

# Исследование системы мезоскопических гранул при помощи модели квантовых косинусов

© С.А. Верзаков, Ю.Е. Лозовик

Институт спектроскопии Российской академии наук,  
142092 Троицк, Московская обл., Россия  
E-mail: lozovik@isan.troitsk.ru

(Поступила в Редакцию 12 июля 1999 г.)

Методом среднего поля и при помощи отображения на классическую ХУ-модель исследуется система малых сверхпроводящих гранул на проводящей подложке. Используемая модель "квантовых косинусов" не содержит некорректного оператора фазы. Проводится сравнение с результатами квантового моделирования.

Работа была частично поддержана РФФИ.

В последнее время, в связи с экспериментальными успехами в области нанотехнологии, наблюдается большой экспериментальный и теоретический интерес к системам мезоскопических объектов: малым сверхпроводящим гранулам, сверхтекучему гелию в пористых средах или адсорбированному на поверхности графита, массивам сверхмалых джозефсоновских контактов. Некоторые из таких мезоскопических систем предположительно могут быть использованы как возможная элементная база наноэлектроники. Поэтому исследованию моделей, отражающих основные свойства как единичных мезоскопических объектов, так и массивов таких объектов уделяется в настоящее время большое внимание [1].

В данной работе рассматривается регулярный массив мезоскопических объектов, реализацией которого может служить система сверхмалых джозефсоновских контактов либо малых сверхпроводящих гранул, в частности на проводящей подложке, приложением напряжения к которой можно управлять средним числом "куперовских пар" в каждой грануле массива. Другим примером рассматриваемой системы является сверхтекучий гелий в пористых средах либо пленка нескольких монослоев гелия на поверхности графита. Химический потенциал атомов гелия в данном случае определяется ван-дер-ваальсовским взаимодействием адсорбированных атомов с подложкой и является хорошо определенной функцией толщины пленки  $^4\text{He}$  [2]. Важным для исследования является также массив мезоскопических ловушек с бозе-конденсированными атомами, охлажденными лазерным излучением. В частности, такая система может быть реализована при захвате и охлаждении атомов в узлах системы стоячих электромагнитных волн. Рассматривая такие массивы мезоскопических объектов, мы считаем, что переход в сверхпроводящее (сверхтекучее) состояние в каждой грануле (поре) уже наступил, и свойства системы определяются бозонными степенями свободы и могут описываться в терминах модели взаимодействующих бозонов (эффективных бозонов — "куперовских пар" на грануле или "сверхтекучих частиц" в поре) на узлах двумерной решетки.

В настоящей работе будет показано, что применение обычно использующихся при описании подобных

систем (в рамках квантовой ХУ-модели) операторов фазы и числа частиц как сопряженных переменных [3] ограничено случаем системы макроскопических гранул, тогда как при малом (по сравнению со среднеквадратичными флуктуациями) среднем количестве частиц, приходящихся на гранулу, необходимы другие модели, не использующие некорректного "оператора фазы" (см. далее). Недавно для исследования сверхпроводящих свойств массива мезоскопических сверхпроводящих гранул или пор со сверхтекучим гелием применялась бозонная модель Хаббарда [4–7], учитывающая не только квантовые флуктуации фаз, но также и модуля сверхпроводящего (сверхтекучего) параметра порядка гранул (пор) массива. Однако интересно также рассмотреть случай, когда флуктуации локальной сверхтекучей плотности на гранулах (порах) малы даже в мезоскопической области, а основная роль в разрушении глобального сверхпроводящего состояния массива принадлежит квантовым флуктуациям фаз параметра порядка. Результаты настоящей работы показывают, что этим требованиям удовлетворяет модель "квантовых косинусов" (QC) [8]. Мы исследуем ее фазовую диаграмму как при помощи метода среднего поля, так и находя отображение этой квантовой системы на классическую ХУ модель с перенормированной константой связи, что дает возможность рассмотреть топологический фазовый переход типа Костерлица–Таулесса. Будет определена граница макроскопически упорядоченного состояния массива как при фиксированном химическом потенциале, так и при фиксированной средней плотности частиц; а также прослежен предельный переход к массиву макроскопических гранул, рассматриваемых обычно в терминах квантовой ХУ- (QXY) модели.

## 1. Модель

Для определенности дальнейшее изложение будем проводить на примере регулярного массива сверхпроводящих гранул на проводящей подложке; обобщение на случай адсорбированного гелия является очевидным.

Рассмотрим массив сверхпроводящих гранул собственной емкости  $C_0$  (взаимные емкости считаются много меньшими  $C_0$ , и их влиянием пренебрегаем) и константой джозефсоновского туннелирования  $J$ , отделенный некоторой изолирующей прослойкой от проводящей подложки, с приложенным к ней потенциалом. При рассмотрении массива макроскопических гранул, относительные флуктуации модуля сверхпроводящего параметра порядка которых малы, оператор числа частиц ("куперовских пар") на каждой грануле полагается сопряженным с оператором фазы модуля параметра порядка  $\hat{n}_j = n_0 = i\partial/\partial\varphi_j$  (здесь  $n_0$  — равновесное число бозонов на грануле). Это приводит к гамильтониану квантовой XY-модели (QXY)

$$\hat{H}_{\text{qxy}} = -J \sum_{\langle j,k \rangle} \cos(\varphi_j - \varphi_k) + \frac{U}{2} \sum_j \hat{n}_j^2 - \mu \sum_j \hat{n}_j. \quad (1)$$

Здесь  $U/2 \equiv 4e^2/(2C_0)$  — характерная величина кулоновской энергии, а химический потенциал частиц  $\mu$  контролирует среднее число бозонов на каждой грануле массива и определяется напряжением, приложенным к подложке.

Однако данной модели присуща внутренняя противоречивость: 1) областью допустимых состояний в данной модели являются периодические функции  $\psi(\varphi + 2\pi) = \psi(\varphi)$ , но при этом оператор фазы выводит волновые функции из класса периодических функций; 2) оператор числа частиц  $\hat{n}_i$  неограничен снизу.

Данные противоречия могут быть устранены при помощи метода, использовавшегося ранее для разрешения проблемы квантового оператора фазы в квантовой оптике [9]. Основная идея метода заключается в отказе от понятия оператора фазы и переходе к тригонометрическим операторам с последующим ограничением их спектра  $\hat{n}_i$  снизу. Отказ от использования оператора фазы устраняет первое противоречие и позволяет работать с операторами вида

$$\widehat{f(\varphi)} = \int_0^{2\pi} d\varphi f(\varphi) |\varphi\rangle \langle \varphi|,$$

$$|\varphi\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(in\varphi) |n\rangle, \quad (2)$$

где  $f(\varphi)$  некоторая  $2\pi$ -периодическая функция,  $|n\rangle$  — состояние с определенным числом частиц  $n$ , а  $|\varphi\rangle$  — состояние с определенной фазой  $\varphi$ .

Второе противоречие становится существенным, когда относительные флуктуации числа частиц на грануле немалы. Для его устранения необходимо отбросить в формуле (2) состояния с  $n < 2$  в (2). Подставляя  $\cos\varphi$

и  $\sin\varphi$  вместо  $f(\varphi)$ , получим

$$\widehat{\cos\varphi} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{\hat{n}+1}} \hat{a} + \text{h.c.} \right),$$

$$\widehat{\sin\varphi} = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{\sqrt{\hat{n}+1}} \hat{a} - \text{h.c.} \right), \quad \hat{n} = \hat{a}^+ \hat{a}, \quad (3)$$

где  $\hat{a}^+$  и  $\hat{a}$  — бозонные операторы рождения и уничтожения. Преобразование  $\cos(\varphi_j - \varphi_j)$  к виду  $\cos(\varphi_j) \cos(\varphi_j) + \sin(\varphi_j) \sin(\varphi_j)$  и использование соотношений (3) приводит нас к модели с гамильтонианом

$$\hat{H}_{\text{qc}} = J \sum_{\langle j,k \rangle} \left[ 1 - \frac{1}{2} (\hat{W}_j^+ \hat{W}_k + \text{h.c.}) \right]$$

$$+ \frac{U}{2} \sum_j \hat{n}_j^2 - \mu \sum_j \hat{n}_j, \quad \hat{W}_j = \frac{1}{\sqrt{\hat{n}_j+1}} \hat{a}_j, \quad (4)$$

которую в дальнейшем будем называть, как и в [8], моделью квантовых косинусов (QC-модель). Из рассмотрения гамильтониана (4) можно сделать вывод, что безразмерными соотношениями, определяющими состояние системы, являются безразмерный квантовый параметр  $q = \sqrt{U/J}$ , безразмерная температура  $T = 1/(\beta J)$  и безразмерный химический потенциал  $\eta = \mu/U$ , определяющий среднее число бозонов на грануле  $n_0$ .

Отметим, что данная модель по своему внешнему виду напоминает бозонную модель Хаббарда, в которой  $\hat{W}_j = \hat{a}_j$ . Отличие состоит в том, что в рамках QC-модели мы не учитываем влияния флуктуаций модуля параметра порядка на величину константы туннелирования  $J$  из-за наличия в гамильтониане (4) делителя  $\sqrt{\hat{n}_j+1} \sqrt{\hat{n}_k+1}$ .

Очевидно, что в случае больших по сравнению с флуктуациями средних значений чисел заполнения  $n_0$ , когда ограниченностью спектра оператора  $\hat{n} - n_0$  можно пренебречь, QC-модель сводится к QXY-модели.

## 2. Расчет фазовой диаграммы

А. Статистическая сумма системы. Как известно (см. [10]), статистическая сумма системы с гамильтонианом в представлении вторичного квантования может быть записана в виде континуального интеграла

$$Z \equiv \text{Tr} \{ \exp(-\beta \hat{H}_{\text{qc}}) \} = \int D\Psi(\tau) D\Psi^*(\tau) \exp(-S),$$

$$S_{\Psi} = \int_0^{\beta} d\tau \left[ \sum_j \psi_j^*(\tau) \dot{\psi}_j(\tau) + \langle \Psi(\tau) | H_{\text{qc}} | \Psi(\tau) \rangle \right]. \quad (5)$$

Здесь  $|\Psi\rangle \equiv \prod_j |\psi_j\rangle$ , а  $|\psi_j\rangle$  обозначает когерентное состояние для одной гранулы

$$|\psi_j\rangle = \exp\left(-\frac{|\psi_j|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_j^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5), получаем

$$S_\Psi = \sum_j S_0(j) + S_1, \quad (7)$$

где  $S_0(j)$  — невозмущенная одногранульная часть

$$S_0(j) = \int_0^\beta d\tau \left( \psi_j^*(\tau) \dot{\psi}_j(\tau) + \frac{U}{2} |\psi_j(\tau)|^4 - \mu' |\psi_j(\tau)|^2 \right), \quad \mu' = \mu - \frac{U}{2},$$

а  $S_1$  отвечает за межгранульное туннелирование

$$S_1 = - \int_0^\beta d\tau \frac{J}{2} \sum_{\langle j,k \rangle} \left( W_j^*(\tau) W_k(\tau) + \text{c.c.} \right) \\ = - \int_0^\beta d\tau Jd \sum_q C_q |W_q(\tau)|^2,$$

$$W_j(\tau) = \psi_j(\tau) \exp(-|\psi_j(\tau)|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\psi_j(\tau)|^{2n}}{n! \sqrt{n+1}},$$

$$C_q = \frac{1}{d} \sum_{s=1}^d \cos q_s, \quad W_q(\tau) = \frac{1}{\sqrt{L^d}} \sum_j W_j(\tau) \exp(ijq),$$

$$q = (q_1, \dots, q_d)^T, \quad q_s = 0, 2\pi/L, \dots, 2\pi(L-1)/L.$$

Здесь  $L$  обозначает количество гранул вдоль ребра массива.

Следуя подходу работ [6,11], для исследования исчезновения глобальной сверхпроводимости применим к функциональному интегралу (5)–(7) преобразование Хаббарда–Стратоновича, считая межгранульное взаимодействие возмущением.

В результате получим статистическую сумму в виде интеграла по параметру порядка  $\Delta(\tau)$  и величине ему комплексно сопряженной  $\Delta^*(\tau)$

$$Z = \frac{1}{Z_\Delta} \int D\Delta(\tau) D\Delta^*(\tau) \exp(-S_\Delta),$$

$$S_\Delta = - \ln \left\{ \int D\Psi(\tau) D\Psi^*(\tau) \exp \left[ - \sum_j S_0(j) - S_2 \right] \right\}$$

$$+ \int_0^\beta d\tau Jd \sum_q |\Delta_q(\tau)|^2,$$

$$S_2 = - \int_0^\beta d\tau Jd \sum_q \left( \sqrt{C_q} W_q(\tau) \Delta_q^*(\tau) + \text{c.c.} \right). \quad (8)$$

Значение параметра порядка на грануле  $j$  есть

$$\Delta_j(\tau) = \frac{1}{\sqrt{L^d}} \sum_q \Delta_q(\tau) \exp(-ijq).$$

В. Приближение среднего поля. Исследуем свойства системы (8) в приближении среднего поля: вместо флуктуирующего поля  $\Delta_j(\tau)$  подставим в уравнение (8) его ”среднее” значение  $\bar{\Delta}$ , которое не зависит от номера гранулы  $j$  и мнимого времени  $\tau$ . Тогда действие запишется в виде

$$S_\Delta^{mf} = L^d \beta Jd |\bar{\Delta}|^2 - L^d \ln(A^{mf}),$$

$$A^{mf} = \int D\psi(\tau) D\psi^*(\tau) \exp(-S_0 - S_2^{mf}),$$

$$S_2^{mf} = - \int_0^\beta d\tau Jd (W(\tau) \bar{\Delta}^* + \text{c.c.}).$$

Здесь у величин  $\psi, W$  опущены индексы  $j$ , так как в этом приближении все гранулы независимы и вычисления можно проводить по любой из них.

Значение  $\bar{\Delta}$ , минимизирующее действие  $S_\Delta^{mf}$ , отвечает стабильному состоянию системы и удовлетворяет условию экстремальности  $\partial S_\Delta^{mf} / \partial \bar{\Delta}^* = 0$ ,

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{\beta A^{mf}} \int D\psi(\tau) D\psi^*(\tau) \\ \times \exp(-S_0 - S_2^{mf}) \left[ \int_0^\beta d\tau W(\tau) \right]. \quad (9)$$

Дифференцирование  $S_\Delta^{mf}$  по  $\bar{\Delta}$  приводит к уравнению, комплексно сопряженному уравнению (9). Легко видеть, что решение уравнения (9)  $\bar{\Delta} = |\bar{\Delta}| \exp(i\varphi)$  имеет произвольную фазу  $\varphi$ , а его модуль  $|\bar{\Delta}|$  определяется из уравнений

$$|\bar{\Delta}| = \left\langle \frac{1}{\sqrt{\hat{n}+1}} \hat{a} \right\rangle^{mf}, \quad (10)$$

$$\hat{H}^{mf} = -Jd |\bar{\Delta}| \left( \hat{a} + \frac{1}{\sqrt{\hat{n}+1}} + \text{h.c.} \right) + \frac{U}{2} \hat{n}^2 - \mu \hat{n}, \quad (11)$$

где усреднение ведется по матрице плотности  $\exp(-\beta \hat{H}^{mf})$ . Видно, что  $|\bar{\Delta}| = 0$ , отвечающее разупорядоченному состоянию, является решением уравнения (10). Положительность второй производной  $S_\Delta^{mf}$  определяет стабильность этого состояния. Следовательно, уравнение, определяющее границу упорядоченной области, есть

$$\partial^2 S_\Delta^{mf} / (\partial \bar{\Delta}^* \partial \bar{\Delta})|_{\bar{\Delta}=0} = 0,$$

что просто соответствует равенству нулю коэффициента при квадратичном члене функционала Гинзбурга–Ландау, получаемого разложением  $S_\Delta^{mf}$  вблизи границы упорядоченного состояния. Производя дифференцирование, получаем

$$1 = Jd \left\langle \int_0^\beta d\tau \exp(\hat{H}_{\bar{\Delta}=0}^{mf}) \hat{W}^+ \exp(-\tau \hat{H}_{\bar{\Delta}=0}^{mf}) \hat{W} \right\rangle_{\bar{\Delta}=0}^{mf}.$$

Данное уравнение может быть упрощено

$$\frac{q^2}{2d} = \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-\frac{q^2}{2T}(n-\eta)^2) - \exp(-\frac{q^2}{2T}(n+1-\eta)^2)}{2(n-\eta)+1} \right] \times \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{q^2}{2T}(n-\eta)^2\right) \right]^{-1}. \quad (12)$$

Связь среднего числа частиц на грануле  $n_0$  со значением химического потенциала на границе упорядоченного состояния задается уравнением

$$n_0 \equiv \langle a^+ a \rangle_{\Delta=0}^{mf} = \left[ \sum_{n=0}^{\infty} n \exp\left(-\frac{q^2}{2T}(n-\eta)^2\right) \right] \times \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{q^2}{2T}(n-\eta)^2\right) \right]^{-1}. \quad (13)$$

С. Отображение на классическую XY-модель. Однако возможно, что флуктуации фазы разрушают упорядоченную фазу раньше, чем это предсказывает обращение  $|\bar{\Delta}|$  в нуль. Учтем флуктуации фазы, как и в [12], приближенно: примем, что  $\Delta_j(\tau) = |\bar{\Delta}| \exp(i\varphi_j)$ , т.е. модуль постоянен, а фаза может изменяться от гранулы к грануле (оставаясь постоянной по  $\tau$ ). Следовательно,

$$S_{\Delta}^{pf} = L^d \beta J d |\bar{\Delta}|^2 - \ln(A^{pf}),$$

$$A^{pf} = \int D\Psi(\tau) D\Psi^*(\tau) \exp\left(-\sum_j S_0(j) - S_2^{pf}\right),$$

$$S_2^{pf} = -\frac{Jd|\bar{\Delta}|}{\sqrt{L^d}} \sum_{q,j} \left( \sqrt{C_q} \left[ \int_0^{\beta} d\tau W_q(\tau) \right] \times \exp(-i\varphi_j - ij q) + \text{c.c.} \right). \quad (14)$$

Раскладывая действие  $S_{\Delta}^{pf}$  по  $\varphi_j$  до второго порядка включительно и считая, что  $|\bar{\Delta}|$  определяется по методу среднего поля из уравнения (10), получим эффективное действие

$$S_{\Delta}^{\text{eff}} \approx S_{\Delta}^{mf} + \beta J |\bar{\Delta}|^2 \sum_{\langle j,k \rangle} (1 - \cos(\varphi_j - \varphi_k)). \quad (15)$$

Второе слагаемое соответствует действию классической XY-модели, что делает возможным фазовый переход при конечных  $|\bar{\Delta}|$  по сценарию классической  $d$ -мерной XY-модели с безразмерной температурой  $T_{XY}(q, T, \eta) = T/|\bar{\Delta}|^2$ . В частности, для случая двух измерений переход будет происходить по сценарию Костерлица–Таулесса при условии

$$T_{XY}(q, T, \eta) = 0.89, \quad (16)$$

которое вместе с уравнением (10) определяет границу упорядоченного состояния. Уравнения (10), (16) не поддаются аналитическому решению и поэтому решались численно.

### 3. Обсуждение результатов

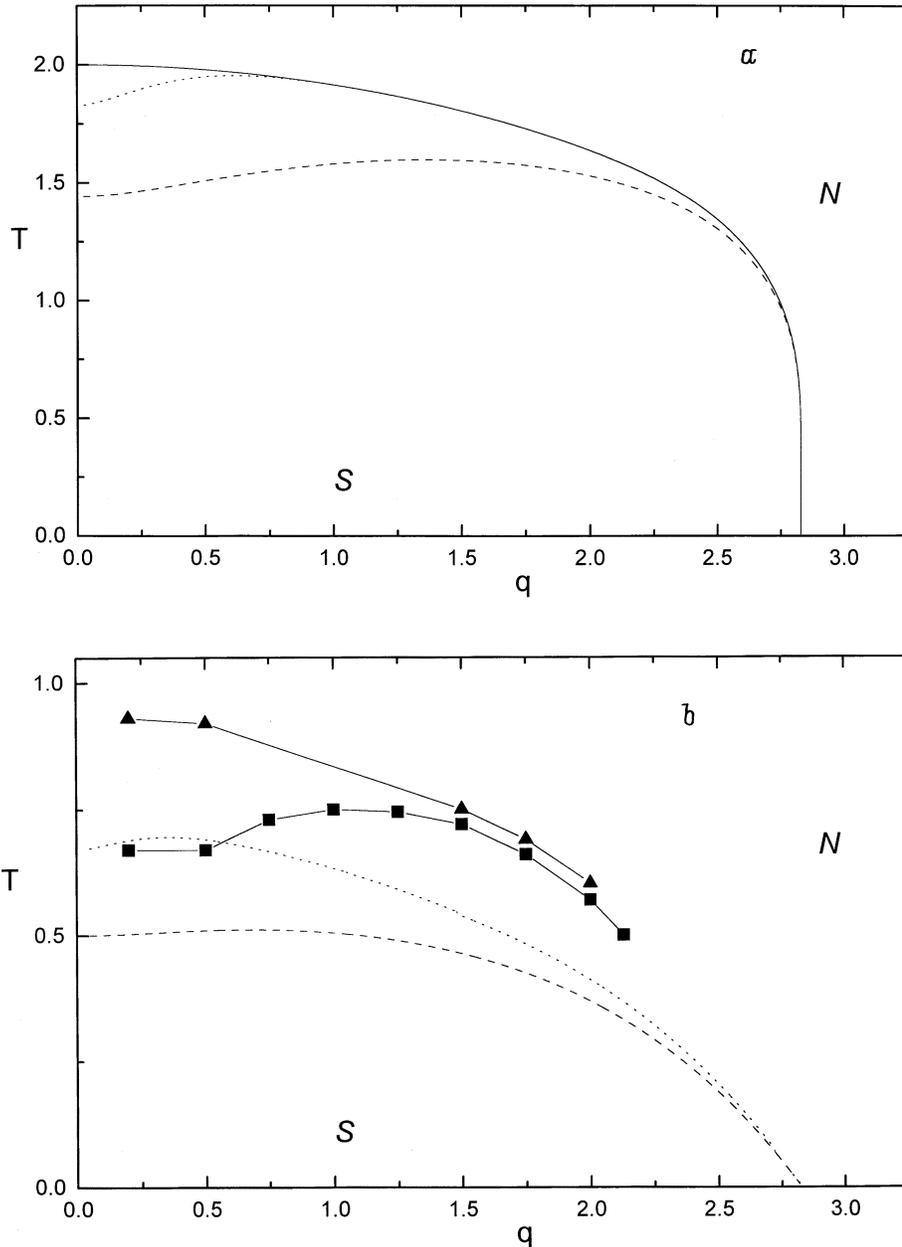
Все вычисления проводились для двумерного массива. Рассмотрим границу упорядоченной фазы при целочисленных заполнениях гранул массива  $n_0 = k$  (рис. 1). Видно, что метод среднего поля (рис. 1, *a*) дает завышенные значения для температуры фазового перехода, тогда как метод отображения неплохо согласуется с результатами численного моделирования (рис. 1, *b*). То, что моделирование предсказывает более высокую температуру перехода, возможно, объясняется эффектом уширения, обусловленными малым размером системы ( $6 \times 6$  гранул), взятой для моделирования. Наблюдается возрастание критической температуры  $T_c(q, n_0)$  с увеличением  $n_0$  — среднего числа частиц, приходящегося на одну гранулу массива. В пределе  $n_0 \rightarrow \infty$  граница упорядоченной фазы QC-модели совпадает с фазовой границей QXY-модели. Следует отметить достаточно быструю сходимость фазовой диаграммы QC-модели к фазовой диаграмме QXY-модели ( $n_0 = \infty$ ), тем лучше, чем больше значение параметра  $q$ . При слабом взаимодействии бозонов (малых  $q$ ) можно наблюдать эффект "возрастной сверхпроводимости": с увеличением взаимодействия критическая температура возрастает. Этот эффект наиболее ярко проявляется при больших значениях  $n_0$ .

В случае когда  $n_0$  принимает нецелые значения, вид фазовой диаграммы качественно изменяется: при сколь угодно малом отличии  $n_0$  от целого числа наблюдается "размытие" фазовой диаграммы в низкотемпературной области. Упорядоченное состояние существует при сколь угодно больших значениях  $q$ . Из уравнений (12) и (13) видно, что (в приближении среднего поля) предельное значение температуры  $T_c(q, n_0)$  при  $q \rightarrow \infty$  оценивается как  $T_c = z(1 - 2f)/(2 \ln(1/f - 1))$ , где  $f \in (0, 1)$  — дробная часть  $n_0$ . Подобный результат также имеет место для модели Бозе–Хаббарда в случае несоизмеримого заполнения [5].

На рис. 2 сравниваются фазовые диаграммы для целых и дробных  $n_0$ , полученные методом отображения на XY-модель (расчеты методом среднего поля приводят к качественно тем же зависимостям).

Отмеченные выше особенности фазовой диаграммы можно проиллюстрировать, рассмотрев поведение температуры разупорядочения  $T_c(n_0)$  при различных фиксированных значениях  $q$  (см. вставку к рис. 2). В области слабых квантовых флуктуаций фазы параметра порядка (малых  $q$ ) температура разупорядочения монотонно стремится к своему пределу, соответствующему QXY-модели. При более сильном кулоновском взаимодействии наблюдаются колебания критической температуры в зависимости от среднего числа частиц, которые при  $q \rightarrow \infty$  приобретают строгую периодичность (с периодом 1).

При рассмотрении массива мезоскопических объектов на проводящей подложке среднее число частиц на грануле управляется приложенным к подложке напряжени-

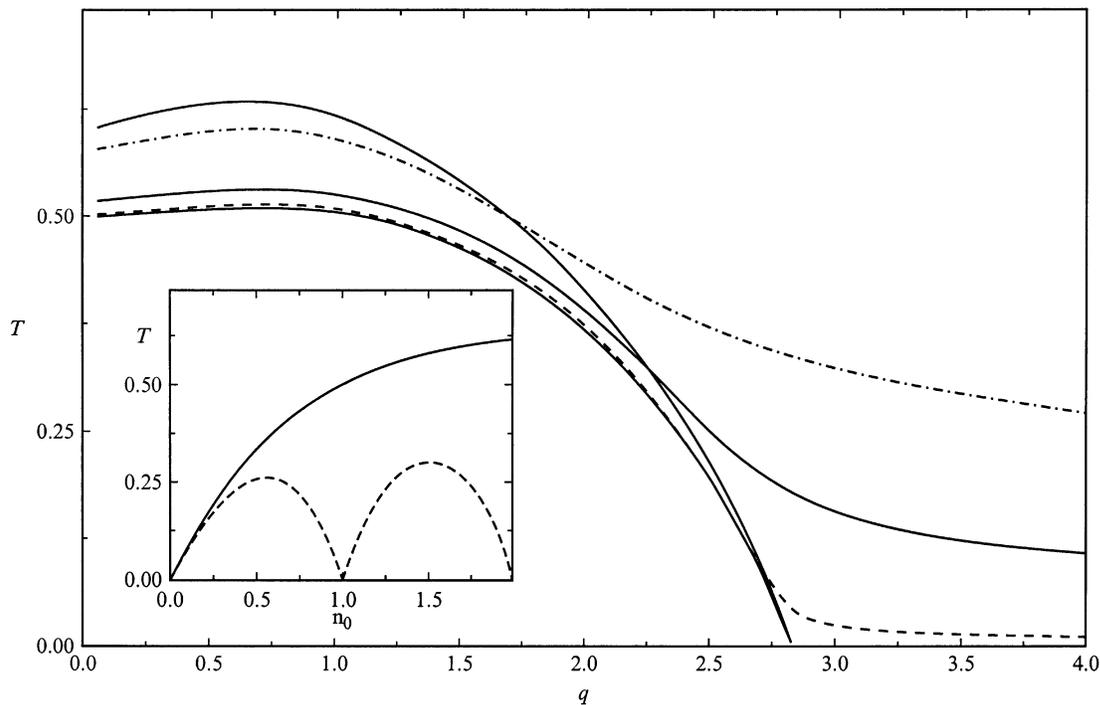


**Рис. 1.** Фазовые диаграммы QC-модели при целочисленных заполнениях гранул массива. Здесь и далее:  $S$  — сверхпроводящее состояние,  $N$  — нормальное состояние.  $a$  — расчет методом среднего поля: штриховая линия —  $n_0 = 1$ ; пунктирная линия —  $n_0 = 5$ ; сплошная линия —  $n_0 = \infty$ , что соответствует квантовой XY-модели.  $b$  — символы обозначают результаты квантовых расчетов методом Монте-Карло из [8]: система из  $6 \times 6$  гранул: квадраты —  $n_0 = 1$ , треугольники —  $n_0 = 5$ . Расчет методом отображения на классическую XY-модель: прерывистая линия —  $n_0 = 1$ , пунктирная линия —  $n_0 = 5$ .

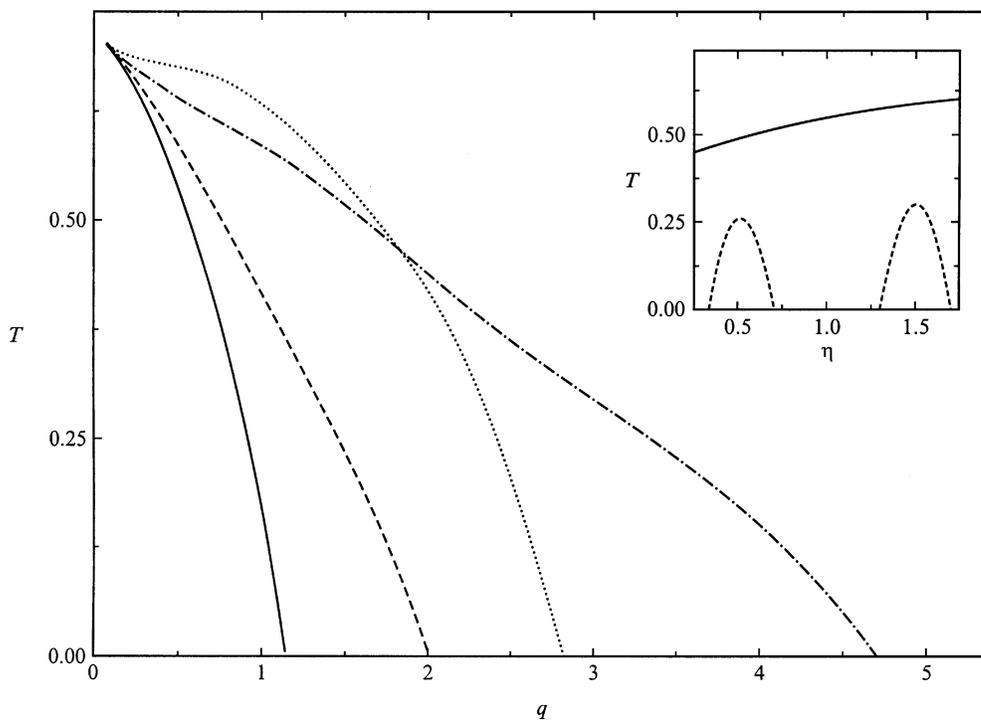
ем [13]. Такому эксперименту соответствует нахождение границы упорядоченной фазы  $T_c(q, \eta)$  при фиксированных значениях химического потенциала. На рис. 3 изображено семейство границ упорядочения  $T_c(q, \eta)$  (расчет методом отображения) при различных значениях химического потенциала  $\eta = \mu/U$ . Расширение фазовой диаграммы в область больших значений  $q$  усиливается при приближении  $\eta$  к полужелтым значениям, при которых упорядоченная фаза существует при сколь угодно

больших значениях  $q$ . Зависимость критической температуры от химического потенциала (вставка к рис. 3), аналогично случаю зависимости  $T_c(n_0)$  (рис. 2), ясно показывает различия в поведении  $T_c(\eta)$  при малых и больших  $q$ .

При сравнении рис. 2 и 3 заметно отличие в поведении границы упорядоченной фазы при фиксированных  $n_0$  и  $\eta$  при  $q \rightarrow 0$ . В случае  $\eta = \text{const}$  все значения критических температур стремятся к одному пределу. Данное поведе-



**Рис. 2.** Сравнение фазовых диаграмм QC-модели при целочисленных и дробных заполнениях: сплошные линии —  $n_0 = 1$ ,  $n_0 = 2$  (снизу-вверх); штриховая линия —  $n_0 = 1.01$ ; пунктирная линия —  $n_0 = 1.1$ ; штрих-пунктирная линия —  $n_0 = 1.6$ . На вставке: фазовая диаграмма в плоскости  $(n_0, T)$  при  $q = 1$  — сплошная линия и при  $q = 3.5$  — прерывистая линия.



**Рис. 3.** Фазовые диаграммы QC-модели при фиксированных значениях химического потенциала: сплошная линия —  $\eta = -1$ ; штриховая линия —  $\eta = 0$ ; пунктирная линия —  $\eta = 3$ ; штрих-пунктирная линия —  $n_0 = 1.4$ . На вставке: фазовая диаграмма в плоскости  $(\eta, T)$  при  $q = 1$  — сплошная линия и при  $q = 3.5$  — штриховая линия.

ние может быть объяснено тем, что в рассматриваемом пределе  $n_0$  принимает бесконечно большие значения, т. е. происходит переход к классической ХУ-модели.

Авторы выражают благодарность А.И. Белоусову за ценные обсуждения.

## Список литературы

- [1] В.Ф. Гантмахер, В.М. Теплинский, В.Н. Зверев. Письма в ЖЭТФ **62**, 873 (1995).
- [2] I.E. Dzyaloshinskii, E.M. Lifshitz, L.P. Pitaevskii. Adv. Phys. **10**, 165 (1961).
- [3] P.W. Anderson. In: Lectures in the Many Body Problem, vol. 2 / Ed. by E.R. Caianiello. Academic (1964).
- [4] C. Bruder, R. Fazio et al. Phys. Scr. **T42**, 159 (1992).
- [5] M.P.A. Fisher, G. Grinstein. Phys. Rev. Lett. **60**, 208 (1988); M.P.A. Fisher, P.B. Weichman, G. Grinstein, D.S. Fisher. Phys. Rev. **B40**, 546 (1989); M.P.A. Fisher, G. Grinstein, S.M. Girvin. Phys. Rev. Lett. **64**, 587 (1990).
- [6] A.P. Kampf, G.T. Zimanyi. Phys. Rev. **B47**, 279 (1993).
- [7] А.И. Белоусов, С.А. Верзаков, Ю.Е. Лозовик. ЖЭТФ **114**, 591 (1998).
- [8] А.И. Белоусов, Ю.Е. Лозовик. Письма в ЖЭТФ **66**, 649 (1997).
- [9] W.H. Louisell. Phys. Lett. **7**, 60 (1963); L. Susskind, J. Glogower. Physics **1**, 49 (1964).
- [10] В.Н. Попов. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. Атомиздат, М. (1976).
- [11] S. Doniach. Phys. Rev. **B24**, 5063 (1981).
- [12] J.J. Alvarez, C.A. Balseiro. Solid. State. Commun. **98**, 313 (1996).
- [13] A.V. Otterlo, K.H. Wagenblast. Phys. Rev. Lett. **72**, 3598 (1994); E. Roddick, D. Stroud. Phys. Rev. **B51**, 8672 (1995).