Физика твердого тела, 2000, том 42, вып. 3

Кинетика фазового перехода с сингулярным мультипликативным шумом

© А.И. Олемской, Д.О. Харченко

Сумский государственный университет,
244007 Сумы, Украина

E-mail: Alexander@olem.sumy.ua
dikh@ssu.sumy.ua

(Поступила в Редакцию 5 июля 1999 г.)

Для стохастической системы с амплитудой шума, зависящей от параметра порядка x как $|x|^a$, исследовано поведение наиболее вероятных значений x и амплитуды флуктуаций сопряженной силы p. Показано, что для канонической пары x, p фазовая полуплоскость $x > 0$ разбивается на изолированные области больших, промежуточных и малых значений x. В первой с течением времени $t \to \infty$ траектории сбегаются к значениям $x, p \to \infty$, вероятность их реализации исчезающе мала. В промежуточной области конфигурационная точка стремится к притягивающему центру, отвечающему стационарному упорядоченному состоянию. В области $x \ll 1$ при $0 < a < 1/2$ траектории сбегаются к точке $x = p = 0$, а при $1/2 < a \le 1$ — к $x = 0$, $p \to \infty$. В первом случае вероятность реализации траекторий конечна; во втором она исчезающе мала, и можно говорить о появлении поглощающего состояния.

Влияние флуктуаций на кинетику фазового перехода хорошо исследовано [1,2], однако при этом, как правило, рассматриваются термодинамические системы, в которых состояние термостата не зависит от рассматриваемой подсистемы (гидродинамической моды, праметризующей фазовый переход). Предлагаемая работа посвящена исследованию противоположного случая мультипликативного шума, интенсивность которого зависит от параметра порядка x, определяющего состояние подсистемы. Наиболее популярным примером такого рода является модель Ферхюльста, предложенная для объяснения популяционной кинетики [3]; ее исследование остается актуальным до последнего времени [4]. Другой пример представляет перколяционная модель [5], в рамках которой линейная зависимость от x реализуется не для амплитуды шума, а для ее интенсивности. Мы будем использовать степенную зависимость с произвольным показателем.

Отличительная особенность нашего подхода состоит в том, что будут исследоваться временны́е зависимости не средних, а наиболее вероятных величин. Это достигается на основе полевой схемы, в рамках которой функционал вероятности имеет экспоненциальную форму с показателем, который с точностью до знака сводится к стандартному действию [6]. Поэтому описание фазового перехода с помощью наиболее вероятных значений отвечает использованию принципа наименьшего действия. Мы покажем, что такой подход позволяет распространить метод самосогласованного поля на описание систем с мультипликативным шумом. При этом обнаруживается весьма нетривиальная особенность: в зависимости от пространственного масштаба наиболее вероятные значения могут стремиться как к минимумам свободной энергии, так и к точкам, отвечающим неустойчивым термодинамическим состояниям. Сингулярный характер шума, означающий стремление его интенсивности к нулю при значении параметра порядка $x = 0$, обусловливает появление на фазовом портрете области, в которой все траектории за конечное время сбегаются к оси $x = 0$. Иными словами, появляется поглощающее состояние (absorbing state), в котором происходит запирание системы [7].

Пространственно-временна́я зависимость амплитуды гидродинамической моды $x(\mathbf{r}, t)$ определяется уравнением Ланжевена

$$\dot{x}(\mathbf{r}, t) = -\gamma \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta x(\mathbf{r}, t)} + g(x)\zeta(\mathbf{r}, t), \tag{1}$$

интерпретируемым в смысле Ито. Здесь точка означает дифференцировние по времени t, $\mathbf{r}$ — координата, γ — кинетический коэффициент,

$$\mathcal{F} = \int \left[F(x) + \frac{\beta}{2} |\nabla x|^2 \right] d\mathbf{r}, \tag{2}$$

$F(x)$ — удельный термодинамический потенциал, $\beta > 0$ — постоянная, $\nabla \equiv \partial/\partial \mathbf{r}$; $\zeta(\mathbf{r}, t)$ — стохастическое слагаемое, представляющее белый шум

$$\langle \zeta(\mathbf{r}, t) \rangle = 0, \quad \langle \zeta(\mathbf{r}, t) \zeta(0, 0) \rangle = \gamma T \delta(\mathbf{r}) \delta(t), \tag{3}$$

где угловые скобки означают усреднение, T — температура.[1] Амплитуда мультипликативного шума $g(x)$ в уравнении (1) полагается в простейшем виде

$$g(x) = |x|^a, \tag{4}$$

где a — положительный показатель, величина которого изменяется в интервале от 0 до 1 [8]. Далее удобно

[1] Принятый выбор коэффициента γT в корреляторе (3) позволяет сохранить стандартную форму уравнения Фоккера–Планка, где диффузионное слагаемое входит с множителем $1/2$ (соответственно распределение Гаусса имеет стандартную дисперсию γT). При удвоении коэффициента γT стандартный вид Онсагера приобретает диффузионная составляющая потока вероятности.

перейти к безразмерным величинам, относя координату $\mathbf{r}$ к межатомному расстоянию a, время t к масштабу $a^3/T\gamma$, величину F к T/a^3, флуктуацию ζ к $T\gamma/a^3$. Тогда уравнение (1) записывается в дифференциальной форме следующим образом:

$$dx = (\nabla^2 x + f(x))dt + g(x)dw,$$
$$f \equiv -\partial F/\partial x, \quad dw = \zeta dt, \tag{5}$$

где $f = f(x)$ — сила, сопряженная параметру порядка. Область применимости приближения Гинзбурга–Ландау (2) определяется условием, согласно которому масштаб a намного меньше корреляционной длины $\xi = \beta^{1/2}|\partial^2 F/\partial x^2|_{x=0}^{-1/2}$ [9]. Проводя усреднение выражения (1), в пренебрежении корреляциями получаем уравнение Ландау–Халатникова для параметра порядка $\langle x(\mathbf{r},t)\rangle$.

Перейдем теперь к новому полю $y(\mathbf{r},t)$ связанному с исходным $x(\mathbf{r},t)$ соотношением

$$\frac{dx}{dy} = g(x(y)). \tag{6}$$

В исчислении Ито дифференциалы стохастических полей $x(\mathbf{r},t)$, $y(\mathbf{r},t)$ связаны соотношением

$$dy = \frac{dy}{dx}dx + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}(dx)^2. \tag{7}$$

Подставляя сюда выражение (5), нетрудно видеть, что с учетом (6) новое стохастическое поле удовлетворяет уравнению Ланжевена

$$\dot{y} = \nabla^2 y + g'(\nabla y)^2 + h(x(y)) + \zeta \tag{8}$$

с аддитивным шумом и эффективной силой

$$h \equiv f/g - g'/2. \tag{9}$$

Здесь и далее штрих означает дифференцирование по x.

Найденное уравнение (8) позволяет использовать стандартную полевую схему [6], которая основывается на исследовании производящего функционала. Он представляет функциональное преобразование Лапласа

$$Z\{u(\mathbf{r},t)\} = \int Z\{y(\mathbf{r},t)\}\exp\Big(\int uyd\mathbf{r}dt\Big)Dy(\mathbf{r},t) \tag{10}$$

для статистической суммы

$$Z\{y(\mathbf{r},t)\} = \Big\langle \prod_{(\mathbf{r},t)} \delta\{\dot{y} - \nabla^2 y - g'(\nabla y)^2 - h - \zeta\} \det\left|\frac{\delta\zeta}{\delta y}\right| \Big\rangle_{\zeta}. \tag{11}$$

Здесь аргумент δ-функции сводится к уравнению Ланжевена (8), а детерминант, обеспечивающий переход от континуального интегрирования по $\zeta(\mathbf{r},t)$ к $y(\mathbf{r},t)$, равен в исчислении Ито единице.

В рамках подхода [6] n-кратное варьирование функционала (10) по вспомогательному полю $u(\mathbf{r},t)$ позволяет найти коррелятор n-го порядка для амплитуды гидродинамической моды $y(\mathbf{r},t)$ и построить теорию возмущений. Мы, однако, будем исходить из выражения (11) для сопряженного функционала $Z\{y(\mathbf{r},t)\}$, варьирование которого приводит к наиболее вероятной реализации стохастического поля $y(\mathbf{r},t)$. Очевидно, в приближении среднего поля функционал (11) сводится к зависимости $Z\{\langle y(\mathbf{r},t)\rangle\}$, которая отвечает свободной энергии Ландау $F\{\langle y(\mathbf{r},t)\rangle\} = -T\ln Z\{\langle y(\mathbf{r},t)\rangle\}$ [9].

Переходя к рассмотрению функционала (11), представим δ-функцию в интегральном виде

$$\delta\{y(\mathbf{r},t)\} = \int_{-i\infty}^{i\infty} \exp\left(-\int qyd\mathbf{r}dt\right)Dq. \tag{12}$$

Тогда, проводя усреднение по шуму ζ с помощью гауссова распределения

$$P_0\{\zeta\} \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\int \zeta^2(\mathbf{r},t)d\mathbf{r}dt\right\}, \tag{13}$$

отвечающего (3), с учетом (12) приводим функционал (11) к стандартному виду

$$Z\{y(\mathbf{r},t)\} = \int P\{y(\mathbf{r},t), q(\mathbf{r},t)\}Dq, \quad P \equiv e^{-S}. \tag{14}$$

Здесь распределение вероятности $P\{y,q\}$ задается действием $S = \int Ld\mathbf{r}dt$, где лагранжиан равен

$$L(y,q) = q\left[\dot{y} - \nabla^2 y = g'(\nabla y)^2 - h\right] - q^2/2. \tag{15}$$

Далее используем уравнения Эйлера

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \nabla\frac{\partial L}{\partial \nabla z} + \nabla^2\frac{\partial L}{\partial \nabla^2 z} = \frac{\partial R}{\partial \dot{z}}, \quad z \equiv \{y,q\}, \tag{16}$$

где диссипативная функция есть

$$R(y) = \dot{y}^2/2. \tag{17}$$

В результате уравнения для наиболее вероятных реализаций стохастических полей $y(\mathbf{r},t)$, $q(\mathbf{r},t)$ принимают вид

$$\dot{y} = \nabla^2 y + g'(\nabla y)^2 + h + q, \tag{18}$$

$$\dot{q} = -\nabla^2 q - q(1 + gh') - \left(\nabla^2 y + g'(\nabla y)^2 + h\right) + 2\nabla(g'q\nabla y). \tag{19}$$

Сравнение (18) с совпадающим по виду стохастическим уравнением (8) показывает, что поля $y(\mathbf{r},t)$, $q(\mathbf{r},t)$ представляют наиболее вероятные значения амплитуд вспомогательной гидродинамической моды, определенной равенством (6), и флуктуаций сопряженной силы. Очевидно, величина последней сводится к сопряженному импульсу $q = \partial L/\partial \dot{y}$. Обращает на себя внимание то обстоятельство, что неоднородность поля $y(\mathbf{r},t)$ имеет обычный диссипативный характер, тогда как неоднородность флуктуаций сопряженного импульса q входит с противоположным знаком.

Для возврата к исходному стохастическому полю $x(\mathbf{r}, t)$ воспользуемся связью (6) и определением (9). В результате лагранжиан (15) и диссипативная функция (17) принимают вид

$$L(x, p) = p(\dot{x} - \nabla^2 x - f + gg'/2) - g^2 p^2/2, \qquad (20)$$

$$R(x) = \dot{x}/2g^2, \qquad (21)$$

где использовано определение сопряженного импульса $p = \partial L/\partial \dot{x}$, дающее связь

$$p = q/g. \qquad (22)$$

Тогда уравнения Эйлера (16) принимают вид

$$\dot{x} = \nabla^2 x + f - gg'/2 + g^2 p, \qquad (23)$$

$$\dot{p} = -\nabla^2 p - p[1 + f' - (gg')'/2 + gg'p] - (\nabla^2 x + f)/g^2 + g'/2g. \qquad (24)$$

С точностью до слагаемого $p(g''/g)(\nabla x)^2$ в правой части (24) такие уравнения получаются непосредственно из системы (18), (19) с использованием связей (6), (22) и определения (9) (указанное слагаемое превышает точность модели Гинзбурга–Ландау (2) и может быть отброшено).

Поскольку далее нас интересует только характер временно́й зависимости, то воспользуемся простейшим приближением для градиентных слагаемых

$$\nabla^2 x \to \xi^{-2} x, \quad \nabla^2 p \to \lambda^{-2} p, \qquad (25)$$

где корреляционная длина ξ и параметр λ определяют масштабы пространственных неоднородностей амплитуд гидродинамической моды и флуктуаций силы. Кроме того, используем x^4-модель

$$F(x) = \frac{\varepsilon}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4, \quad \varepsilon \equiv \frac{T - T_c}{T_c} \qquad (26)$$

и определение мультипликативной функции (4). Поскольку лагранжиан (20) не меняет своего вида при одновременном изменении знаков x, p, то фазовые портреты будут обладать центральной симметрией относительно начала координат $x = p = 0$. С другой стороны, согласно (4), ось $x = 0$, на которой интенсивность шума принимает нулевое значение, является сингулярной (см. далее). Поэтому уместно ограничиться исследованием только верхней части фазовой плоскости, отвечающей значению $x > 0$. Тогда уравнения (23), (24) записываются в виде

$$\dot{x} = x\left[(\xi^{-2} - \varepsilon) - x^2\right] - (a/2)x^{2a-1} + x^{2a}p, \qquad (27)$$

$$\dot{p} = p\big\{-\left[(1 + \lambda^{-2}) - \varepsilon\right] + 3x^2 + (a/2)(2a - 1)x^{2(a-1)} - ax^{2a-1}p\big\} - x^{1-2a}\left[(\xi^{-2} - \varepsilon) - x^2\right] + (a/2)x^{-1}. \qquad (28)$$

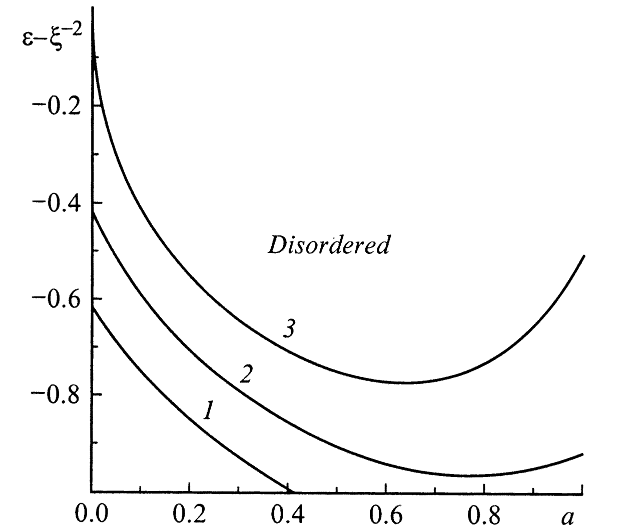

Рис. 1. Зависимость от показателя a безразмерной температуры ε_i, при которой сливаются седло S и узел C. Кривые *1*, *2*, *3* отвечают значениям параметра $\lambda = 0.9; 1.1; \infty$. Кривая *3* соответствует температуре ε_0, при которой происходит бифуркация седла S_0 и узла C.

В стационарном состоянии $\dot{x} = \dot{p} = 0$ имеем

$$p = -(\xi^{-2} - \varepsilon)x^{1-2a} + x^{3-2a} + (a/2)x^{-1}, \qquad (29)$$

$$p\big\{[(\lambda^{-2} - a\xi^{-2}) - (1 - a)\varepsilon] - (3 - a)x^2 + (a(1 - a)/2)x^{2(a-1)}\big\} = 0. \qquad (30)$$

Отсюда следует, что при температурах, превышающих значение T_0, определенное условием (рис. 1)

$$\xi^{-2} - \varepsilon_0 = (a/2)^{\frac{1}{2-a}}(1 - a)^{-\frac{1-a}{2-a}}(2 - a),$$
$$\varepsilon_0 \equiv (T_0 - T_c)/T_c, \qquad (31)$$

вид фазового портрета характеризуется наличием единственной седловой точки S, положение которой задается корнем сомножителя, стоящего в (30) при амплитуде флуктуаций $p \neq 0$. Как видно из рис. 2, при температуре T_0 происходит бифуркация в точке, определенной координатами

$$p_0 = 0, \quad x_0 = [a(1 - a)/2]^{\frac{1}{2(2-a)}}. \qquad (32)$$

При этом появляются дополнительное седло S_0 и притягивающий узел C, положения которых, определенные условием $p = 0$, задаются координатами $x_\mp$. С дальнейшим охлаждением системы седло S и узел C сливаются в точке

$$p_i = 0, \quad x_i^2 = \frac{1 - a}{2 - a}(\xi^{-2} - \varepsilon) + \frac{\lambda^{-2} - \xi^{-2}}{2(2 - a)}, \qquad (33)$$

отвечающей температуре инверсии T_i, задаваемой условием

$$\xi^{-2} - \varepsilon_i = x_i^2 + (a/2)x_i^{2(a-1)}, \quad \varepsilon_i \equiv (T_i - T_c)/T_c. \qquad (34)$$

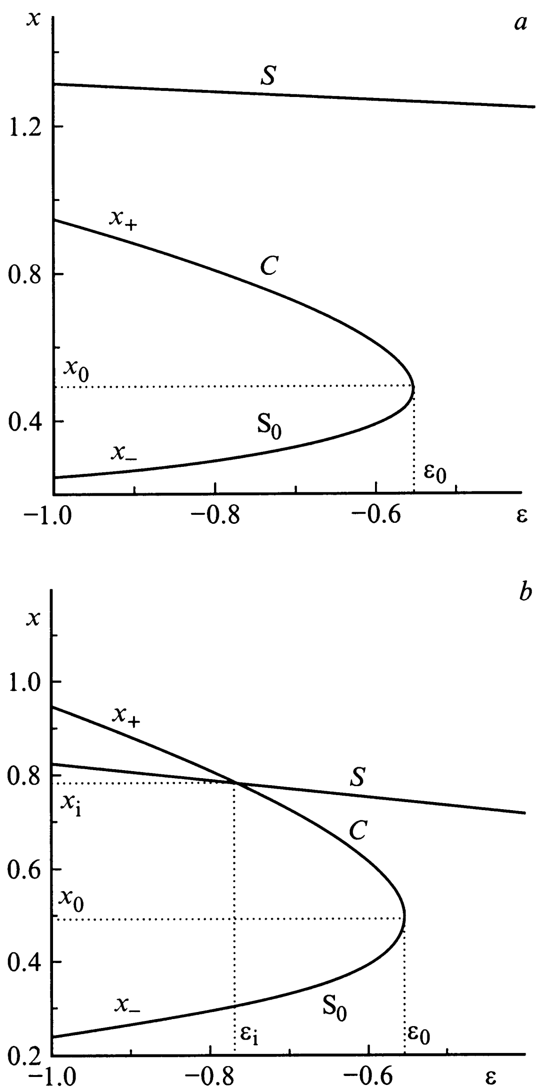

Рис. 2. Температурная зависимость стационарных значений параметра порядка при $a = 0.2$ и $\lambda = 0.5$ (a), $\lambda = 1.1$ (b).

При $T < T_i$ точка S, определяемая корнем второго сомножителя в (30), становится притягивающим узлом, а точка C, лежащая на оси $p = 0$, трансформируется в седло. Как видно из рис. 2, указанная инверсия имеет место только при условии, что масштаб λ изменения амплитуды флуктуации превышает критическое значение λ_c, величина которого определяется равенствами (33), (34) при условии $\varepsilon_i = -1$. Зависимость величины λ_c от показателя a приведена на рис. 3. При $a = 0$ и 1 получаем соответственно $\lambda_c = (2 + 3\xi^{-2})^{-1/2}$ и $(1 + 3\xi^{-2})^{-1/2}$.

Проведенное рассмотрение показывает, что в системах с $\lambda > \lambda_c$ при температурах $T < T_i$ стационарное состояние системы отвечает точке S, координаты которой определяются равенствами

$$p = -f/g^2 + g'/2g - g^{-2}\nabla^2 x, \tag{35а}$$

$$f' = -p^{-1}\nabla^2 p - gg'p + (gg')'/2. \tag{35б}$$

Их смысл устанавливается, если перейти к аддитивному пределу $g(x) \to 1$: условие (35) означает, что для однородных систем наиболее вероятное значение p амплитуды флуктуаций сопряженной силы противоположно по знаку величине силы f; согласно (35б), при этом восприимчивость $(F'')^{-1} = -1/f'$ принимает бесконечное значение. Таким образом, узел S отвечает стационарному состоянию термодинамической системы, неустойчивой относительно перехода в упорядоченную фазу. При этом фазовый портрет имеет вид, показанный на рис. 4, a.

При температурах $T > T_i$ реализуется стационарное состояние в точке C с координатами

$$p = \nabla p = \nabla x = 0, \tag{36а}$$

$$f = gg'/2. \tag{36б}$$

В аддитивном пределе эта точка отвечает однородному состоянию термодинамического равновесия ($f = 0$). Как видно из рис. 4, соответствующий фазовый портрет может быть получен не только при повышении температуры (рис. 4, b), но и за счет уменьшения масштаба неоднородности λ (рис. 4, c), а также при увеличении показателя a мультипликативной функции (рис. 4, d).

Разумеется, в процессе своей эволюции реальная термодинамическая система стремится к равновесному (36), а не к неустойчивому (35) состоянию. Поскольку первое отвечает малым значениям параметра неоднородности λ, а второе большим, то можно заключить, что в равновесном состоянии распределение флуктуаций сопряженного поля $p(\mathbf{r})$ является сильно неоднородным. При этом фазовые портреты имеют вид, показанный на рис. 4, b–d. В сравнении с рис. 4, a их характерная особенность состоит в том, что притягивающий узел располагается на оси $p = 0$. Общий вид фазовых портретов, приведенных на рис. 4, характеризуется наличием

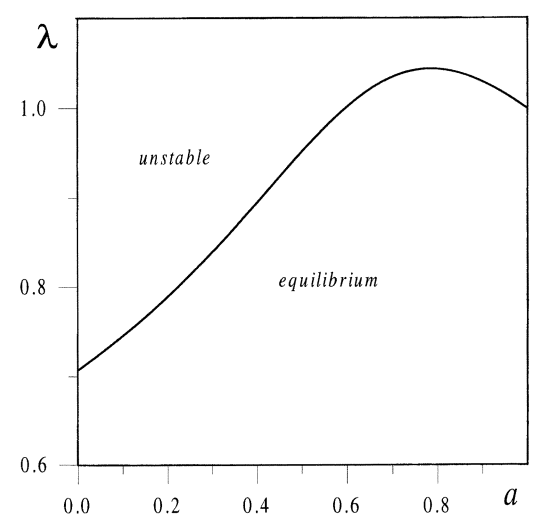

Рис. 3. Фазовая диаграмма, показывающая области значений параметра неоднородности λ и показателя a, при которых реализуются неустойчивое и равновесное термодинамические состояния.

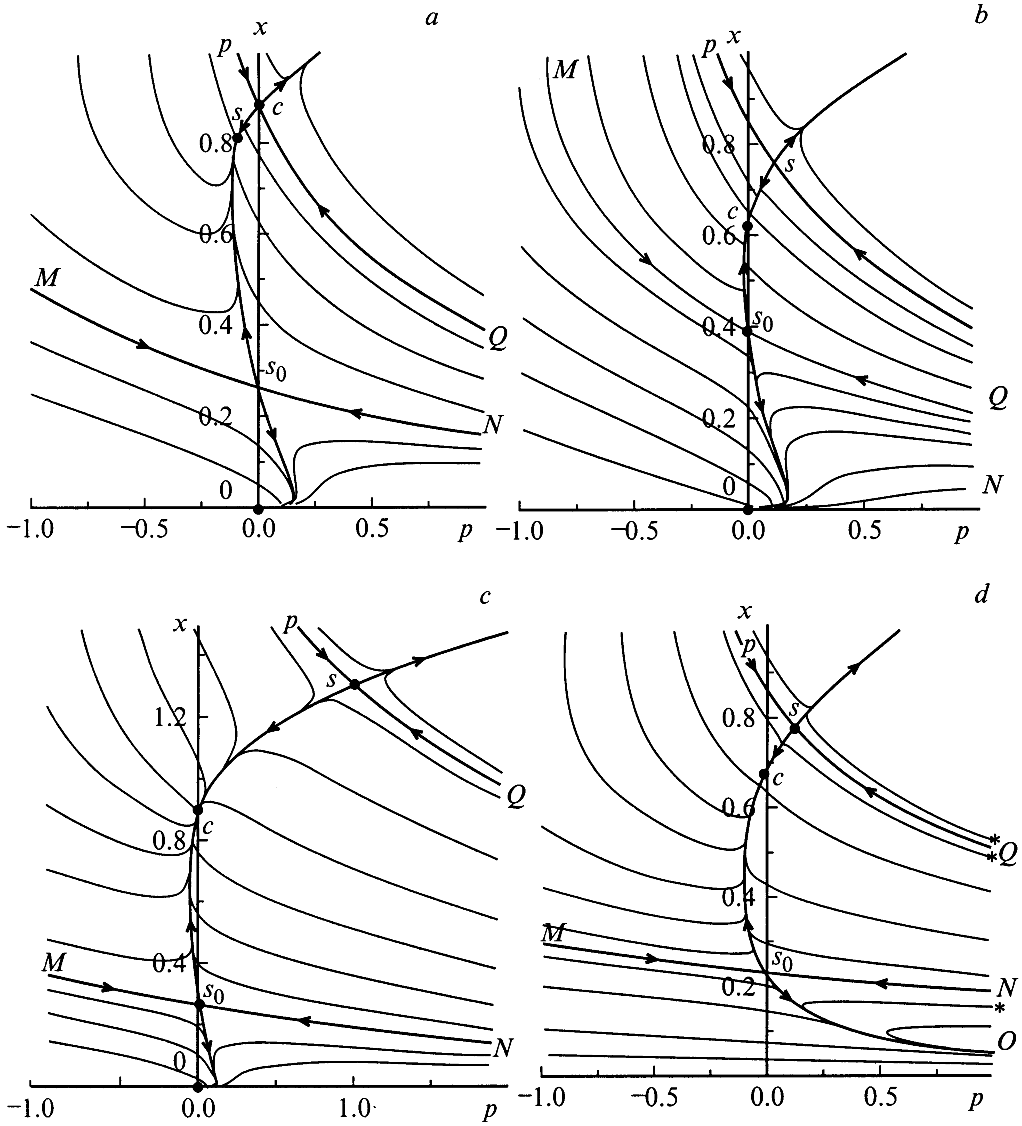

Рис. 4. Основные типы фазовых портретов в упорядоченном состоянии: a — $\varepsilon = -0.9$, $\lambda = 1$, $a = 0.2$; b — $\varepsilon = -0.6$; c — $\lambda = 0.5$; d — $a = 0.7$ (для рисунков b, c, d указаны только параметры, значения которых изменены в сравнении с рисунком a). Обозначения стационарных точек те же, что и на рис. 2.

двух сепаратрис с ветвями PQ и MS_0N. Они разбивают фазовую плоскость на три изолированные области, которые отвечают большим, промежуточным и малым значениям параметра порядка x. Первая из указанных областей характеризуется бесконечным возрастанием величин x, p с течением времени $t \to \infty$. Далее будет показано, что в действительности она не реализуется. Наиболее актуальной является область промежуточных значений x, в которой со временем система попадает в стационарное упорядоченное состояние. Именно эта область определяет кинетику фазового перехода. Появление области, отвечающей значениям $x \ll 1$, обусловлено мультипликативным характером шума. Здесь с ростом времени параметр порядка $x(t)$ стремится к значению $x = 0$.

Исследуем поведение системы в каждой из указанных областей. С этой целью рассмотрим вероятность реализации фазовой траектории, отвечающей различным начальным значениям $x_0 \equiv x(t = 0)$. Согласно (14), она представляется в виде

$$P(x_0) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0} g^2p^2dt\right\}, \qquad (37)$$

где учтены выражения (20), (23), интегрирование проводится вдоль соответствующей траектории. Получающаяся зависимость $P(x_0)$ для показателя $a < 1/2$ приведена на рис. 5, a. Помимо тривиального возрастания вероятности (37) с приближением к началу координат при значениях x_0, отвечающих сепаратрисам, наблюдаются скачки, вблизи которых $P(x_0)$ может незначительно увеличиваться. Вне области, ограниченной (внешней) сепаратрисой, имеем $P = 0$, поскольку здесь $x(t)$, $p(t) \to \pm\infty$ при $t \to \infty$.

Указанное поведение вероятности $P(x_0)$ объясняется характером временны́х зависимостей $x(t), p(t)$ параметра порядка и амплитуды флуктуаций в процессе релаксации начального значения (рис. 6). Вдали от участка S_0CS (рис. 4, d) величины p, x быстро меняют свои значения, а с приближением к нему происходит замедление. Такое поведение объясняется тем, что вблизи указанного участка действие $S\{x(\mathbf{r}, t), p(\mathbf{r}, t)\}$ изменяется намного медленнее, чем вдали от него. Наглядно это можно представить, ассоциируя участок S_0CS с руслом большой реки [10].

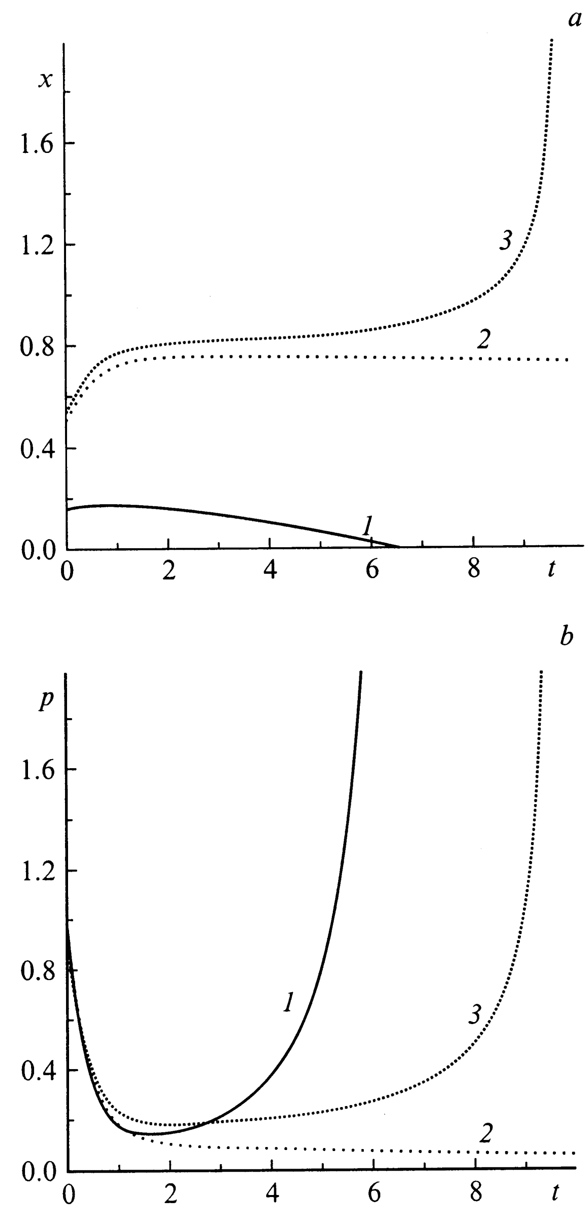

Рис. 6. Типичный вид временны́х зависимостей параметра порядка (a) и сопряженного импульса (b) при значениях параметров $\varepsilon = -0.9$, $\lambda = 1$, $a = 0.7$, отвечающих рис. 4, d. Кривые *1*, *2*, *3* выбраны в областях малых, промежуточных и больших значений x. Начальные положения конфигурационной точки помечены звездочкой на рис. 4, d.

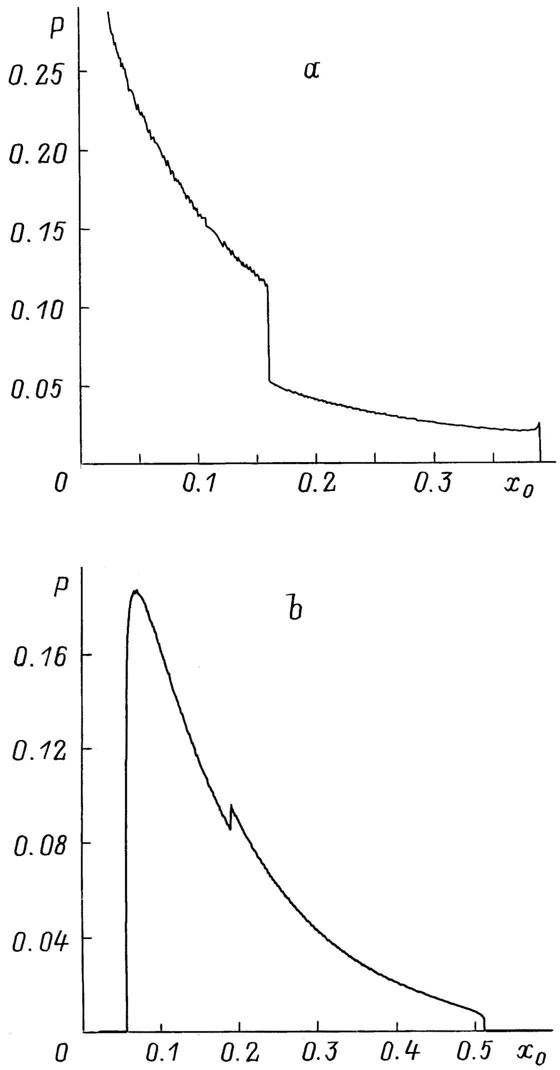

Рис. 5. Зависимость вероятности реализации различных траекторий P от начального значения параметра порядка x_0 при $\varepsilon = -0.9$, $\lambda = 1$ и a — $a = 0.2$; b — $a = 0.7$. Случай (a) отвечает фазовому портрету на рис. 4, a, случай (b) — на рис. 4, d. Начальное значение сопряженного импульса $p_0 = 1$.

При значениях показателя $a > 1/2$ подинтегральная функция в выражении (37) расходится и вероятность P принимает нулевые значения при $x_0 \ll 1$ (рис. 5, b). Характерно, что указанная расходимость наблюдается только в области фазового портрета, ограниченной ветвью сепаратрисы S_0O на рис. 4, d.

Для объяснения вида зависимости $P(x_0)$ исследуем поведение величин $x(t), p(t)$ при различных значениях показателя a. С этой целью положим в уравнении (28) $\dot{p} = 0$. Получающееся в результате квадратное уравнение дает стационарные значения сопряженного импульса с пределе $x \to 0$

$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - a\right)^{-1} x^{1-2a}, \quad a < \frac{1}{2}; \qquad (38а)$$

$$p = \left(a - \frac{1}{2}\right) x^{-1}, \quad a > \frac{1}{2}. \qquad (38б)$$

Таким образом, при $a < 1/2$ система стремится с течением времени к началу координат $x = p = 0$, а с превышением критического значения $a = 1/2$ притягивающий узел скачком перемещается на бесконечность $(p \to \infty, x = 0)$. Соответствующая подинтегральная функция в распределении (37)

$$g^2p^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - a\right)^{-2} x^{2(1-a)}, \quad a < \frac{1}{2}; \qquad (39а)$$

$$g^2p^2 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 x^{-2(1-a)}, \quad a > \frac{1}{2} \qquad (39б)$$

характеризуется инверсией знака показателя при переходе через критическое значение $a = 1/2$. Подставляя (38а) в уравнение движения (27) и удерживая в нем лидирующие члены, при $a < 1/2$ получаем уравнение $2\dot{x} = -ax^{2a-1}$, которое дает временну́ю зависимость параметра порядка

$$x^{2(1-a)} = a(1-a)(t_0 - t), \quad t < t_0, \quad a < 1/2, \qquad (40)$$

где t_0 — константа интегрирования, определяющая время, в течение которого точка попадает на ось $x = 0$. Подстановка зависимости (40) в (39а), а результата в интеграл (37) показывает, что при $a < 1/2$ вероятность $P(x_0)$ реализации траектории в области фазового портрета $x \ll 1$ отлична от нуля (рис. 5, a).

Совершенно иная ситуация наблюдается при показателе $a > 1/2$. В этом случае уравнение (27) сводится к виду $2\dot{x} = -(1-a)x^{2a-1}$, что дает (40), где множитель $a(1-a)$ заменен на $(1-a)^2$. Однако согласно (39), при $a > 1/2$ выражение g^2p^2 приобретает показатель с противоположным знаком, так что при $t \to t_0$ оно принимает бесконечное значение. В результате вероятность (37) становится исчезающе малой (рис. 5, b). Физическая причина такого поведения состоит в том, что за конечный промежуток времени $t_0 < \infty$ система попадает на ось $x = 0$, что обеспечивает бесконечное значение сопряженного импульса $p \propto x^{-1} \propto (t_0 - t)^{-1/2(1-a)}$. Наглядно это можно представить как выпадение конденсата (absorbing state) конфигурационных точек из области фазового портрета $x \ll 1$ на ось обсцисс при $p \to \infty$. Укажем, что условие $t_0 < \infty$ выполняется только ниже ветви сепаратрисы S_0O на рис. 4, d, а в области NS_0O имеем $t_0 = \infty$, и расходимость подинтегрального выражения в (37) не проявляется. Поэтому равенство $P = 0$ выполняется только ниже линии S_0O (рис. 5, b, 4, d).

Согласно (40), временна́я зависимость параметра порядка $x(t)$ задается показателем

$$D = 2(1-a), \qquad (41)$$

величина которого определяет фрактальную размерность, характеризующую фазовый портрет системы с мультипликативным шумом [11]. В аддитивном пределе $a = 0$ выражение (41) дает, как и следовало ожидать, размерность $D = 2$ фазовой плоскости. Это означает, что с течением времени $t \to \infty$ фазовые траектории системы заполняют всю эту плоскость. Рост показателя $a > 0$ приводит к уменьшению фрактальной размерности D, которая при $a = 1/2$ принимает критическое значение $D = 1$. С дальнейшим увеличением a фрактальная размерность множества точек на плоскости $x-t$, которое представляет закон движения $x(t)$, становится меньше единицы. Физической причиной такого поведения является указанное выше поглощение конфигурационных точек осью $x = 0$ при $p \to \infty$.

Список литературы

[1] C. Domb. The critical point. Taylor & Francis, London (1996). 376 p.
[2] A.J. Bray. Adv. Phys. **43**, 357 (1994).
[3] В. Хорстхемке, Р. Лефевр. Индуцированные шумом переходы. Мир, М. (1990). 399 с.
[4] О.В. Геращенко, С.Л. Гинзбург, М.А. Пустовойт. Письма в ЖЭТФ **67**, 945 (1998).
[5] M.A Munoz. Phys. Rev. **E57**, 1377 (1998).
[6] J. Zinn-Justin. Quantum Field Theory and Critical Phenomena. Clarendon Press, Oxford (1994). 996 p.
[7] R. Dickman. In: Nonequilibrium Statistical Mechanics in One Dimension / Ed. by V. Privman. Cambridge University Press, Cambridge (1997).
[8] А.И. Олемской. УФН **168**, 287 (1998).
[9] Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. Статистическая физика. Ч. 2. Наука, М. (1978). 488 с.
[10] А.И. Олемской, А.В. Хоменко. ЖЭТФ **110**, 2144 (1996).
[11] A.I. Olemskoi. Phys. Rev. **18**, Part 1, 1 (1996).