Экситоны Ванье–Мотта в гетероструктурах узкощелевых полупроводников

© А.П. Силин, С.В. Шубенков

Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук,
117924 Москва, Россия

(Поступила в Редакцию 28 апреля 1999 г.
В окончательной редакции 19 мая 1999 г.)

В двухзонной модели Дирака проведено исследование спектров экситонов в массивном полупроводнике и в тонком полупроводниковом слое. Получены тонкие структуры спектров, зависимость энергии связи экситона от ширины запрещенной зоны и в двумерном случае — от толщины слоя.

Расчеты энергии связи экситона — как аналитические, так и численные — проведены для всевозможных широкозонных полупроводниковых структур и хорошо известны [1–3]. Однако до сих пор отсутствует исследование зависимости энергии связи экситона от величины энергетической щели полупроводника. Это связано с тем, что обычно отношение энергии связи экситона к ширине энергетической щели, во-первых, мало, а во-вторых, постоянно. Поэтому влияние конечности энергетической щели маскируется другими эффектами, такими, например, как анизотропия энергетических зон, дисперсия диэлектрической проницаемости и т. п. Представляет, однако, большой интерес исследование расщепления основного состояния экситона, связанное с конечностью энергетической щели. Последние достижения полупроводниковой технологии позволяют создавать полупроводниковые структуры, для которых исследование зависимости энергии связи экситона от величины энергетической щели довольно актуально. Это связано с тем, что в полупроводниковых гетероструктурах эффективная энергерическая щель зависит от размеров квантовой ямы, квантовой нити или квантовой точки, где локализованы носители тока, и ее легко можно изменить (см., например, [4]). Следует также отметить, что энергия связи экситона в двумерных и квазиодномерных структурах существенно больше, чем в трехмерном случае. Рассматриваемые нами эффекты особенно существенны для гетероструктур, составленных из таких полупроводников, в которых отношение энергии связи экситона к энергетической щели может превышать 1/10 (см., например, [5]). Именно такие полупроводники мы и будем называть узкощелевыми.

В данной работе рассмотрены две задачи: об образовании трехмерного и двумерного экситона в узкощелевом полупроводнике с изотропными энергетическими зонами и постоянной изотропной диэлектрической проницаемостью ε. В этом случае свободные носители тока описываются уравнением Дирака [6]

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = \Big(\nu\hat{\boldsymbol{\alpha}}\hat{\mathbf{p}} + \hat{\beta}\Delta\Big)\psi. \tag{1}$$

Здесь и далее $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$, $\hat{\beta}$ — матрицы Дирака, $\hat{\mathbf{p}}$ — оператор трехмерного импульса, $\Delta = E_g/2$ — полуширина запрещенной зоны, ψ — огибающая волновой функции электрона, ν — кейновский матричный элемент (квазискорость света), $\nu = \sqrt{\Delta/m} \ll c$, c — скорость света в вакууме, m — эффективная масса электрона и дырки (в этой модели их массы равны). При этом закон дисперсии носителей

$$E(p) = \pm\sqrt{p^2\nu^2 + \Delta^2}. \tag{2}$$

В первом разделе рассмотрен трехмерный экситон в массивном полупроводнике, во втором — двумерный экситон в тонком полупроводниковом слое в сверхрешетке или квантовой яме.

1. Экситон в массивном узкощелевом полупроводнике

Задача нахождения энергии связи и тонкой структуры экситона в массивном узкощелевом полупроводнике в основном состоянии аналогична задаче о позитронии. Отличие состоит в том, как включается взаимодействие в свободное уравнение Дирака (1) [7]. В квантовой электродинамике слагаемое, отвечающее взаимодействию с электромагнитным полем, имеет следующий вид:

$$\hat{V} = \frac{e}{c}\int \hat{j}^{\mu}(\mathbf{r})\,\hat{A}^{\mu}(\mathbf{r})\,d^3\mathbf{r}. \tag{3}$$

Здесь e — заряд электрона, $\hat{j}^{\mu} = \big(\hat{\bar{\psi}}\gamma^{\mu}\hat{\psi}\big)$ — оператор плотности тока, $\hat{\bar{\psi}} = \hat{\psi}^{*}\gamma^0$, $\hat{A}^{\mu} = (\hat{\Phi}, \hat{\mathbf{A}})$ — оператор электромагнитного поля, $\gamma^{\mu} = (\gamma^0, \boldsymbol{\gamma})$ — матрицы Дирака, по четырехкомпонентному индексу μ делается свертка. В узкощелевых полупроводниках из-за наличия двух характерных констант размерности скорости оператор тока содержит коэффициент ν/c перед векторной частью (см. [7])

$$j^{\mu} = (j^0, j^i) = \Big(\hat{\bar{\psi}}\gamma^0\hat{\psi},\ \frac{\nu}{c}\hat{\bar{\psi}}\gamma^i\hat{\psi}\Big),$$

и слагаемое, отвечающее взаимодействию с электромагнитным полем, выглядит иначе

$$\hat{V} = e\int \hat{\psi}^{*}(\mathbf{r})\,\hat{\psi}(\mathbf{r})\,\hat{\Phi}(\mathbf{r})d^3r + \frac{e\nu}{c}\int \hat{\bar{\psi}}(\mathbf{r})\,\boldsymbol{\gamma}\hat{\psi}(\mathbf{r})\,\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r})d^3r. \tag{4}$$

При выводе (4) мы использовали требование градиентной инвариантности получаемого уравнения. Понятно, что поскольку в полупроводниках всегда $\nu \ll c$, то следует оставить только первое слагаемое

$$\hat{V} = e \int \hat{\psi}^*(\mathbf{r})\,\hat{\psi}(\mathbf{r})\,\hat{\Phi}(\mathbf{r})\,d^3r. \tag{5}$$

Сравнение (5) и (3) показывает, что при вычислении тонкой структуры экситона мы пренебрегаем запаздыванием кулоновского взаимодействия электрона и дырки, а также магнитным взаимодействием между частицами.

Для нахождения спектра связанного состояния двух частиц мы построили эффективный одночастичный гамильтониан, описывающий их динамику и взаимодействие с точностью до α^2 ($\alpha = e^2/\varepsilon\hbar\nu$). Для этого мы рассчитали амплитуду рассеяния электрона на дырке во втором порядке теории возмущений по α и по амплитуде рассеяния восстановили эффективный гамильтониан

$$i\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\,\psi = \hat{H}\psi,$$

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}_1 + \hat{V}_2 + \hat{V}_3 + \hat{V}_4,$$

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{m} - \frac{e^2}{\varepsilon r},$$

$$\hat{V}_1 = -\frac{\hat{p}^4}{4m^3\nu^2} + 4\pi\mu^2\delta(\mathbf{r}),$$

$$\hat{V}_2 = 4\mu^2\,\frac{(\hat{\mathbf{S}},\hat{\mathbf{l}})}{r^3},$$

$$\hat{V}_3 = 0,$$

$$\hat{V}_4 = \frac{4}{3}\,\pi\mu^2\,\hat{\mathbf{S}}^2\delta(\mathbf{r}) + 6\frac{\mu^2}{r^3}\left(\frac{(\hat{\mathbf{S}},\mathbf{r})(\hat{\mathbf{S}},\mathbf{r})}{r^2} - \frac{1}{3}\,\hat{\mathbf{S}}^2\right). \tag{6}$$

Здесь $\hat{H}_0$ — эффективный гамильтониан, описывающий взаимодействие электрона и дырки в приближении эффективных масс без учета взаимодействия зоны проводимости и валентной зоны, $\hat{V}_1$ — поправка орбитального происхождения, $\hat{V}_2$ — спин-орбитальное взаимодействие, $\hat{V}_3$ — спин-спиновое взаимодействие (это слагаемое мало по параметру ν/c для экситона и введено нами для сравнения с позитронием), $\hat{V}_4$ — обменное (аннигиляционное) взаимодействие, ψ — трехкомпонентная волновая функция (это обстоятельство связано с тем, что система электрон–дырка может иметь спин как единица, так и ноль), $\hat{\mathbf{S}}$ — операторы спина, $\hat{\mathbf{l}}$ — операторы орбитального момента, $\mu = e/2\sqrt{\varepsilon}m\nu$ — величина, аналогичная эффективному магнетону Бора в полупроводнике $\mu^* = e\hbar/mc$, появляющемуся в слагаемых, отвечающих взаимодействию с магнитным полем, которым мы пренебрегли. Подобная процедура была проделана для электрона и позитрона (см., например, [8]). Для сравнения выпишем потенциал взаимодействия электрона и позитрона в вакууме с точностью до слагаемых, пропорциональных α_0^2 (постоянная тонкой структуры $\alpha_0 = e^2/\hbar c$),

$$i\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\,\psi = \hat{H}\psi,$$

где

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}_1 + \hat{V}_2 + \hat{V}_3 + \hat{V}_4,$$

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{m_e} - \frac{e^2}{r},$$

$$\hat{V}_1 = -\frac{\hat{p}^4}{4m_e^3c^2} + 4\pi\mu_0^2\delta(\mathbf{r}) - \frac{e^2}{2m_e^2c^2r}\left(\hat{\mathbf{p}}^2 + \frac{(\hat{\mathbf{p}},\mathbf{r})(\hat{\mathbf{p}},\mathbf{r})}{r^2}\right),$$

$$\hat{V}_2 = 6\mu_0^2\,\frac{(\hat{\mathbf{S}},\hat{\mathbf{l}})}{r^3},$$

$$\hat{V}_3 = 6\frac{\mu_0^2}{r^3}\left(\frac{(\hat{\mathbf{S}},\mathbf{r})(\hat{\mathbf{S}},\mathbf{r})}{r^2} - \frac{1}{3}\hat{\mathbf{S}}^2\right) + 4\pi\mu_0^2\left(\frac{4}{3}\hat{\mathbf{S}}^2 - 2\right)\delta(\mathbf{r}),$$

$$\hat{V}_4 = 4\pi\mu_0^2\hat{S}^2\delta(\mathbf{r}),$$

$$\mu_0 = \frac{e}{2m_ec}. \tag{7}$$

Здесь m_e — масса свободного электрона, а $\hat{H}_0$, $\hat{V}_1$, $\hat{V}_2$, $\hat{V}_3$ и $\hat{V}_4$ имеют тот же смысл, что и для экситона.

Потенциал взаимодействия электрона и дырки (6) в сравнении с электрон-позитивным потенциалом (7) содержит, как можно было ожидать, в целом меньше слагаемых, так как в (6) не вошли слагаемые, связанные с запаздыванием взаимодействия и магнитным взаимодействием между частицами. Наличие в гамильтониане (6) поправок $\hat{V}_1 - \hat{V}_4$ приводит к появлению тонкой структуры экситона. Для расчета расщепления энергетических уровней мы усреднили поправки $\hat{V}_1 - \hat{V}_4$ по невозмущенным волновым функциям экситонных состояний с различными значениями энергии n, полного момента j, орбитального момента l, спина s и проекции орбитального момента m. Именно для состояний с таким набором квантовых чисел поправочные члены диагональны (это существенно, так как невозмущенные состояния вырождены). Используя при усреднении результаты, приведенные в [8], легко получить полное выражение для энергии экситона

$$\begin{aligned} E_x^{njls} = &-\frac{1}{4n^2} + \alpha^2\frac{3}{64n^2} - \alpha^2\frac{(1-\delta_{l0})}{8n^3(2l+1)} \\ &+ \alpha^2\frac{\delta_{l0}(1-\delta_{s0})}{12n^3} + \alpha^2\frac{(1-\delta_{l0})(1-\delta_{s0})}{8n^3} \\ &\times \begin{cases} -\frac{1}{l(l+1)(2l+1)}, & j = l \\ -\frac{4l-1}{l(2l-1)(2l+1)}, & j = l-1 \\ \frac{4l+5}{(l+1)(2l+3)(2l+1)}, & j = l+1 \end{cases}. \end{aligned} \tag{8}$$

Энергия здесь отсчитывается от дна зоны проводимости. Результат приведен в единицах, аналогичных атомным. За единицу длины и энергии приняты величины

Таблица 1. Орто-пара-расщепление основного состояния экситона для различных полупроводников

Кристалл	GaSb	GaAs	InSb	InAs	InP	AlSb	ZnTe	ZnSe	ZnS	CdTe	CdSe	CdS
E_g, meV	813	1410	236	425	1416	2320	2301	2670	3912	1606	1842	2583
E_x, meV	1.8	5.1	0.5	1.8	6.5	7.5	13.0	19.0	40.1	10.0	15.7	29.4
ΔE_0, meV	0.011	0.049	0.003	0.020	0.080	0.065	0.20	0.036	1.10	0.17	0.36	0.89

$a_x = \varepsilon\hbar^2\nu^2/\Delta e^2$ и $E_x = \Delta e^4/\varepsilon^2\hbar^2\nu^2$ соответственно. Полезно привести величину орто-пара-расщепления основного состояния как важный частный случай формулы (8)

$$\Delta E_0 = E_x^{1101} - E_x^{1000} = \frac{\alpha^2}{12}. \tag{9}$$

Удобно выразить энергию орто-пара-расщепления через наблюдаемые величины E_x и E_g

$$\Delta E_0 = \frac{8(E_x)^2}{3E_g}. \tag{10}$$

Расщепление для некоторых полупроводников приведено в табл. 1.

2. Экситон в тонком слое узкощелевого полупроводника

Подход, аналогичный использованному нами в предыдущем разделе, был применен и для нахождения тонкой структуры квазидвумерного экситона. Для последовательного нахождения поправок, связанных с непараболичностью дисперсии свободных электронов и дырок (2), а также с их антитождественностью, мы использовали следующую модель.

1) Невзаимодействующие носители тока описываются уравнением Дирака (1).

2) Вдоль одной из пространственных осей (ось z) модуляцией ширины запрещенной зоны создана квантовая яма, в которой локализованы как электроны, так и дырки

$$\Delta = \Delta(z) = \begin{cases} \Delta_1, & |z| < a; \\ \Delta_2, & |z| > a. \end{cases} \tag{11}$$

При этом предполагается, что высота барьеров для электронов и дырок существенно превосходит энергию размерного квантования, а стенки ямы являются бесконечными, т.е. $\Delta_2 \gg \Delta_1$.

3) Ширину ямы $2a$ мы полагали много меньше радиуса объемного экситона $r_x = 2e\hbar^2\nu^2/\Delta_1 e^2$, $\delta = a/r_x \ll 1$, т.е. расстояния между уровнями размерного квантования много больше энергии связи объемного экситона $E_x = \Delta_1 e^4/4\varepsilon^2\hbar^2\nu^2$. Таким образом, можно считать, что на каждом уровне размерного квантования имеется свой экситон.

4) Диэлектрическую проницаемость среды, окружающей слой узкощелевого полупроводника, мы считали равной диэлектрической проницаемости слоя ε, частотной и пространственной дисперсией которой мы пренебрегли. Если не учитывать антитождественности взаимодействующих частиц, то полное двухчастичное уравнение выглядит следующим образом:

$$\hat{E}\Phi(r_-, r_+) = \hat{H}\Phi(r_-, r_+),$$

$$\hat{H} = \nu\hat{\alpha}_-\hat{\mathbf{p}}_- + \nu\hat{\alpha}_+\hat{\mathbf{p}}_+ + \hat{\beta}_-\Delta(z_-) + \hat{\beta}_+\Delta(z_+) - e^2/\varepsilon r. \tag{12}$$

Здесь $\hat{\mathbf{p}}_\pm = -i\hbar\partial/\partial\mathbf{r}_\pm$, индекс плюс относится к дырке, минус — к электрону, $r = |\mathbf{r}_- - \mathbf{r}_+|$. Поправки, связанные с антитождественностью электрона и дырки ("аннигиляционные" поправки), будут рассмотрены далее. Мы рассмотрели экситон на нижнем уровне размерного квантования. Свободной частице на нижнем уровне соответствует волновая функция в "стандартной" калибровке уравнения Дирака (конечный ответ не зависит от калибровки, о калибровках см., например, [8])

$$Z_0(z) = C\begin{pmatrix} \omega\cos(k_0 z) \\ \hat{\sigma}_z\omega\,\dfrac{i\hbar\nu k_0\sin(k_0 z)}{E_0 + \Delta_1} \end{pmatrix}, \quad |z| < a. \tag{13}$$

Здесь $\omega = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, где a и b — произвольные комплексные числа. Энергия E_0 и волновое число k_0 определяются из дисперсионного уравнения

$$\begin{cases} \mathrm{tg}(2k_0 a) = -\frac{\hbar k_0 \nu}{\Delta_1} \\ E_0^2 = \Delta_1^2 + \nu^2 k_0^2. \end{cases} \tag{14}$$

Чтобы получить двумерное уравнение, описывающее взаимодействие электрона и дырки, необходимо усреднить (12) по z_+ и z_-. В низшем порядке по δ и α, как и следовало ожидать, мы получили уравнение Шредингера для двух частиц с массами $m^* = E_0/\nu$ и кулоновским взаимодействием между ними

$$\left(\frac{\hat{\mathbf{q}}_-^2\nu^2}{2E_0} + \frac{\hat{\mathbf{q}}_+^2\nu^2}{2E_0}\right)\phi(\boldsymbol{\eta}_-, \boldsymbol{\eta}_+) - \frac{e^2}{\varepsilon\eta}\phi(\boldsymbol{\eta}_-, \boldsymbol{\eta}_+) = (E - 2E_0)\phi(\boldsymbol{\eta}_-, \boldsymbol{\eta}_+). \tag{15}$$

Здесь $E = 2E_0$ — энергия экситона, отсчитанная от нижнего уровня размерного квантования, $\boldsymbol{\eta}_\pm$ двумерные векторы, координаты частиц в плоскости XY, $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_- - \boldsymbol{\eta}_+$, $\eta = |\boldsymbol{\eta}|$, $\hat{\mathbf{q}}_\pm = -i\hbar\partial/\partial\boldsymbol{\eta}_\pm$ — двумерный импульс.

Таблица 2. Энергия связи экситона и ее расщепление для слоев некоторых полупроводников различной толщины

Кристалл	InSb		GaSb		GaAs		InAs		InP		AlSb		ZnTe	
a, Å	20	100	20	100	20	100	20	100	20	100	20	100	20	100
$E_x^{(2)}$, meV	3.8	1.8	9.0	6.3	17	13.6	5.8	3.5	14.0	11.8	28.4	28.4	50.0	45.8
$\tilde{A}_1$	0.015	0.070	0.019	0.010	0.02	0.10	0.009	0.04	0.20	0.11	0.024	0.15	0.03	0.22
$\tilde{A}_2$	0.028	0.070	0.06	0.29	0.01	0.54	0.018	0.11	0.01	0.53	0.01	0.83	0.01	0.80

Решение этого уравнения хорошо известно (см., например, [9]). Приведем лишь формулу для энергии связи двумерного экситона

$$E_x^{(2)} = \frac{m^* e^4}{4\varepsilon^2\hbar^2\left(n - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{E_0\alpha^2}{4\left(n - \frac{1}{2}\right)^2}. \quad (16)$$

Эта энергия получена в низшем приближении по δ и α. Чтобы получить линейные по δ и α поправки, мы, как и в случае с трехмерным экситоном, рассмотрели амплитуду рассеяния электрона на дырке. После ее усреднения по z_+ и z_- выделили слагаемые, линейные по (δ, α). Затем по этим поправкам восстановили поправки к рассеивающему потенциалу уравнения (15), линейные по (δ, α). Поправки "аннигиляционного" происхождения оказались, вообще говоря, комплексными, причем мнимая часть расходится при $(2k_0 - E_0\sqrt{\varepsilon}/\hbar c) \to 0$. Дело в том, что при $2k_0 \approx E_0\sqrt{\varepsilon}/\hbar c$ велико сечение однофотонной аннигиляции

$$\sigma_{1\gamma}^{ann} \propto \left(4k_0 - \frac{E_0^2\varepsilon}{\hbar^2 c^2}\right)^{-2} \quad (17)$$

и говорить об экситоне как о связанном состоянии неправомерно. Поэтому для рассмотрения экситона мы считали ширину ямы a такой, что

$$4k_0^2 \gg \Delta_1^2\varepsilon/\hbar^2 c^2. \quad (18)$$

Обратное соотношение в реальных полупроводниках трудно выполнимо одновременно с ограничением, принятым в данном разделе. С учетом этих оговорок поправка к кулоновскому потенциалу имеет вид

$$\hat{U} = \hat{U}^{(ann)} + \hat{U}_1. \quad (19)$$

Для того чтобы оценить порядок слагаемых в (19), удобно ввести безразмерные величины, принимая за единицы длины и энергии $\tilde{a} = 2\nu\hbar/E_0\alpha$ и $\tilde{E} = E_0\alpha^2/2$. Тогда

$$\tilde{U}^{(ann)}(\eta) = \pi\tilde{A}_1(\zeta)\big(\hat{\mathbf{S}}^2 - 2\hat{S}_z^2\big)\delta(\eta),$$

$$\tilde{A}_1(\zeta) = \alpha\frac{(1+\zeta^2\phi^2)^{1/2}\left(\frac{3}{4}\zeta + \frac{3}{8}\zeta^2 + \frac{1}{4}\zeta\phi^2\right)}{\left(1 + \frac{1}{2}\zeta + 2\zeta^2\phi^2\right)^2},$$

$$\tilde{U}_1(\eta) = \pi\tilde{A}_2(\zeta)\,\delta(\eta),$$

$$\tilde{A}_2(\zeta) = \delta(1+\zeta^2\phi^2)^{1/2}\left(1 + \frac{1}{2}\zeta + 2\zeta^2\phi^2\right)^{-2}$$
$$\times\left[\frac{4}{3} - \frac{5}{4}\phi^2 + \zeta\left(2 - \frac{1}{2}\phi^2\right) + \zeta^2\left(\frac{8}{3}\phi^2 - \frac{3}{4}\right)\right.$$
$$\left. + \zeta^3\left(2\phi^2 + \frac{1}{2}\right) + \frac{4}{3}\zeta^4\phi^4\right]. \quad (20)$$

Здесь $\zeta = \nu\hbar/a\Delta_1 = \alpha/2\delta$ — безразмерный параметр, характеризующий увеличение запрещенной зоны при данной толщине слоя; $\phi = k_0 a \propto 1$ и определяется из уравнения $\operatorname{tg} 2\phi = -2\phi\zeta$ (см. (14)). Интересно, что $\tilde{A}_1(\zeta)$ — первого порядка малости по α, тогда как в трехмерном случае все поправки к энергии не ниже α^2. $\tilde{A}_2(\zeta)$ — функция первого порядка по $\max(\alpha, \delta)$. Действительно, при $\zeta \gg 1$ $\tilde{A}_2 \propto \alpha$, а при $\zeta \ll 1$ $\tilde{A}_2 \propto \delta$. Полная энергия связи в тех же единицах

$$E_x^n = \frac{1}{2(n-1/2)^2} - \frac{\delta_{m0}}{2(n-1/2)^3}\Big(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_1\delta_{s1}\delta_{s_z0}\Big). \quad (21)$$

Здесь s, s_z и m — квантовые числа: полный спин экситона, его проекция на ось z и проекция орбитального момента на ось z. Значение энергии связи экситона и ее расщепление для некоторых полупроводников приведены в табл. 2 [9].

Авторы благодарны С.Г. Тиходееву за обсуждение результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 96-02-16701 и № 97-02-16346), Миннауки (проект № 97-1087) и INTAS (№ 96-0398).

Список литературы

[1] Н. Нокс. Теория экситонов. Мир, М. (1996).
[2] В.М. Агронович. Теория экситонов. Наука, М. (1968).
[3] Е.А. Андрюшин, А.П. Силин. ФТТ **35**, 1947 (1993).
[4] А.П. Силин. УФН **147**, 485 (1993).
[5] М.В. Валейко, И.И. Заславский, А.В. Матвиенко, Б.Н. Мацонашвили. Письма в ЖЭТФ **43**, 140 (1986).
[6] Б.А. Волков, Б.Г. Идлис, М.Ш. Усманов. УФН **165**, 799 (1995).
[7] Е.А. Андрюшин, А.П. Силин, С.В. Шубенков. Краткие сообщения по физике ФИАН **7–8**, 22 (1995).
[8] А.И. Ахиезер, В.Б. Берестецкий. Квантовая электродинамика. Наука, М. (1989), §83.
[9] А.П. Силин, С.В. Шубенков. Краткие сообщения по физике ФИАН **7–8**, 9 (1996).