Влияние аномальной дисперсии на оптические характеристики квантовой ямы

© Л.И. Коровин, И.Г. Ланг, С.Т. Павлов[*,**]

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук,
194021 Санкт-Петербург, Россия
[*] Facultad de Fisica de la UAZ,
Apartado Postal C-580, 8060 Zacatecas, Mexico
[**] Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук,
119991 Москва, Россия
E-mail: korovin@mail.ioffe.ru

(Поступила в Редакцию 27 марта 2006 г.)

Исследуется частотная зависимость оптических характеристик квантовой ямы (отражения, пропускания и поглощения) в окрестности межзонных резонансных переходов в случае двух близко расположенных возбужденных уровней. Рассматриваются широкая квантовая яма в сильном магнитном поле, направленном нормально к поверхности ямы, и монохроматическая падающая волна. Учтены различие между показателями преломления барьеров и квантовой ямы и пространственная дисперсия световой волны. Показано, что при больших радиационных временах жизни возбужденных состояний (по сравнению с нерадиационными временами) частотная зависимость коэффициента отражения света в области резонансных межзонных переходов в основном определяется кривой, аналогичной кривой аномальной дисперсии показателя преломления. По мере выравнивания времен жизни вклад этой кривой ослабевает, а при обратном соотношении времен жизни он практически незаметен. Показано также, что в коэффициентах пропускания и поглощения света частотной зависимости, похожей на аномальную дисперсию, не возникает.

PACS: 78.20.Bh, 78.20.Ls, 78.67.De

Оптические методы на протяжении последних десятилетий широко используются при исследовании электронных свойств систем пониженной размерности [1–4]. Это связано главным образом с тем, что после взаимодействия с такой системой электромагнитная волна содержит информацию о протекающих электронных процессах, в частности об электронном спектре, времени жизни возбужденных состояний и механизмах рассеяния, эти времена определяющих. Интересные результаты получаются в том случае, когда уровни энергии электронной системы дискретны, что имеет место в квантовых точках и квантовых ямах. Дискретность уровней в квантовой яме обеспечивается экситонными состояниями (если свет падает нормально к плоскости ямы) либо квантующим магнитным полем, также направленным перпендикулярно плоскости ямы. В квантовых ямах с высоким качеством границ радиационное уширение линии поглощения при низких температурах и слабом легировании может быть сравнимо с вкладом нерадиационных механизмов релаксации или превышать их. В этом случае нельзя ограничиться линейным по взаимодействию электрона с электромагнитным полем приближением, а необходимо учитывать все порядки этого взаимодействия [5–24].

Отражение, поглощение и пропускание электромагнитной волны, которая взаимодействует с дискретными уровнями электронной системы в квантовой яме в области частот, соответствующих межзонным переходам, рассматривались также в [13–19]. В этих работах в качестве возбуждающей волны предполагалось как монохроматическое [19], так и импульсное облучение [13–15]. Учитывались один [16], два [17,19] и большое число возбужденных уровней [18]. Результаты этих работ справедливы для узких квантовых ям, когда выполняется неравенство

$$\kappa d \ll 1, \tag{1}$$

где d — ширина квантовой ямы, κ — модуль волнового вектора $\mathbf{k}$ световой волны. Фактически, упомянутые работы справедливы в нулевом по параметру κd приближении.

С другой стороны, для широких квантовых ям параметр κd может быть ≈ 1. Например, для излучения гетеролазера на основе арсенида галлия (длина волны $0.8\,\mu$m) и квантовой ямы шириной $d \cong 500\,\text{Å}$ параметр $\kappa d \cong 1.5$. В этом случае необходимо учитывать пространственную дисперсию электромагнитной волны, так как ее амплитуда сильно меняется на ширине ямы. Кроме того, для широких квантовых ям неравенство $d \gg a_0$ (a_0 — постоянная решетки) является очень сильным, что позволяет при определении электромагнитного поля использовать уравнение Максвелла для сплошной среды. Такой подход позволяет учесть и различие в показателях преломления барьеров и ямы.

В [20,21] развита теория, учитывающая пространственную дисперсию электромагнитной волны при ее прохождении сквозь квантовую яму. Рассматривался один возбужденный уровень (т.е. один межзонный переход) и наряду с пространственной дисперсией вводились показатели преломления барьеров и квантовой ямы как для монохроматического [20], так и для импульсного [21] возбуждения. Работа [22] посвящена учету пространственной дисперсии электромагнитной волны в случае двух близко расположенных межзонных резонансных переходов, что соответствует магнетополяронному состоянию в квантовой яме [23].

При вычислении оптических характеристик квантовой ямы (имеются в виду коэффициенты отражения, пропускания и поглощения света) в условиях резонанса вклад резонансных переходов выделяется из диэлектрической проницаемости и рассматривается отдельно. Эти резонансные переходы приводят к появлению высокочастотного тока, в котором наряду с вкладом, частотная зависимость которого соответствует поглощению, содержится вклад, частотная зависимость которого похожа на кривую аномальной дисперсии показателя преломления. В настоящей работе на примере двух близко расположенных резонансных переходов исследуется роль этих двух вкладов в формировании частотных зависимостей отражения, пропускания и поглощения света квантовой ямой. Она является обобщением двух предыдущих работ авторов: в отличие от [20] далее учитываются два возбужденных уровня, а результаты [22] обобщаются на случай, когда показатели преломления барьеров и квантовой ямы различны.

1. Основные соотношения

Рассматривается система, состоящая из полупроводниковой квантовой ямы, расположенной в интервале $0 \le z \le d$, и двух полубесконечных барьеров. Постоянное сильное магнитное поле направлено перпендикулярно плоскости ямы (вдоль оси z). Внешняя плоская электромагнитная волна распространяется вдоль оси z со стороны отрицательных z. Считается, что барьеры прозрачны для волны, а в квантовой яме волна поглощается, вызывая резонансные межзонные переходы. Предполагаются нулевые температуры, когда валентная зона полностью заполнена, а зона проводимости пустая. В линейном по амплитуде волны приближении возбужденными состояниями являются экситоны. Рассматриваются частоты света, близкие к ширине запрещенной зоны квантовой ямы, когда в поглощении принимает участие малая доля электронов валентной зоны, расположенных вблизи экстремума зоны, для которых справедлив метод эффективной массы. Для глубоких квантовых ям в этом случае можно пренебречь туннелированием электронов в барьеры. Кроме того, уровни, близкие к дну квантовой ямы, можно рассматривать в приближении бесконечно высоких барьеров, хотя это ограничение не является принципиальным и теорию можно распространить на квантовые ямы конечной глубины.

Поскольку размер неоднородности, каковой в данном случае является квантовая яма, сравним с длиной волны света, оптические характеристики такой системы полагается определять из соответствующего уравнения Максвелла, в котором в качестве плотности тока должно фигурировать выражение, полученное на основе микроскопического рассмотрения.

В теории существенны межзонные матричные элементы $\mathbf{p}_{cv}$ квазиимпульса, соответствующие прямому межзонному переходу, т.е. рождению электронно-дырочной пары с совпадающими координатами электрона и дырки. Как и в предыдущих работах [18,19,24], используется модель, в которой вектор $\mathbf{p}_{cv}$ для двух типов возбуждений I и II имеет вид

$$\mathbf{p}_{cv\mathrm{I}} = \frac{p_{cv}}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y), \qquad \mathbf{p}_{cv\mathrm{II}} = \frac{p_{cv}}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y), \tag{2}$$

где $\mathbf{e}_{x(y)}$ — орты вдоль оси $x(y)$, p_{cv} — вещественная константа. Эта модель соответствует тяжелым дыркам в полупроводниках со структурой цинковой обманки, если ось z направлена вдоль оси симметрии четвертого порядка [25,26]. Если ввести векторы круговой поляризации возбуждающего света

$$\mathbf{e}_l = (\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y)/\sqrt{2}, \tag{3}$$

то выполняется свойство сохранения вектора поляризации. При этом ни волновые функции электронно-дырочной пары, ни уровни энергии не зависят от индексов I и II.

Как известно, для того чтобы электронно-дырочная пара в магнитном поле была свободной, должны выполняться два условия. Во-первых, сила Лоренца должна быть велика по сравнению с кулоновской и обменной силами взаимодействия электрона и дырки в паре. Тогда волновая функция пары может быть представлена в виде произведения двух функций: $\Phi(z)$ и функции, зависящей от $\mathbf{r}_\perp$ в плоскости xy квантовой ямы. Оценки показывают [27,28], что в арсениде галлия для магнитного поля, соответствующего образованию магнетополярона, это условие выполняется. Во-вторых, необходимо, чтобы энергия размерного квантования превышала энергию кулоновского и обменного взаимодействия в электронно-дырочной паре. Тогда пару можно считать свободной, и в приближении бесконечно высоких барьеров, которое используется далее, волновая функция, описывающая зависимость от координаты z, принимает простой вид

$$\Phi_\lambda(z) = (2/d)\sin(\pi m_c z/d)\sin(\pi m_v z/d), \quad 0 \le z \le d, \tag{4}$$

и $\Phi_\lambda(z) = 0$ в барьерах. Индекс $\lambda = (m_c, m_v)$ зависит от квантовых чисел размерного квантования электрона (m_c) и дырки (m_v).

Заметим, что в арсениде галлия для параметра $\kappa d \ge 1$ второе условие существования свободной электронно-дырочной пары не выполняется, и вид функции $\Phi(z)$ там будет другим. Однако приближение (4), существенно упрощая расчет, не влияет качественно, как это показано в разделе 4, на частотную зависимость оптических характеристик квантовой ямы.

В настоящей работе рассматривается монохроматический свет частоты ω_l в случае нормального падения возбуждающей волны на плоскость квантовой ямы. В соответствии с этими предположениями электрическое поле возбуждающей волны имеет вид

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}_l E_0 e^{-i(\omega_l t - \kappa_1 z)} + \text{c.c.}, \quad \kappa_1 = \nu_1 \omega_l / c, \tag{5}$$

где E_0 — комплексная амплитуда, ν_1 — вещественный показатель преломления в барьерах. Предполагается также, что в квантовой яме имеются два близко расположенных возбужденных уровня, а остальные возбужденные уровни в яме отстоят достаточно далеко. Такое возможно, например, если образуется магнетополяронное состояние [19,23].

В случае прямого межзонного перехода средняя наведенная плотность заряда в квантовой яме $\rho(z,t) = 0$, что позволяет ввести калибровку $\varphi(z,t) = 0$, где $\varphi(z,t)$ — скалярный потенциал. Тогда амплитуда электрического поля в барьерах определяется уравнением

$$\frac{d^2E}{dz^2} + \kappa_1^2 E = 0, \quad \kappa_1 = \frac{\nu_1 \omega_l}{c}, \quad z \le 0, \quad z \ge d, \tag{6}$$

а в квантовой яме $(0 \le z \le d)$ — уравнением

$$\frac{d^2E}{dz^2} + \kappa^2 E = -\frac{4\pi i \omega_l}{c^2} \bar{J}(z), \qquad \kappa = \frac{\nu \omega_l}{c}, \tag{7}$$

c — скорость света в вакууме, ν_1, ν — вещественные показатели преломления в барьерах и квантовой яме, $\bar{J}(z)$ — усредненная по основному состоянию системы Фурье-компонента плотности тока, которая наводится в квантовой яме монохроматической плоской волной. В случае двух возбужденных уровней $\bar{J}(z)$ для квантовой ямы с бесконечно высокими барьерами имеет вид (более общая формула приведена, например, в [20,24])

$$\bar{J}(z) = \frac{i\nu c}{4\pi} \sum_{j=1}^{2} \frac{\gamma_{rj} \Phi_j(z)}{\tilde{\omega}_j} \int_0^d dz' \Phi_j(z') E(z'), \quad 0 \le z \le d, \tag{8}$$

и $\bar{J}(z) = 0$ в барьерах. Здесь γ_{rj} — обратное радиационное время жизни возбужденных состояний дублета в случае узких ям.

Если дублет образован магнетополяроном A, которому соответствует квантовое число Ландау дырки $n = 1$ (классификация магнетополяронов приведена в [23]), то

$$\gamma_{rj} = \gamma_r Q_{0j}, \tag{9}$$

где

$$\gamma_r = \frac{2e^2}{\hbar c \nu} \frac{p_{cv}^2}{\hbar \omega_g} \frac{|e|H}{m_0 c} \tag{10}$$

($\hbar\omega_g$ — ширина запрещенной зоны, m_0 — масса свободного электрона, H — магнитное поле, e — заряд электрона), а множитель

$$Q_{0j} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \lambda \Big/ \sqrt{\lambda^2 + (\Delta E_{\text{pol}})^2}\right), \quad \lambda = \hbar(\Omega_c - \omega_{LO}) \tag{11}$$

учитывает изменение радиационного времени жизни при отклонении магнитного поля от резонансного значения, определяемого равенством $\Omega_c = \omega_{LO}$; ΔE_{pol} — поляронное расщепление [24], Ω_c и ω_{LO} — циклотронная частота и частота продольного оптического фонона соответственно. В точке резонанса $\lambda = 0$, $Q_{0j} = 1/2$ и $\gamma_{r1} = \gamma_{r2}$.

Резонансные знаменатели в (8) равны

$$\tilde{\omega}_j = \omega_l - \omega_j + i\gamma_j/2, \tag{12}$$

где ω_j — частоты резонансных переходов уровней дублета, γ_j — обратные нерадиационные времена жизни этих уровней. В (8) учтены только резонансные знаменатели. Индексы $j = 1$ и $j = 2$ функции $\Phi_j(z)$ соответствуют парам квантовых чисел размерного квантования, между которыми происходит переход. Индексу $j = 1$ соответствуют $m_c^{(1)}, m_v^{(1)}$, индексу $j = 2$ — $m_c^{(2)}, m_v^{(2)}$. Квантовое число Ландау n сохраняется при прямом межзонном переходе. В правую часть уравнения (8) входит полное поле E, что связано с отказом от теории возмущений по константе связи $e^2/\hbar c$.

2. Электрическое поле электромагнитной волны

Дальнейший расчет проводится в предположении равенства квантовых чисел

$$m_c^{(1)} = m_c^{(2)} = m_c, \quad m_v^{(1)} = m_v^{(2)} = m_v, \tag{13}$$

что, в частности, соответствует магнетополярону A. В этом случае имеет место равенство

$$\Phi_1(z) = \Phi_2(z) = \Phi_{m_c m_v}(z) \equiv \Phi(z), \tag{14}$$

а формула (8) принимает вид

$$\bar{J}(z) = \frac{i\nu c}{4\pi}\left(\frac{\gamma_{r1}}{\tilde{\omega}_1} + \frac{\gamma_{r2}}{\tilde{\omega}_2}\right) \Phi(z) \int_0^d dz' \Phi(z') E(z'). \tag{15}$$

Решение уравнения (6), определяющее амплитуду поля $E(z)$ в барьерах, есть

$$E^l(z) = E_0 e^{i\kappa_1 z} + C_R e^{-i\kappa_1 z}, \qquad z \le 0, \tag{16}$$

$$E^r(z) = C_T e^{i\kappa_1 z}, \qquad z \ge d, \tag{17}$$

C_R определяет амплитуду отраженной, C_T — амплитуду прошедшей яму волны. Уравнение (7) для амплитуды поля в квантовой яме, которое является интегродифференциальным, удобно представить в виде интегрального уравнения Фредгольма второго рода [20]

$$E(z) = C_1 e^{i\kappa z} + C_2 e^{-i\kappa z} - \frac{i}{2}\left(\frac{\gamma_{r1}}{\tilde{\omega}_1} + \frac{\gamma_{r2}}{\tilde{\omega}_2}\right) F(z) \int_0^d dz' \Phi(z') E(z'), \tag{18}$$

где

$$F(z)=F_{m_c m_v}$$
$$=e^{i\kappa z}\int_0^z dz' e^{-i\kappa z'}\Phi(z')+e^{-i\kappa z}\int_z^d dz' e^{i\kappa z'}\Phi(z'). \quad (19)$$

Для произвольных m_c и m_v $F(z)$ равно

$$F(z)=i\mathscr{B}\Big\{d\tilde{\Phi}(z)-e^{i\kappa z}-(-1)^{m_c+m_v}e^{i\kappa(d-z)}$$
$$+\frac{d}{2}\Big[\frac{m_c^2+m_v^2}{m_c m_v}-\frac{(\kappa d)^2}{\pi^2 m_c m_v}\Big]\Phi(z)\Big\}, \quad (20)$$

$\Phi(z)$ определено в (4),

$$\tilde{\Phi}(z)=(2/d)\cos(\pi m_c z/d)\cos(\pi m_v z/d),$$

$$\mathscr{B}=\frac{4\pi^2 m_c m_v \kappa d}{\big[\pi^2(m_c+m_v)^2-(\kappa d)^2\big]\big[(\kappa d)^2-\pi^2(m_c-m_v)^2\big]}. \quad (21)$$

Из (19) и (20) следует, что

$$F(0)=i\mathscr{B}\big[1-(-1)^{m_c+m_v}e^{i\kappa d}\big],$$
$$F(d)=(-1)^{m_c+m_v}F(0). \quad (22)$$

Умножая уравнение (18) на $\Phi(z)$ и интегрируя по z от 0 до d, получим

$$\int_0^d dz\,\Phi(z)E(z)=\frac{h\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2}{\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2+(i\varepsilon/2)\big[\gamma_{r1}\tilde{\omega}_2+\gamma_{r2}\tilde{\omega}_1\big]}, \quad (23)$$

где введены обозначения

$$\varepsilon=\varepsilon'+i\varepsilon''=\int_0^d dz\,\Phi(z)F(z), \quad (24)$$

$$h=\int_0^d dz\Phi(z)\big(C_1e^{i\kappa z}+C_2e^{-i\kappa z}\big)$$
$$=F(0)\big[C_1+(-1)^{m_c+m_v}e^{-i\kappa d}C_2\big]. \quad (25)$$

В результате комплексная амплитуда электрического поля в квантовой яме принимает вид

$$E(z)=C_1e^{i\kappa z}$$
$$+C_2e^{-i\kappa z}\frac{(1/2)hF(z)(\gamma_{r1}\tilde{\omega}_2+\gamma_{r2}\tilde{\omega}_1)}{\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2+i(\varepsilon/2)(\gamma_{r1}\tilde{\omega}_2+\gamma_{r2}\tilde{\omega}_1)}. \quad (26)$$

Параметр ε, как и в случае одного возбужденного уровня, определяет перенормировку радиационного уширения ε' и сдвиг ε'' каждого из двух возбужденных уровней. Из (24) и (20) следует, что

$$\operatorname{Re}\varepsilon=\varepsilon'=2\mathscr{B}^2\big[1-(-1)^{m_c+m_v}\cos\kappa d\big],$$

$$\operatorname{Im}\varepsilon=\varepsilon''=2\mathscr{B}\Big\{\frac{(1+\delta_{m_c m_v}(m_c+m_v)^2+(m_c-m_v)^2}{8m_c m_v}$$
$$-(-1)^{m_c+m_v}\mathscr{B}\sin\kappa d-\frac{(2+\delta_{m_c m_v})(\kappa d)^2}{8m_c m_v}\Big\}, \quad (27)$$

при $\kappa d\to 0$ $\varepsilon'\to 1$, $\varepsilon''\to 0$ $(m_c=m_v)$ и $\varepsilon'\to 0$, $\varepsilon''\to 0$ $(m_c\neq m_v)$. Таким образом, реальное радиационное уширение уровней дублета определяется величинами

$$\varepsilon'\gamma_{ri}=\tilde{\gamma}_{ri}, \qquad i=1,2. \quad (28)$$

Тот факт, что ε' и ε'' одинаковы для обоих уровней дублета, связан с предположением о равенстве квантовых чисел размерного квантования $m^{(1)}_{c(v)}=m^{(2)}_{c(v)}$.

Произвольные константы C_1 и C_2 входят, согласно (25), в функцию h. Константы C_1, C_2, C_R и C_T определялись из условий непрерывности магнитного поля и тангенциальной проекции электрического поля на границах $z=0$ и $z=d$. Нормальные проекции электрического поля равны нулю. Произвольные константы равны

$$C_1=\frac{2E_0}{\Delta}e^{-i\kappa d}\big[1+\xi+(1-\xi)N\big],$$
$$C_2=-\frac{2E_0}{\Delta}(1-\xi)\big[e^{i\kappa z}+(-1)^{m_c+m_v}N\big], \quad (29)$$
$$C_R=E_0\rho/\Delta,$$
$$C_T=4E_0\xi e^{-i\kappa_1 d}\,\big[1+(-1)^{m_c+m_v}e^{-i\kappa d}N\big]/\Delta, \quad (30)$$
$$\Delta=(\xi+1)^2e^{-i\kappa d}-(\xi-1)^2e^{i\kappa d}$$
$$-2(\xi-1)\big[(\xi+1)e^{-i\kappa d}+(-1)^{m_c+m_v}(\xi-1)\big]N. \quad (31)$$
$$\rho=2i(\xi^2-1)\sin\kappa d$$
$$+2\big[(\xi^2-1)e^{-i\kappa d}+(-1)^{m_c+m_v}(\xi^2-1)\big]N. \quad (32)$$

В формулах (29)–(32) введено обозначение

$$\xi=\kappa/\kappa_1=\nu/\nu_1, \quad (33)$$

а функция N имеет вид

$$N=-i(-1)^{m_c+m_v}\exp(i\kappa d)$$
$$\times\frac{(\tilde{\gamma}_{r1}\tilde{\omega}_2+\tilde{\gamma}_{r2}\tilde{\omega}_1)/2}{\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2+i(\varepsilon/2)(\gamma_{r1}\tilde{\omega}_2+\gamma_{r2}\tilde{\omega}_1)}. \quad (34)$$

При выводе этой формулы использовалось равенство

$$F(0)^2=(-1)^{m_c+m_v}\exp(i\kappa d)\varepsilon'. \quad (35)$$

Неопределенные коэффициенты (29), (30) по форме совпадают с полученными в [20] для одного возбужденного уровня. Различие заключается в функции N, которая в случае γ_{r1} (или γ_{r2}) $\to 0$ переходит в $\mathscr{N}$ (см. формулу (41) в [20]).

Кривая $N(\omega_l)$ есть функция с двумя экстремумами, каждый из которых соответствует межзонному резонансному переходу. Ее можно представить в более наглядном виде, а именно

$$N = -\,i(-1)^{m_c+m_v}\exp(i\kappa d) \times \left[\frac{\tilde{\gamma}_{r1}/2}{\Omega_1 + i\Gamma_1/2} + \frac{\tilde{\gamma}_{r2}/2}{\Omega_2 + i\Gamma_2/2}\right]. \quad (36)$$

Здесь перенормированные резонансные частоты Ω_1 и Ω_2 и общее уширение каждого уровня Γ_1 и Γ_2 равны

$$\Omega_j = \omega_l - \omega_j - \varepsilon''\gamma_{rj}/2 - \beta_j'',$$
$$\Gamma_j = \gamma_j + \tilde{\gamma}_{rj} + 2\beta_j'. \quad (37)$$

Величины $\beta'_{1(2)}$ и $\beta''_{1(2)}$ составляют комплексные параметры

$$\beta_1 = \beta_1' + i\beta_1'' = \frac{\varepsilon\gamma_{r2}}{2}\,\frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_2},$$
$$\beta_2 = \beta_2' + i\beta_2'' = \frac{\varepsilon\gamma_{r1}}{2}\,\frac{\tilde{\omega}_2}{\tilde{\omega}_1}. \quad (38)$$

Они определяют влияние уровней друг на друга. В функции (36) два пика представлены в явной форме, но они не являются лоренцовыми, поскольку параметры β_1 и β_2, вносящие вклад как в уширение, так и в сдвиг пиков, зависят от частоты. Естественно, что представление функции N в виде суммы лоренцовых (как это сделано в [19,22]) и нелоренцовых кривых приводит к одинаковым результатам. Приведем также явный вид параметров β_j' и β_j'':

$$\beta_1' = \frac{(\tilde{\gamma}_{r2}/2)\sigma_1 - \varepsilon''(\gamma_{r2}/2)\sigma_2}{(\omega_l - \omega_2)^2 + \gamma_2^2/4},$$
$$\beta_2' = \frac{(\tilde{\gamma}_{r1}/2)\sigma_1 + \varepsilon''(\gamma_{r1}/2)\sigma_2}{(\omega_l - \omega_1)^2 + \gamma_1^2/4},$$
$$\beta_1'' = \frac{(\tilde{\gamma}_{r2}/2)\sigma_2 + \varepsilon''(\gamma_{r2}/2)\sigma_1}{(\omega_l - \omega_2)^2 + \gamma_2^2/4},$$
$$\beta_2'' = \frac{-(\tilde{\gamma}_{r1}/2)\sigma_2 + \varepsilon''(\gamma_{r1}/2)\sigma_1}{(\omega_l - \omega_1)^2 + \gamma_1^2/4},$$
$$\sigma_1 = (\omega_l - \omega_1)(\omega_l - \omega_2) + \gamma_1\gamma_2/4,$$
$$\sigma_2 = (\gamma_1/2)(\omega_l - \omega_2) - (\gamma_2/2)(\omega_l - \omega_1).$$

Вектор электрического поля в квантовой яме в случае плоской монохроматической возбуждающей волны во временно́м представлении имеет вид

$$\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{e}_l e^{-i\omega_l t}E(z) + \text{c.c.}, \quad (39)$$

где

$$E(z) = \Big[e^{i\kappa z} + \big(F(z)/F(0)\big)N\Big]C_1 + \Big[e^{-i\kappa z} + (-1)^{m_c+m_v}e^{-i\kappa d}\big(F(z)/F(0)\big)N\Big]C_2 \quad (40)$$

представляет собой сумму плоских волн $\exp \pm i\kappa z$, которые связаны с отражением от границ ямы. Кроме того, как это следует из вида функции $F(z)$, поле в квантовой яме содержит осциллирующие члены, отражающие координатную зависимость волновых функций электрона и дырки. Векторы поля слева $(\mathbf{E}^l(z,t))$ и справа $(\mathbf{E}^r(z,t))$ от квантовой ямы во временно́м представлении соответственно равны

$$\mathbf{E}^l(z,t) = \mathbf{e}_l e^{-i\omega_l t}\big[E_0 e^{i\kappa_1 z} + C_R e^{-i\kappa_1 z}\big] + \text{c.c.},$$
$$\mathbf{E}^r(z,t) = \mathbf{e}_l C_T e^{-i(\omega_l t - \kappa_1 z)} + \text{c.c.} \quad (41)$$

В предельном случае однородной среды ($\nu = \nu_1$, $\xi = 1$) электрическое поле после подстановки (29) и (30) принимает вид ($\kappa d \neq 0$)

$$\mathbf{E}^l(z,t) = \mathbf{e}_l E_0 e^{-i\omega_l t}\Bigg[e^{i\kappa z} - (-1)^{m_c+m_v}\left(\frac{\tilde{\gamma}_{r1}/2}{\Omega_1 + i\Gamma_1/2} + \frac{\tilde{\gamma}_{r2}/2}{\Omega_2 + i\Gamma_2/2}\right)e^{i\kappa(d-z)}\Bigg] + \text{c.c.}, \quad (42)$$

$$\mathbf{E}^r(z,t) = \mathbf{e}_l E_0 e^{-i\omega_l t} \times \left[1 - i\left(\frac{\tilde{\gamma}_{r1}/2}{\Omega_1 + i\Gamma_1/2} + \frac{\tilde{\gamma}_{r2}/2}{\Omega_2 + i\Gamma_2/2}\right)\right]e^{i\kappa z}, \quad (43)$$

$$\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{e}_l E_0 e^{-i\omega_l t}\Bigg[e^{i\kappa z} - i(-1)^{m_c+m_v}e^{i\kappa d} \times \left(\frac{\tilde{\gamma}_{r1}/2}{\Omega_1 + i\Gamma_1/2} + \frac{\tilde{\gamma}_{r2}/2}{\Omega_2 + i\Gamma_2/2}\right)\frac{F(z)}{F(0)}\Bigg] + \text{c.c.} \quad (44)$$

Если, наоборот, пренебречь пространственной дисперсией световой волны ($\kappa d = 0$), но среду считать неоднородной ($\xi \neq 1$), то для разрешенных переходов $m_c = m_v$,

$$\mathbf{E}^l(z,t) = \mathbf{e}_l E_0 e^{-i\omega_l t}\left[e^{i\kappa_1 z} + \frac{\xi N}{1 - (\xi - 1)N}\right] + \text{c.c.},$$
$$\mathbf{E}^r(z,t) = \mathbf{e}_l E_0 e^{-i\omega_l t}\left[\frac{1 + N}{1 - (\xi - 1)N}\right]e^{i\kappa_1 z} + \text{c.c.},$$
$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{e}_l E_0 e^{-i\omega_l t}\left[\frac{1 + N}{1 - (\xi - 1)N}\right] + \text{c.c.} \quad (45)$$

Входящие в формулу (45) функции $\xi N/(1 - (1 - \xi)N)$ и $(1 + N)/\big(1 - (1 - \xi)N\big)$ в рассматриваемом предельном случае имеют вид

$$\frac{\xi N}{1 - (\xi - 1)N} = -\frac{i\xi(\gamma_{r1}\tilde{\omega}_2 + \gamma_{r2}\tilde{\omega}_1)/2}{\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2 + i\xi(\gamma_{r1}\tilde{\omega}_2 + \gamma_{r2}\tilde{\omega}_1)/2},$$
$$\frac{1 + N}{1 - (\xi - 1)N} = \frac{\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2}{\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2 + i\xi(\gamma_{r1}\tilde{\omega}_2 + \gamma_{r2}\tilde{\omega}_1)/2}.$$

Из приведенных выражений видно, что γ_{ri} и ξ входят только в виде произведения $\gamma_{ri}\xi$. Это означает, что при

$\nu \neq \nu_1$ в случае узких ям в радиационное затухание входит показатель преломления барьеров ν_1, а показатель преломления вещества квантовой ямы ν вообще нигде не фигурирует. Физический смысл этого результата понятен: при $\kappa d \ll 1$ можно перейти к пределу $d \to 0$, когда вещество квантовой ямы отсутствует, но сохраняется наведенный ток, соответствующий переходам с рождением экситонов. Таким образом, доказано, что полученные ранее результаты для узких ям справедливы и при $\nu \neq \nu_1$, поскольку в формулы входит только показатель преломления барьеров.

В этом предельном случае поле в квантовой яме не зависит от координаты, так как в дипольном приближении фаза световой волны не меняется по всей ширине ямы.

3. Оптические характеристики квантовой ямы

В этом разделе приводятся формулы для отражения, пропускания и поглощения квантовой ямой плоской монохроматической электромагнитной волны как в общем случае, когда $\nu \neq \nu_1$ и $\kappa d \neq 0$, так и в предельных случаях однородной среды и $\kappa d = 0$.

Коэффициент отражения R определяется стандартным образом как отношение модуля отраженного потока энергии к модулю падающего потока энергии, т. е.

$$R = |C_R|^2/|E_0|^2. \tag{46}$$

Аналогично коэффициент пропускания T определяется как

$$T = |C_T|^2/|E_0|^2. \tag{47}$$

Безразмерный коэффициент поглощения A (доля поглощенной квантовой ямой энергии) в соответствии с (46) и (47) имеет вид

$$A = 1 - R - T. \tag{48}$$

Используя формулы (31), (32) и (30), можно представить отражение R в форме

$$R = \big[v_1 + (L^2+G^2)X_1 - YL - Z_1G\big]/|\Delta|^2. \tag{49}$$

Определенный формулой (21) знаменатель Δ преобразуется к виду

$$|\Delta|^2 = v + (L^2+G^2)X - YL + ZG. \tag{50}$$

Функции L и G определяют частотную зависимость отражения в области межзонных переходов на два возбужденных уровня; они равны

$$L = \sum_{j=1}^{2} \frac{(\tilde{\gamma}_{rj}/2)\Omega_j}{\Omega_j^2 + \Gamma_j^2/4}, \quad G = \sum_{j=1}^{2} \frac{\tilde{\gamma}_{rj}\Gamma_j/4}{\Omega_j^2 + \Gamma_j^2/4}, \tag{51}$$

$$L^2 + G^2 \equiv |N|^2 = \frac{(\tilde{\gamma}_{r1}/2)^2}{\Omega_1^2 + \Gamma_1^2/4} + \frac{(\tilde{\gamma}_{r2}/2)^2}{\Omega_2^2 + \Gamma_2^2/4}$$
$$+ \frac{2(\tilde{\gamma}_{r1}/2)(\tilde{\gamma}_{r2}/2)(\Omega_1\Omega_2 + \Gamma_1\Gamma_2)}{(\Omega_1^2 + \Gamma_1^2/4)(\Omega_2^2 + \Gamma_2^2/4)}. \tag{52}$$

Коэффициенты v, v_1, X, X_1, Y, Z и Z_1 зависят от параметров $\xi = \nu/\nu_1$ и κd

$$v = 4\big[4\xi^2\cos^2\kappa d + (\xi^2+1)^2\sin^2\kappa d\big],$$
$$v_1 = 4(\xi^2-1)^2\sin^2\kappa d, \tag{53}$$
$$X = 8(\xi-1)^2\big[\xi^2 + 1 + (-1)^{m_c+m_v}(\xi^2-1)\cos\kappa d\big],$$
$$X_1 = 8\big[\xi^4 + 1 + (-1)^{m_c+m_v}(\xi^4-1)\cos\kappa d\big], \tag{54}$$
$$Y = 8(\xi^2-1)\big[(-1)^{m_c+m_v}(\xi^2+1)$$
$$+ (\xi^2-1)\cos\kappa d\big]\sin\kappa d, \tag{55}$$
$$Z = 8(\xi-1)\big[(-1)^{m_c+m_v}(\xi^2+1) + (\xi^2-1)\cos\kappa d\big]$$
$$\times\big[-(-1)^{m_c+m_v}(\xi-1) + (\xi+1)\cos\kappa d\big],$$
$$Z_1 = 8(\xi^2-1)^2\sin^2\kappa d. \tag{56}$$

Если в квантовой яме имеется один возбужденный уровень, то в формуле (49) следует перейти к пределу $\gamma_{r2} \to 0$, $\gamma_{r1} = \gamma_r$, $\gamma_1 \to \gamma$, $\omega_1 = \omega_0$. Коэффициент отражения в этом случае имеет вид

$$R = \frac{1}{|\Delta|^2}\left[v_1 + \frac{(\tilde{\gamma}_r/2)^2X_1 - (\tilde{\gamma}_r/2)(Y\Omega + Z_1\Gamma/2)}{\Omega^2 + \Gamma^2/4}\right],$$
$$|\Delta|^2 = v + \frac{(\tilde{\gamma}_r/2)^2X - (\tilde{\gamma}_r/2)(Y\Omega - Z\Gamma/2)}{\Omega^2 + \Gamma^2/4},$$
$$\Omega = \omega_l - \omega_0 - \varepsilon''\gamma_r/2,$$
$$\Gamma = \gamma + \tilde{\gamma}_r, \qquad \tilde{\gamma}_r = \varepsilon'\gamma_r. \tag{57}$$

Поскольку показатели преломления барьеров и квантовой ямы, как правило, мало отличаются друг от друга, т. е. $\xi \simeq 1$, в знаменателе $|\Delta|^2$ домининующую роль играет $v \simeq 4$. Остальные слагаемые содержат множители $\xi^2 - 1$ либо $(\xi-1)^2$ и малы по сравнению с v даже в резонансе, когда L и $G \simeq 1$. В числителе же R величина $v_1 \ll 1$, и вклад остальных слагаемых значителен. В частности, существенную роль играет знакопеременный член $\sim L$, частотная зависимость которого похожа на кривую аномальной дисперсии. Такая зависимость имеет место в показателе преломления в области частот, соответствующих пикам поглощения.

Коэффициент пропускания T равен

$$T = 16\xi^2\big[L^2 + (1-G)^2\big]/|\Delta|^2 \tag{58}$$

и не содержит знакопеременных членов в числителе. То же имеет место и для поглощения

$$A = 16\xi\big[\xi^2 + 1 + (-1)^{m_c+m_v}(\xi^2-1)\cos\kappa d\big]$$
$$\times\big[G - (L^2+G^2)\big]/|\Delta|^2. \tag{59}$$

Для одного возбужденного уровня соответственно получаем

$$T = \frac{16\xi^2}{|\Delta|^2}\,\frac{\Omega^2 + \gamma^2/4}{\Omega^2 + \Gamma^2/4},$$
$$A = \frac{16\xi\,[\xi^2 + 1 + (\xi^2-1)\cos\kappa d]}{|\Delta|^2}\,\frac{\gamma\tilde{\gamma}_r/4}{\Omega^2 + \Gamma^2/4}. \tag{60}$$

В приближении однородной среды ($\xi = 1$)

$$R = L^2 + G^2, \qquad T = L^2 + (1-G)^2,$$

$$A = 2\big[G - (L^2 + G^2)\big]. \tag{61}$$

В отражении нет члена $\sim L$, т.е. это приближение не учитывает вклада в отражение, происходящего от знакопеременных членов в плотности тока (8).

В предельном случае $\kappa d = 0$

$$|\Delta|^2 \to |\Delta_0|^2 = 16\xi^2 + X_0(L_0^2 + G_0^2) + Z_0 G_0, \tag{62}$$

$$R = X_{10}(L_0^2 + G_0^2)/|\Delta_0|^2,$$

$$T = 16\xi^2\big[L_0^2 + (1 - G_0)^2\big]/|\Delta_0|^2,$$

$$A = 16\xi\big[\xi^2 + 1 + (-1)^{m_c+m_v}(\xi^2 - 1)\big]$$

$$\times \big[G_0 - (L_0^2 + G_0^2)\big]/|\Delta_0|^2. \tag{63}$$

Коэффициенты X_0, Z_0 и X_{10} получаются из формул (54) и (56), если в них положить $\kappa d = 0$:

$$X_0 = 8(\xi - 1)^2\big[\xi^2 + 1 + (-1)^{m_c+m_v}(\xi^2 - 1)\big],$$

$$X_{01} = 8\big[\xi^4 + 1 + (-1)^{m_c+m_v}(\xi^4 - 1)\big],$$

$$Z_0 = 8(\xi - 1)\big[\xi^2 - 1 + (-1)^{m_c+m_v}(\xi^2 - 1)\big]$$

$$\times \big[\xi + 1 - (-1)^{m_c+m_v}\xi - 1\big].$$

Функции G_0 и L_0 отличаются от G и L заменой $\tilde{\gamma}_{rj}$ на γ_{rj}, так как при $\kappa d \to 0$ $\varepsilon' \to 1$. Кроме того, в Ω_j (см. (37)) $\varepsilon'' = 0$, а в β_j (см. (38)) $\varepsilon = 1$.

4. Отражение, поглощение и пропускание света в случае произвольной функции $\Phi(z)$

В разделах 2 и 3 формулы для R, T и A были получены с использованием функции $\Phi(z)$ в виде (4), что справедливо для свободных электронно-дырочных пар. В настоящем разделе $\Phi(z)$ считается произвольной вещественной функцией; в частности, это может быть экситонная функция. Расчет, аналогичный выполненному в разделе 2, приводит к следующим выражениям для констант C_R и C_T:

$$C_R = (E_0/\Delta_1)\Big\{2i(\xi^2 - 1)\sin\kappa d$$

$$+ 2\big[e^{-i\kappa d}w_R + (-1)^{m_c+m_v}(\xi^2 - 1)\big]N\Big\}, \tag{64}$$

$$C_T = (4E_0/\Delta_1)e^{-i\kappa_1 d}\xi\big[1 + (-1)^{m_c+m_v}e^{-i\kappa d}N\big], \tag{65}$$

где

$$\Delta_1 = (\xi +)^2 e^{-i\kappa d} - (\xi - 1)^2 e^{i\kappa d} - 2(\xi - 1)$$

$$\times \big[(\xi + 1)e^{-i\kappa d}w + (-1)^{m_c+m_v}(\xi - 1)\big]N. \tag{66}$$

В (64)–(66) функция N определяется формулой (34) (либо (36)), а константы w (вещественная) и w_R (комплексная) равны

$$w = (-1)^{m_c+m_v}\big[F(0)^2 e^{-i\kappa d} + [F(0)^*]^2 e^{i\kappa d}\big]/\big[2|F(0)|^2\big], \tag{67}$$

$$w_R = (-1)^{m_c+m_v}\big[(\xi + 1)^2 F(0)^2 e^{-i\kappa d}$$

$$+ (\xi - 1)^2[F(0)^*]^2 e^{i\kappa d}\big]/\big(2|F(0)|^2\big). \tag{68}$$

При выводе этих формул использовались соотношения ($\Phi(z)$ считается вещественной, так как представляет одномерное движение) $F(d) = e^{i\kappa d}F(0)^*$, $\mathrm{Re}\,\varepsilon = \varepsilon' = |F(0)|^2$, которые следуют из (19). Если в качестве $\Phi(z)$ использовать (4), то $w \to 1$, $w_R \to \xi^2 + 1$ и формулы (64)–(66) совпадают с (30) и (31).

Из сравнения выражений (64)–(66) с коэффициентами C_R, C_T и Δ, полученными в разделе 2, видно, что структура функции N, которая в основном определяет частотную зависимость, не зависит от вида $\Phi(z)$. Зависят от него лишь значения $\mathrm{Re}\,\varepsilon = \varepsilon'$ и $\mathrm{Im}\,\varepsilon = \varepsilon''$, т.е. множитель у γ_r и сдвиг резонансных частот. Множители w и w_R, входящие в Δ_1 и C_R, могут изменить лишь соотношение между вкладами в оптические характеристики величин L и G, введенных в разделе 3. Поэтому изменение оптических характеристик при изменении $\Phi(z)$ вряд ли будет радикальным.

5. Обсуждение результатов

Частотная зависимость коэффициентов отражения R и пропускания T вычислена для случая $m_c = m_v = 1$ и $\gamma_{r1} = \gamma_{r2} = \gamma_r$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, что соответствует системе полярон A и дырка с квантовым числом Ландау $n = 1$ в условиях магнетофононного резонанса [23]. Вычисления проводились по формулам (46) и (47). Были использованы функции C_R и C_T из (30) и знаменатель Δ из (31), а также функция N в виде (34).

На рис. 1 и 2 отражение R приведено для малых значений отношения γ_r/γ обратных времен жизни. Видно, что кривые *3* и *4* для случая $\xi = (\nu/\nu_1) \neq 1$ и $\kappa d \neq 0$ радикально отличаются от случая $\xi = 1$ (кривая *2*) при том же значении κd. Как упоминалось выше, в формуле для тока (8) содержатся знакопеременные члены $\sim \omega_l - \omega_i$ и члены $\sim \gamma_i[(\omega_l - \omega_i)^2 + \gamma_i^2]$, соответствующие кривой поглощения. Кривые *3* и *4* относятся к случаю, когда преобладающими становятся знакопеременные члены. Поэтому и $R(\omega_l)$ в этом случае аналогична кривой аномальной дисперсии. Наряду с изменением формы кривой отражения имеет место увеличение R (на рис. 1 примерно в 15 раз, а на рис. 2 — в 2 раза) по сравнению со случаями $\kappa d \neq 0$, $\xi = 1$ и $\kappa d = 0$, $\xi \neq 1$. При $\gamma_r/\gamma = 1$ преобладающим становится влияние поглощения, как это видно из рис. 3. Однако и влияние знакопеременных членов все еще заметно: кривые *3* и *4* ($\xi = 1.1$ и $\xi = 0.9$ соответственно) отличаются от кривой *2* ($\xi = 1$). При дальнейшем увеличении γ_r/γ

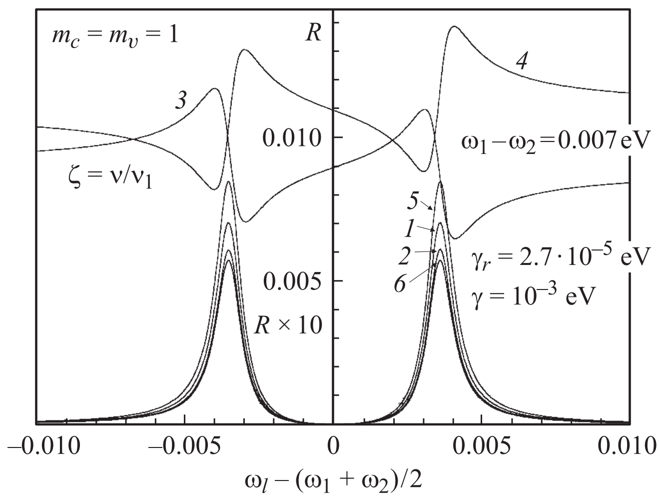

Рис. 1. Зависимость отражения R от частоты возбуждающей волны ω_l для случая $\gamma_r/\gamma = 0.027$. Кривые *1, 2, 5, 6* увеличены в 10 раз. Здесь, а также на рис. 2–6 ξ и κd соответственно равны: *1* — 1 и 0, *2* — 1 и 1.5, *3* — 1.1 и 1.5, *4* — 0.9 и 1.5, *5* — 1.1 и 0, *6* — 0.9 и 0.

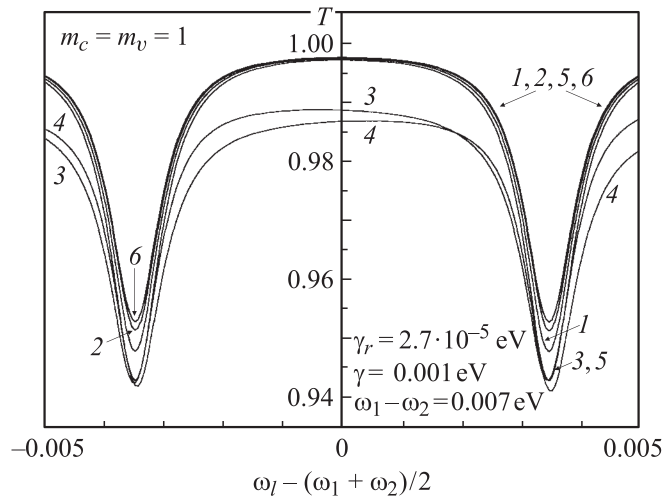

Рис. 4. Зависимость пропускания T от частоты возбуждающей волны ω_l для случая $\gamma_r/\gamma = 0.027$.

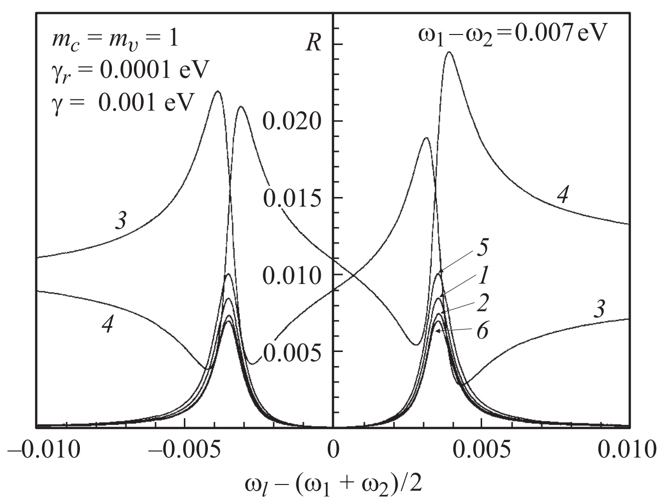

Рис. 2. То же, что на рис. 1, для $\gamma_r/\gamma = 0.1$.

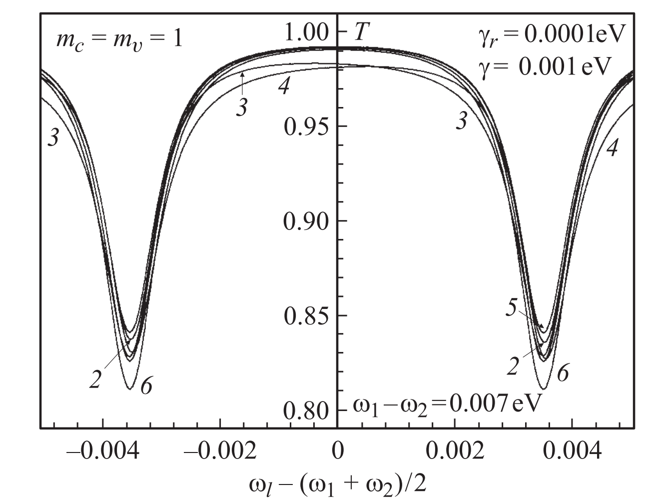

Рис. 5. То же, что на рис. 3, для $\gamma_r/\gamma = 0.1$.

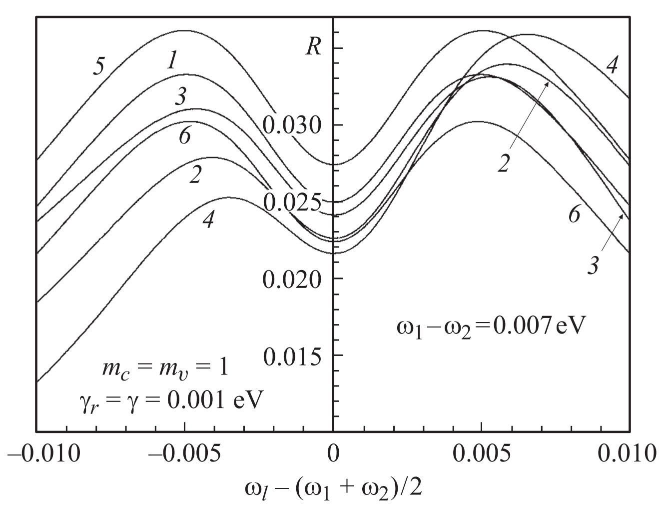

Рис. 3. То же, что на рис. 1, для $\gamma_r = \gamma$.

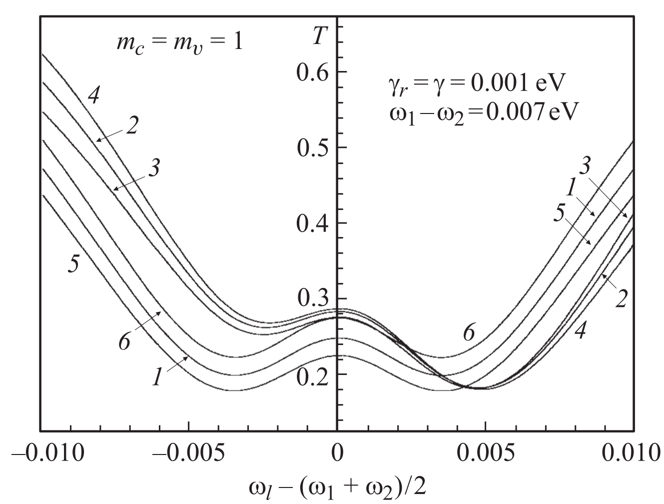

Рис. 6. То же, что на рис. 3, для $\gamma_r = \gamma$.

влияние аномальной дисперсии становится практически незаметным и функции R, T и A совпадают с полученными в работе [22]. Кривые пропускания T приведены на рис. 4–6 для тех же значений параметров κd, ξ и γ_r/γ, что и кривые на рис. 1–3. Видно, что пропускание малочувствительно к изменению параметра ξ. Это объясняется отсутствием в $T(\omega_l)$ членов, пропорциональных $\omega_l - \omega_1$ и $\omega_l - \omega_2$ (см. (58)). Небольшое различие определяется знаменателем $|\Delta|^2$, в котором имеются линейные по $\omega_l - \omega_j$ члены. Поглощение A вообще малочувствительно к изменению параметра ξ во всей области изменения γ_r/γ.

На рисунках приведены также R и T для случая $\xi = 1$, $\kappa d = 1.5$ (кривая *2*). Обращает на себя внимание асимметрия кривой *2* по сравнению со случаем $\kappa d = 0$, $\xi \neq 1$ (кривые *5* и *6*). Асимметрия является следствием учета в теории высших порядков по взаимодействию возбуждающей электромагнитной волны с электронной системой, что приводит к появлению сдвигов резонансных частот; эти сдвиги по-разному комбинируются с резонансными частотами ω_1 и ω_2. При переходе к пределу $\kappa d \to 0$ сдвиги исчезают и симметрия кривых восстанавливается.

Наконец, кривые *5* и *6* на рисунках соответствуют случаю $\kappa d = 0$, $\xi \neq 1$. Кривые здесь симметричны, а влияние параметра ξ проявляется в параллельном сдвиге кривых (если $\gamma_r = \gamma$) либо изменении в окрестности экстремумов ($\gamma_r \leq \gamma$).

Главный вывод, который следует из приведенного расчета, заключается в том, что при больших радиационных временах жизни возбужденных состояний по сравнению с нерадиационными временами (которые определяются, в частности, рассеянием электронов и дырок на примесях и фононах) частотная зависимость коэффициента отражения определяется в основном знакопеременными членами в выражении для плотности тока. В этом случае можно пренебречь величиной γ_r в резонансных знаменателях, т.е. решать задачу в линейном по взаимодействию электромагнитной волны с электронной системой приближении.

Список литературы

[1] H. Stolz. Time resolved light scattering from exitons. Springer Tracts in Modern Physic. Springer, Berlin (1994).
[2] J. Shah. Ultrafast spectroscopy of semiconductors and semiconductor nanostructures. Berlin (1996).
[3] H. Hang, S.W. Koch. Quantum theory of the optical and electronics properties of semiconductors. World Scientific (1993).
[4] Л.Е. Воробьев, Е.Л. Ивченко, Д.А. Фирсов, В.А. Шалыгин. Оптические свойства наноструктур. Наука, СПб (2002).
[5] L.C. Andreani, F. Tassone, F. Bassani. Solid State Commun. **77**, 641 (1991).
[6] L.C. Andreani. In: Confined electrons and photons / Eds E. Burstein., C. Weisbuch. Plemun Press, N.Y. (1995). P. 57.
[7] Е.Л. Ивченко. ФТТ **33**, 2388 (1991).
[8] Е.Л. Ивченко, А.В. Кавокин. ФТТ **34**, 1815 (1992).
[9] F. Tassone, F. Bassani, L.C. Andreani. Phys. Rev. B **45**, 6023 (1992).
[10] T. Stroucken, A. Knorr, C. Anthony, P. Thomas, S.W. Koch, M. Khoch, S.T. Gundiff, J. Feldman, E.O. Göbel. Phys. Rev. Lett. **74**, 2391 (1995).
[11] T. Stroucken, A. Knorr, P. Thomas, S.W. Khoch. Phys. Rev. B **53**, 2026 (1996).
[12] M. Hübner, T. Kuhl, S. Haas, T. Stroucken, S.W. Koch, R. Hey, K. Ploog. Solid State Commun. **105**, 105 (1998).
[13] I.G. Lang, V.I. Belitsky, M. Cardona. Phys. Stat. Sol. (a) **164**, 307 (1997).
[14] I.G. Lang, V.I. Belitsky. Phys. Lett. A **245**, 329 (1998).
[15] I.G. Lang, V.I. Belitsky. Solid State Commun. **107**, 577 (1998).
[16] И.Г. Ланг, Л.И. Коровин, Д.А. Контрерас-Солорио, С.Т. Павлов. ФТТ **42**, 2230 (2000); Cond-mat / 0006364.
[17] D.A. Contreras-Solorio, S.T. Pavlov, L.I. Korovin, I.G. Lang. Phys. Rev. B **62**, 16 815 (2000); Cond-mat / 0002229.
[18] И.Г. Ланг, Л.И. Коровин, Д.А. Контрерас-Солорио, С.Т. Павлов. ФТТ **43**, 1117 (2001); Cond-mat / 0004178.
[19] И.Г. Ланг, Л.И. Коровин, Д.А. Контрерас-Солорио, С.Т. Павлов. ФТТ **44**, 2084 (2002); Cond-mat / 0001248.
[20] Л.И. Коровин, И.Г. Ланг, Д.А. Контрерас-Солорио, С.Т. Павлов. ФТТ **43**, 2091 (2001).
[21] Л.И. Коровин, И.Г. Ланг, Д.А. Контрерас-Солорио, С.Т. Павлов. ФТТ **44**, 1681 (2002).
[22] И.Г. Ланг, Л.И. Коровин, С.Т. Павлов. ФТТ **48**, 1693 (2006).
[23] И.Г. Ланг, Л.И. Коровин, С.Т. Павлов. ФТТ **47**, 1704 (2005); Cond-mat / 0411692.
[24] И.Г. Ланг, С.Т. Павлов, Л.И. Коровин. ФТТ **46**, 1708 (2004).
[25] J.M. Luttinger, W. Kohn. Phys. Rev. **97**, 869 (1955).
[26] И.М. Цидильковский. Зонная структура полупроводников. Наука, М. (1978).
[27] Л.И. Коровин, И.Г. Ланг, С.Т. Павлов. ЖЭТФ **118**, 388 (2000); Cond-mat / 0004373.
[28] И.В. Лернер, Ю.Е. Лозовик. ЖЭТФ **78**, 1167 (1980).