой имеет S-образный характер. В точках A и B происходит смена режима. При $M > M_c$ кривая носит монотонный характер и

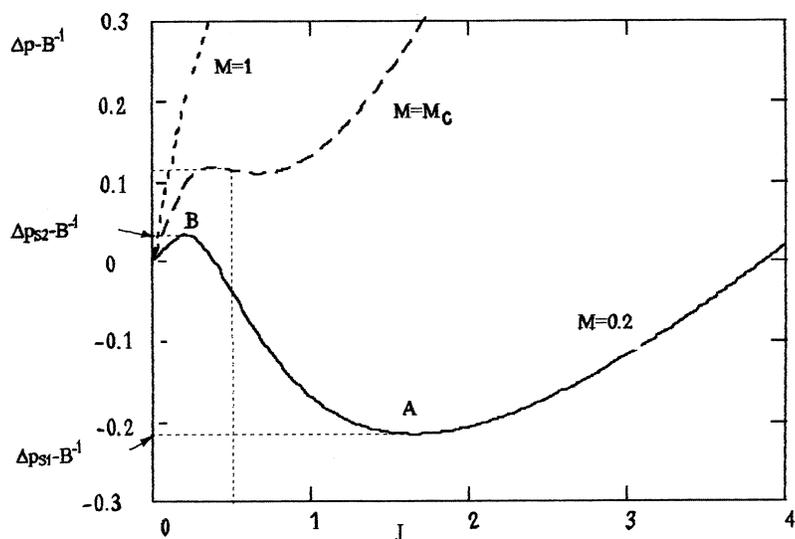


Рис. 1.

гистерезис исчезает. Из уравнения (7) путем дифференцирования $\Delta p(J)$:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial J} = M - \frac{1}{J^2} \exp\left(-\frac{1}{J}\right) = 0 \quad (8)$$

легко найти координаты точек A и B . Эти точки будут соответствовать потере устойчивости системой.

Уравнение (8) может иметь либо два решения, либо не иметь совсем. Что касается границы устойчивости капли (условие (1)), то она считается заданной. Оба решения соответствуют границам устойчивости капельных режимов — ”быстрого” и ”медленного”. Действительно, если капли влияют друг на друга и могут падать при $\Delta p < B^{-1}$, то поток не может быть бесконечно малым, поскольку взаимное влияние капель в этом случае исчезает. То есть переход от капельного режима к отсутствию капель в области $\Delta p_{S1} < \Delta p < B^{-1}$ должен происходить скачком.

Приравнявая нулю вторую производную

$$\frac{\partial^2 \Delta p}{\partial J^2} = \exp\left(-\frac{1}{J}\right) \left[\frac{2}{J^3} - \frac{1}{J^4} \right] = 0$$

и используя равенство (7), получим значения параметров системы в критической точке:

$$J_c = \frac{1}{2}, \quad M_c = 4e^{-2}, \quad \Delta p_c = e^{-2} + B^{-1}.$$

Если $M > 4e^{-2}$ (например, при большой вязкости или длине канала), то гистерезис в системе невозможен и переход от капельного режима течения к испарительному (на рисунке — прямая $J = 0$ при $\Delta p < B^{-1}$) и обратно будет происходить непрерывно (без скачка). В этом случае капли практически не влияют друг на друга (см., например, [1]).

Если $M < 4e^{-2}$, то в системе может наблюдаться гистерезис: при повышении перепада давления от точки $\Delta p < \Delta p_{S1}$ система перейдет скачком на верхнюю ветвь кривой $J(\Delta p)$, если же система движется в обратном направлении от точки $\Delta p > \Delta p_{S2}$, то в точке Δp_{S1} она скачком попадет на нулевое значение потока. Таким образом, для моделируемой системы получается S -образная кривая, характерная, например, для триггерных систем [7].

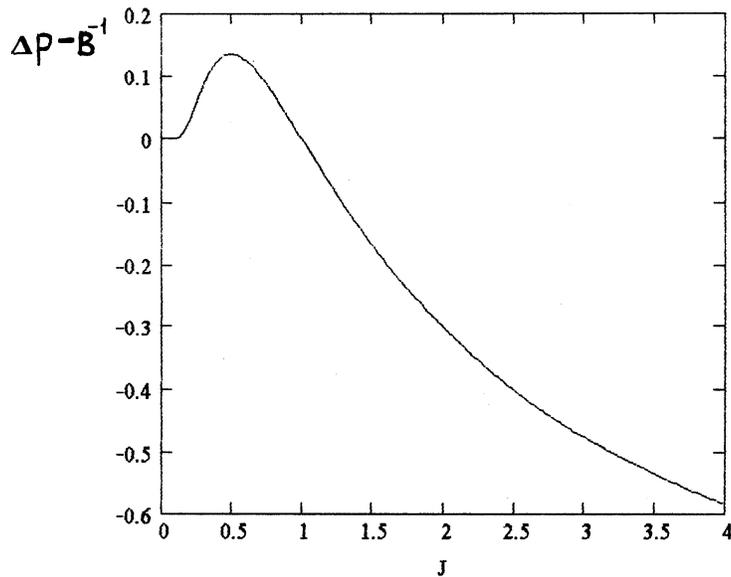


Рис. 2.

Совокупность всех точек потери устойчивости (при различных значениях M) представляет собой кривую в координатах $J - \Delta p$. Эта кривая является аналогом спинодали для равновесных фаз.

Для того чтобы получить уравнение спинодали в координатах $J - \Delta p$, выразим величину M из уравнения (8) и подставим в уравнение (7):

$$\Delta p = B^{-1} - \exp\left(-\frac{1}{J}\right) \left[1 - \frac{1}{J}\right]. \quad (9)$$

Полученное уравнение описывает кривую — совокупность всех точек спинодали (рис. 2).

При наличии шума поведение системы изменится. Очевидно, что в области $\Delta p_{S1} < \Delta p < \Delta p_{S2}$ система является метастабильной. То есть оба возможных состояния, будучи устойчивы по отношению к малым возмущениям, являются неустойчивыми по отношению к конечным возмущениям. При наличии шума таким образом будет происходить

переход от нижней кривой $J = 0$ на верхнюю и обратно. Такое поведение системы называется перемежаемостью.

Ясно, что должно существовать в указанном промежутке такое значение $\Delta p = \Delta p_B$, при котором существование обоих типов течения равновероятно. Можно провести параллель между обоими типами течения и равновесными фазами (например, для перехода пар–жидкость). Числа Δp_{S1} , Δp_{S2} соответствуют спинодалям обеих фаз, а число Δp_B соответствует бинадали.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 98–01–00879).

Список литературы

- [1] *Wilson S.D.R.* // J. Fluid Mech. 1988. V. 190. P. 561–570.
- [2] *Скотников А.С., Холина Т.Б.* // Химическая промышленность. 1985. № 5. С. 44–46.
- [3] *Дунайский В.Ф., Никитин Н.В.* // Журнал прикладной механики и технической физики. 1980. № 1. С. 49–55.
- [4] *Григорьев А.И., Земсков А.А., Ширяева С.О.* // Научное приборостроение. 1991. Т. 1. № 2. С. 50–58.
- [5] *Финн Р.* Равновесные капиллярные поверхности. Математическая теория. М.: Мир, 1989. 312 с.
- [6] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6: Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 733 с.
- [7] *Эбелинг В.* Образование структур при необратимых процессах: Введение в теорию диссипативных структур. М.: Мир, 1979. 279 с.