

# Нелинейные волны в металлах третьей группы

© В.Г. Скобов, А.С. Чернов

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук,  
194021 Санкт-Петербург, Россия

(Поступила в Редакцию 17 сентября 1999 г.)

Теоретически изучено влияние нелинейности на проникновение радиоволн через металлы третьей группы. Показано, что захват дырок магнитным полем волны большой амплитуды приводит к подавлению бесстолкновительного циклотронного поглощения, в результате чего в металле становится возможным распространение нелинейной волны.

Настоящая работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-02-18393).

Распространение радиоволн в металлах третьей группы, алюминии и индии, в линейном режиме теоретически и экспериментально изучалось в работах [1–5]. Было показано, что помимо геликонной волны, поле которой вращается в ту же сторону, что и дырки в магнитном поле, в этих металлах существуют доплеронные моды, обусловленные доплер-сдвинутым циклотронным резонансом (ДСЦР) дырок. При этом поле этих мод вращается в противоположную сторону, а область существования по магнитному полю находится ниже области существования геликона. В настоящей работе будут рассмотрены новые эффекты, которые возникают в этих металлах при больших амплитудах возбуждающего радиочастотного поля. Дело в том, что магнитное поле большой амплитуды "захватывает" дырки, ответственные за циклотронное поглощение, что приводит к его существенному уменьшению. Вследствие этого бесстолкновительное затухание доплерона уменьшается, а в области магнитных полей, много меньших порогового поля геликона, становится возможным распространение новой волны, которая не может существовать в линейном режиме. Для определенности рассмотрим распространение радиоволн в алюминии. В индии должны иметь место аналогичные эффекты.

## 1. Модель поверхности Ферми и нелокальная проводимость

Рассмотрим распространение радиоволны в алюминии в геометрии, когда постоянное магнитное поле  $\mathbf{H}$  и вектор распространения волны  $\mathbf{k}$  направлены вдоль оси четвертого порядка ( $\mathbf{H} \parallel \mathbf{k} \parallel [100] \parallel z$ ). Зависимость нелокальной проводимости от  $k$  и  $H$  и ее особенности определяются видом функции  $\partial S / \partial p_z$ , где  $S$  — площадь сечения поверхности Ферми плоскостью  $p_z = \text{const}$ ,  $p_z$  — составляющая импульса дырки вдоль вектора  $\mathbf{H}$ . Согласно расчетам Ларсена и Грейзена [2], отличительной особенностью поверхности Ферми алюминия является то, что в рассматриваемой геометрии график производной  $\partial S / \partial p_z$  имеет два максимума одинаковой высоты и минимум, причем значение этой функции в максимумах примерно на 10% больше, чем в минимуме.

Мы проведем рассмотрение для модельной поверхности Ферми, для которой функция  $\partial S / \partial p_z$  имеет вид

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial S}{\partial p_z} = -p y(p_z) \text{sign } p_z, \quad (1)$$

$$y(p_z) = (1 + 2\beta) \sin \frac{\pi p_z}{2p_1}, \quad |p_z| \leq p_1, \quad (2)$$

$$y(p_z) = 1 + \beta \left( 1 + \cos \left( \pi \frac{|p_z| - p_1}{p_2} \right) \right), \quad p_1 \leq |p_z| \leq (p_1 + p_2), \quad (3)$$

где  $\beta$  — безразмерная константа, а  $p$ ,  $p_1$ ,  $p_2$  — параметры размерности импульса. При  $(p_1 + p_2) \leq |p_z| \leq 2(p_1 + p_2)$  функцию  $y$  нужно продолжить симметрично относительно точки  $p_z = p_1 + p_2$ . График функции  $y(p_z)$  при  $\beta = 0.05$  и  $p_2 = 2p_1 = 0.35\hbar \text{ \AA}^{-1}$  изображен на рис. 1. То обстоятельство, что он симметричен относительно минимума, значительно упрощает вычисление нелокальной проводимости. Левая часть графика  $y(p_z)$  похожа на соответствующую часть расчетной кривой Ларсена и Грейзена. Отличие же правых частей несущественно, поскольку большинство дырок находится в области  $|p_z| \leq (p_1 + p_2)$ . Параметр  $p$  следует взять таким, чтобы период доплеронных осцилляций совпадал с экспериментально наблюдаемым. Это будет иметь место при  $p = 1\hbar \text{ \AA}^{-1}$ .

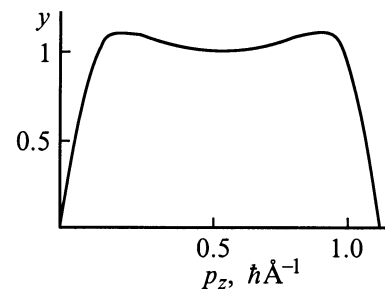


Рис. 1. График функции  $y(p_z)$  при  $\beta = 0.05$  и  $p_2 = 2p_1 = 0.35\hbar \text{ \AA}^{-1}$ .

Хотя ферми-поверхность алюминия имеет симметрию четвертого порядка, мы рассмотрим модель, в которой она аксиально симметрична. Отсутствие аксиальной симметрии приводит к тому, что ДСЦР имеет не только фундаментальную гармонику, но и нечетные кратные гармоники, наличие которых обуславливает существование соответствующих доплеронных мод [5]. В нашей модели кратные гармоники и кратные доплероны отсутствуют. В реальном алюминии относительные изменения импеданса, связанные с существованием кратных доплеронов, составляют малые доли процента. Изучаемый же в настоящей работе нелинейный эффект приводит к изменениям импеданса порядка единицы. Поэтому мы не будем учитывать существования кратных доплеронов и ограничимся рассмотрением аксиально-симметричной ферми-поверхности, что сильно упрощает вычисления.

В случае, когда векторы  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{H}$  направлены вдоль оси аксиально-симметричной поверхности Ферми, нелокальная проводимость дается выражением (см., например, [6])

$$\sigma_{\pm}(k, H) = \sigma_{xx} \pm i\sigma_{yx} = \frac{ec}{H} \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \times \int \frac{S(p_z) dp_z}{\gamma + i[\pm 1 + ku(p_z)/2\pi]}, \quad (4)$$

$$u(p_z) = -\frac{c}{eH} \frac{\partial S}{\partial p_z} = 2\pi \frac{cp}{eH} y(p_z), \quad (5)$$

где

$$\gamma = \frac{\nu}{\omega_c}, \quad \omega_c = \frac{eH}{cm}, \quad (6)$$

$e$  — абсолютная величина заряда электрона,  $c$  — скорость света,  $m$  и  $\omega_c$  — циклотронная масса и циклотронная частота дырок соответственно,  $\nu$  — их частота столкновений с рассеивателями,  $u(p_z)$  — смещение частицы с продольной составляющей импульса  $p_z$  за циклотронный период.

В настоящей работе будет рассматриваться случай сильного магнитного поля, когда циклотронная частота дырок  $\omega_c$  много больше частоты столкновений  $\nu$ , так что  $\gamma \ll 1$ .

В нашей модели функция  $\partial S/\partial p_z$  и, следовательно, выражения в знаменателе под знаком интеграла в (4) симметричны относительно точки  $|p_z| = (p_1 + p_2)$ . Поэтому функцию  $S(p_z)$ , стоящую в числителе (4), удобно представить в виде

$$S(p_z) = S_0 + U(p_z), \quad (7)$$

где  $S_0$  — значение площади сечения в точке  $|p_z| = (p_1 + p_2)$ , а  $U(p_z)$  — функция, антисимметричная относительно этой точки. Очевидно, что интеграл, содержащий  $U$ , равен нулю и, следовательно, выражение

для проводимости принимает вид

$$\sigma_{\pm} = \frac{Nec}{H} \frac{1}{2(p_1 + p_2)} \int_0^{p_1+p_2} dp_z \times \left\{ \frac{1}{\gamma + i[\pm 1 - qy(p_z)]} + \frac{1}{\gamma + i[\pm 1 + qy(p_z)]} \right\}, \quad (8)$$

где

$$q = \frac{kc p}{eH}, \quad N = \frac{(p_1 + p_2)S_0}{(\pi\hbar)^3}, \quad (9)$$

$N$  — концентрация дырок. Подставляя (2)–(3) в (8) и интегрируя по  $p_z$ , получаем следующую формулу для проводимости:

$$\sigma_{\pm} = -i \frac{Nec}{H} s_{\pm}(q), \quad (10)$$

$$s_{\pm}(q) = \pm \frac{1}{3\sqrt{I_{\pm}^2 - \alpha^2 q^2}} \pm \frac{1}{3\sqrt{(I_{\pm} - \alpha q)(I_{\pm} - q)}} \pm \frac{1}{3\sqrt{(I_{\pm} + \alpha q)(I_{\pm} + q)}}, \quad |q| < \alpha^{-1}, \quad (11)$$

$$s_{\pm}(q) = \frac{i}{3\sqrt{\alpha^2 q^2 - I_{\pm}^2}} + \frac{i}{3\sqrt{(\alpha q - I_{\pm})(I_{\pm} - q)}} \pm \frac{1}{3\sqrt{(I_{\pm} + \alpha q)(I_{\pm} + q)}}, \quad \alpha^{-1} < q < 1, \quad (12)$$

$$s_{\pm}(q) = \frac{i}{3\sqrt{\alpha^2 q^2 - I_{\pm}^2}} \mp \frac{1}{3\sqrt{(\alpha q - I_{\pm})(q - I_{\pm})}} \pm \frac{1}{3\sqrt{(I_{\pm} + \alpha q)(I_{\pm} + q)}}, \quad q > 1, \quad (13)$$

где  $\alpha = 1 + 2\beta$ ,  $I_{\pm} = \mp 1 + i\gamma$ .

В локальном пределе при  $q \rightarrow 0$  функция  $s_{\pm} \rightarrow \pm 1$ , а в пределе  $q \gg 1$

$$s_{\pm}(q) \simeq \frac{1}{\alpha(p_1 + p_2)} \left[ i \frac{p_1}{|q|} \mp \frac{(1 + \alpha)p_2}{2\sqrt{\alpha}q^2} \right]. \quad (14)$$

## 2. Дисперсионное уравнение и свойства мод в линейном режиме

Свойства радиоволн в металле определяются решениями дисперсионного уравнения  $k^2 c^2 = 4\pi i \omega \sigma_{\pm}$ , которое удобно записать в виде

$$\Phi_{\pm}(q) = \xi, \quad (15)$$

$$\Phi_{\pm}(q) = \frac{s_{\pm}(q)}{q^2}, \quad (16)$$

$$\xi = \frac{4\pi\omega N c p^2}{eH^3}. \quad (17)$$

Характер решений уравнения (15) можно исследовать, рассмотрев поведение функций  $\Phi_{\pm}$ . Мнимые части функций  $\Phi_{+}(q)$  и  $\Phi_{-}(q)$  совпадают, а их вещественные части отличаются только знаком. В пределе  $\gamma \rightarrow 0$  графики функций  $\Phi'_{+} = \text{Re } \Phi_{+}$  и  $\Phi''_{+} = \text{Im } \Phi_{+}$  в области  $q < 1$ , где  $\Phi'_{+} > 0$ , приведены на рис. 2. При  $q \ll 1$  функция  $\Phi_{+} \simeq 1/q^2$ . Эта ветвь дисперсионной кривой соответствует геликону, поле которого вращается в ту же сторону, что и дырки. При некотором значении  $q$ , меньшем  $1/\alpha$ , функция  $\Phi'_{+}$  достигает минимума и при  $q \rightarrow 1/\alpha$  стремится к бесконечности. Это означает, что выше порога геликона существует ДСЦР-мода, обусловленная резонансом дырок с максимальным смещением за циклотронный период. Эта мода практически ненаблюдается, поскольку она существует в той же поляризации и в той же области полей, что и геликон, но имеет меньшую амплитуду.

В области  $\alpha^{-1} < q < 1$  функция  $\Phi_{-}$  имеет большую мнимую часть, обусловленную сильным циклотронным поглощением волны дырками, для которых  $\partial S/\partial p_z$  находится в интервале от  $2\pi p$  до  $2\pi p\alpha$ . Это поглощение приводит к тому, что в указанном интервале распространяющиеся моды отсутствуют.

Графики функций  $\Phi'_{-} = \text{Re } \Phi_{-}$  и  $\Phi''_{-} = \text{Im } \Phi_{-}$  в области  $q > 1$ , где  $\Phi'_{-} > 0$ , приведены на рис. 3. В этой области функция  $\Phi'_{-}$  монотонно уменьшается и асимптотически стремится к нулю при  $q \rightarrow \infty$ . В области сильных магнитных полей, где  $\xi \ll 1$ , значение

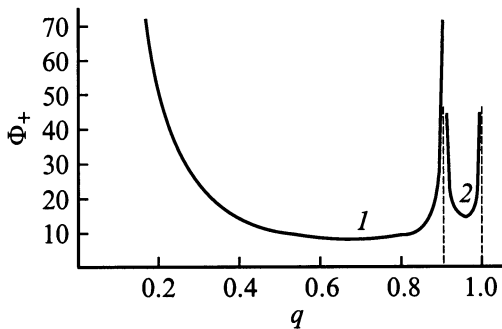


Рис. 2. Графики вещественной (1) и мнимой (2) частей функции  $\Phi_{+}$ .

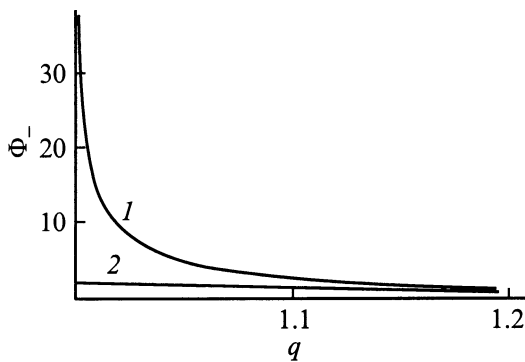


Рис. 3. Графики функций  $\Phi'_{-}(q)$  (1) и  $\Phi''_{-}(q)$  (2) в области  $q > 1$ .

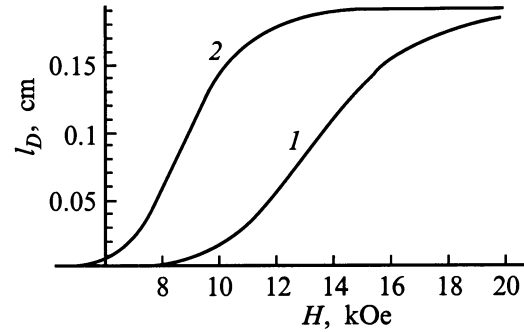


Рис. 4. Зависимость длины затухания доплерона  $l_D$  от  $H$  в линейном (1) и нелинейном (2) режимах.

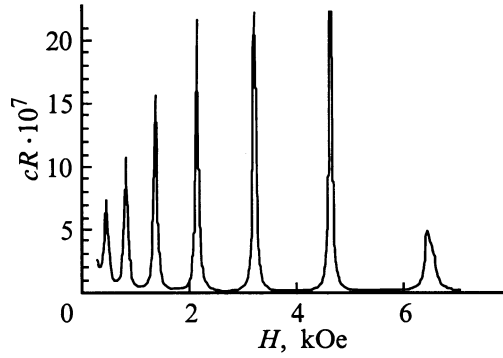
$q$  близко к 1 и величина  $\Phi'_1 \gg \Phi''_1$ . Это означает, что в соответствующей области магнитных полей имеется распространяющаяся мода, обусловленная ДСЦР дырок с минимальным смещением за циклотронный период. Поле этого доплерона вращается в направлении, противоположном направлению вращения дырок (поляризация минус), а его затухание обусловлено как столкновениями, так и бесстолкновительным циклотронным поглощением. Соответствующее решение дисперсионного уравнения имеет вид

$$k \equiv k' + ik'' \simeq \frac{eH}{cp} \left[ 1 + \frac{\xi^2}{4(\alpha - 1)} \right] + i \left[ \frac{\nu m}{p} + \frac{\xi^3}{2(\alpha - 1)\sqrt{\alpha^2 - 1}} \frac{eH}{cp} \right]. \quad (18)$$

В области сильных магнитных полей ( $\xi \ll 1$ ) кривая  $k'(H)$  асимптотически приближается к прямой  $k_0(H) = eH/pc$ , которая соответствует ДСЦР дырок с минимальным смещением ( $q = 1$ ). Затухание доплерона в этой области обусловлено столкновениями и практически не зависит от  $H$ :  $k'' = m\nu/p$ . При уменьшении  $H$  кривые  $k'(H)$  и  $k''(H)$  отклоняются от соответствующих асимптотических прямых в сторону больших значений. В этой области  $H$  затухание доплерона обусловлено бесстолкновительным циклотронным поглощением. Зависимость длины затухания доплерона  $l_D = 1/k''$  от магнитного поля  $H$  изображена на рис. 4 (кривая 1). Расчет выполнен для частоты  $\omega/2\pi = 100$  kHz, концентрации  $N = 6 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ , массы  $m = 1.3 \cdot 10^{-27} \text{ г}$  и частоты столкновений  $\nu = 4 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$ . Видно, что в слабых магнитных полях доплерон становится сильно затухающим.

### 3. Нелинейная волна и осцилляции импеданса пластины

Рассмотрим теперь распространение волны большой амплитуды. Как было показано в [7], магнитное поле такой волны "захватывает" дырки с  $p_z = p_{z0}$ , удовле-



**Рис. 5.** Зависимость поверхностного сопротивления пластины алюминия  $R_-$  от  $H$  в нелинейном режиме.

творяющие условию

$$u(p_{z0}) = 2\pi/k, \quad (19)$$

которые обуславливают циклотронное поглощение. Продольная скорость этих дырок модулируется с частотой

$$\omega_0 \sim \omega_c \sqrt{\frac{H_a}{H}}, \quad (20)$$

где  $H_a$  — амплитуда магнитного поля волны в металле. В нелинейном режиме, когда частота колебаний захваченных дырок  $\omega_0$  становится много больше частоты столкновений  $\nu$ , циклотронное поглощение уменьшается в меру малости отношения  $\nu/\omega_0$ . Это означает, что первое слагаемое в выражении (13) для  $s_-$ , связанное с циклотронным поглощением, нужно умножить на  $\nu/\omega_0$ . Результаты расчета длины затухания доплерона для приведенных выше значений параметров и  $H_a = 100$  Oe изображаются кривой 2 на рис. 4. Видно, что захват дырок в нелинейном режиме приводит к существенному увеличению длины затухания доплерона.

Еще более драматическим оказывается нелинейный эффект в области слабых магнитных полей  $\xi \gg 1$ , в которой в линейном режиме распространяющиеся моды отсутствуют. В случае сильной нелинейности, когда  $\nu/\omega_0 \ll 1$ , выражение (14) для  $s_-$  следует заменить на

$$s_-^{(n)} \simeq \frac{1}{\alpha(p_1 + p_2)} \left[ i \frac{p_1}{|q|} \frac{\nu}{\omega_0} + \frac{(1 + \alpha)p_2}{2\sqrt{\alpha}q^2} \right]. \quad (21)$$

Если отношение  $\nu/\omega_0$  достаточно мало, то мнимое слагаемое в (21) становится малым по сравнению с вещественным, т.е. происходит нелинейное "просветление" металла по отношению к радиоволне. Подставляя (21) в дисперсионное уравнение (15), представим его решения в виде:

$$q_1 \simeq (\eta\xi)^{1/4} \left[ 1 + i\mu \frac{\nu}{\omega_0} (\eta\xi)^{1/4} \right], \quad q_2 \simeq i(\eta\xi)^{1/4}, \quad (22)$$

где

$$\eta = \frac{(1 + \alpha)p_2}{2\alpha^{3/2}(p_1 + p_2)}, \quad \mu = \frac{p_1}{8\sqrt{\alpha}(1 + \alpha)p_2}. \quad (23)$$

Корень  $q_2$  относится к затухающей компоненте поля, а корень  $q_1$  — к новой нелинейной волне, которая не имеет аналогов в линейном режиме.

В заключение рассмотрим поверхностный импеданс пластины алюминия при антисимметричном по электрическому полю возбуждении. Формула для импеданса в случае, когда отражение носителей от поверхности образца является диффузным, а поле в нем представляет суперпозицию двух экспоненциальных компонент, приведена в [6] (формула (3.11)). В рассматриваемом нами случае  $\xi \gg 1$  эта формула переходит в выражение

$$Z_- \simeq \frac{4\pi\omega}{c^2} \left( \frac{1}{k_1} \frac{1 - \exp(ik_1 d)}{1 + \exp(ik_1 d)} + \frac{1}{k_2} \right), \quad (24)$$

где

$$k_1 \equiv k'_1 + ik''_1 = \frac{eH}{cp_0} q_1(H), \quad k_2 = ik'_1, \quad (25)$$

$d$  — толщина пластины. Первое слагаемое в (24) обусловлено возбуждением нелинейной волны в пластине, а второе — возбуждением затухающей компоненты.

Результаты расчета поверхностного сопротивления пластины  $R_- = \text{Re} Z_-$  для принятых выше значений параметров  $d = 1$  mm и  $\omega/2\pi = 100$  kHz изображены на рис. 5. Пики сопротивления расположены при тех значениях  $H$ , при которых на толщине пластины укладывается нечетное число полувольт:  $k'_1(H)d = \pi(2n + 1)$ , где  $n$  — целое. Отметим, что в линейном режиме зависимость  $R_-(H)$  в рассматриваемой области магнитных полей не имеет никаких осцилляций.

## Список литературы

- [1] И.П. Крылов. ЖЭТФ **54**, 1738 (1968).
- [2] P.K. Larsen, F.G. Greisen. Phys. Stat. Sol. (b) **45**, 363 (1971).
- [3] S. Balibar, B. Perrin, A. Libchaber. J. Phys. **F2**, 4629 (1972).
- [4] В.В. Лаврова, В.Г. Скобов, Л.М. Фишер, А.С. Чернов, В.А. Юдин. ФТТ **15**, 3379 (1973).
- [5] В.Г. Скобов, Л.М. Фишер, А.С. Чернов, В.А. Юдин. ЖЭТФ **67**, 1218 (1974).
- [6] A.S. Chernov, V.G. Skobov. Phys. Rep. **244**, 1, 1 (1994).
- [7] И.Ф. Волошин, Г.А. Вугальтер, В.Я. Демиковский и др. ЖЭТФ **73**, 1503 (1977).