Черенковские потери и вольт-амперная характеристика в джозефсоновских переходах типа сандвича

© В.П. Силин, А.В. Студенов

Физический институт имени П.Н. Лебедева Российской академии наук,
117924 Москва, Россия

E-mail: silin@sci.lebedev.ru

(Поступила в Редакцию 17 июня 1999 г.
В окончательной редакции 20 сентября 1999 г.)

Для джозефсоновского перехода (ДП) между двумя сверхпроводниками конечной толщины дано аналитическое описание покоящихся цепочек вихрей Абрикосова–Джозефсона (АД); получена обусловленная конечной проводимостью и черенковскими потерями вольт-амперная характеристика (ВАХ) для ДП с движущейся цепочкой вихрей АД; установлен закон движения единичного вихря.

Работа поддержана Научным советом по ВТСП (проект № 99002) и Государственной программой поддержки ведущих научных школ (грант № 96-15-96750).

1. Работа [1] вызвала интерес к изучению влияния черенковского излучения в джозефсоновских переходах (ДП) на вольт-амперные характеристики (ВАХ). В то же время работа [1] поставила ряд вопросов, среди которых возможность рассмотрения черенковского излучения коротких волн Свихарта вихрем (или вихревой структурой), мелкомасштабное описание которого строится с помощью традиционного уравнения синус-Гордона, заведомо неточно описывающего внутреннюю структуру вихря, а также не допускающего черенковское излучение [1]. От такого недостатка свободна теория черенковского излучения работ [2–4], в которых рассмотрено тормозящее влияние черенковских потерь на движение отдельного вихря и вихревой цепочки в ДП между массивными сверхпроводниками, а также получены ВАХ, учитывающие влияние проводимости в контактном переходном слое и влияние нормальных электронов в сверхпроводниках (ср. [5]). Однако теория работ [2–4] относится к случаю ДП с большой критической плотностью тока, что не позволяет формально перейти к пределу работы [1], отвечающему небольшой критической плотности тока Джозефсона j_c. В настоящем сообщении в отличие от работ [2–4] рассматривается черенковское излучение в ДП между сверхпроводниками конечной толщины d_s. Помимо самостоятельного интереса такая структура сандвича позволяет также построить формальный переход к теории, слабо отличающейся от той теории, которая основывается на уравнении синус-Гордона. Это, в частности, позволяет установить меру точности подхода работы [1], связанного с теорией ДП между массивными сверхпроводниками.

Изложенное ниже наше рассмотрение черенковского излучения обобщенных волн Свихарта в ДП структуры типа сандвича позволило найти поле черенковского излучения от движущегося бесконечного цуга вихрей (раздел второй). При этом мы основываемся на уравнении для разности фаз куперовских пар по разные стороны ДП φ, установленном в работе [6]. В данной сообщении с помощью результатов теории дислокаций [7] впервые записаны статические решения для бесконечных цугов вихрей Абрикосова–Джозефсона (АД) для ДП типа сандвича. С помощью устойчивого решения, отвечающего случаю ненулевого магнитного поля, установлено поле черенковского излучения, сопровождающего цуг при его движении. Это позволило определить ВАХ ДП типа сандвича при наличии в нем движущегося цуга вихрей. Третий раздел посвящен обсуждению некоторых простых следствий из общего соотношения, определяющего ВАХ. В четвертом разделе рассмотрен закон движения одного вихря при черенковском возбуждении им волн в ДП. Наконец, пятый раздел содержит обсуждение полученных результатов.

2. В настоящей статье в качестве исходного уравнения для разности фаз куперовских пар φ по разные стороны ДП между двумя бесконечными плоскими сверхпроводниками толщины d_s используем [6,8]

$$\sin\varphi + \frac{1}{\omega_j^2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \beta\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) - \frac{l}{2d_s}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz'}{\mathrm{sh}\left[\pi(z'-z)/2d_s\right]}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z'} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z'\partial t}\right) = 0. \quad (1)$$

Здесь используются следующие обозначения:

$$\omega_j^2 = \frac{16\pi|e|j_c d}{\hbar\varepsilon}, \qquad \beta = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}, \qquad \tau = \tau_f\frac{n_n}{n_s},$$

$$l = \frac{\lambda_j^2}{\lambda} = \frac{\hbar c^2}{16\pi|e|j_c\lambda^2},$$

где e — заряд электрона, j_c — критическая плотность тока Джозефсона, ω_j и λ_j — джозефсоновские частота и длина соответственно, β и τ характеризуют диссипацию, σ и ε — проводимость и диэлектрическая постоянная вещества несверхпроводящего контактного слоя толщиной $2d$, разделяющего сверхпроводники, λ — лондоновская длина, n_n и n_s — концентрация в сверхпроводнике нормальных и сверхпроводящих электронов соответственно, τ_f — эффективное время свободного пробега нормального электрона в сверхпроводнике. При написании уравнения (1) принято $d \ll \lambda$.

Обратимся к получению ВАХ в ДП типа сандвича, в котором движется цуг вихрей. Прежде всего приведем здесь статические решения уравнения (1), которые можно записать с помощью результатов теории дислокаций [7]. Это, во-первых,

$$\varphi_0(z) = \pi + 2\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{sn}\,(z/B,k)\,\mathrm{dn}\,(d_s/B,k')}{\mathrm{cn}\,(z/B,k)\,\mathrm{cn}\,(d_s/B,k')}\right)$$
$$\equiv \pi + 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{sn}\,(z/B,k)}{\mathrm{cn}\,(\mathrm{z/Bk})}\,\mathrm{dn}\left(\frac{id_s}{B},k\right)\right), \qquad (2)$$

где $0 < (d_s/B) < K'(k)$ и B определяется уравнением

$$\frac{l}{B} = \frac{\mathrm{dn}\,(d_s/B,k')\,\mathrm{cn}\,(d_s/B,k')}{k^2\,\mathrm{sn}\,(d_s/B,k')}. \qquad (3)$$

Здесь $\mathrm{dn}\,(x,k)$, $\mathrm{sn}\,(x,k)$, $\mathrm{cn}\,(x,k)$ обозначают эллиптические функции Якоби с аргументом x и модулем k $(0 \leqslant k \leqslant 1)$, $k' \equiv \sqrt{1-k^2}$, $K'(k) \equiv K(k')$ и $K(k)$ — полный эллиптический интеграл 1-го рода (см., например, [7]). Во-вторых,

$$\varphi_0(z) = \pi + 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{k\,\mathrm{sn}\,(z/C,k)}{\mathrm{dn}\,(z/C,k)\,\mathrm{cn}\,(d_s/C,k')}\right), \qquad (4)$$

где $0 < (d_s/C) < K'(k)$ и C определяется уравнением

$$\frac{l}{C} = \frac{\mathrm{cn}\,(d_s/C,k')}{\mathrm{sn}\,(d_s/C,k')\,\mathrm{dn}\,(d_s/C,k')}. \qquad (5)$$

Убедиться в том, что, например, (2) является статическим решением уравнения (1), нетрудно, как показано в Приложении, если воспользоваться разложением в ряды Фурье.

Вихревой структуре (2) отвечает равное нулю среднее магнитное поле. Подобная структура в ДП обычно неустойчива [9]. Поэтому далее сосредоточим свое внимание на вихревой структуре (2), которой отвечает отличное от нуля среднее магнитное поле $\bar{H} = (\Phi_0/4\pi\lambda L)$, где введено обозначение для периода структуры (2) $2\pi L \equiv 2BK(k)$, которое будем использовать далее в тексте. В силу этого соотношения предел бесконечно большого периода структуры $L \to \infty$ и конечной толщины сверхпроводников d_s отвечает $k = 1$, ибо $K(k \to 1) \to \infty$. В таком пределе формула (2) переходит в выражение работы [6], описывающее уединенный вихрь в ДП типа сандвича. В противоположном пределе, т. е. тогда, когда толщина сверхпроводящих электродов бесконечна $(d_s \to \infty)$, а период структуры L конечен, формула (2) при обозначении $\alpha = 2(K'(k) - d_s/B)$ переходит в $\varphi_0 = \pi + 2\,\mathrm{arctg}\,[\mathrm{tg}(z/2L)/\,\mathrm{th}\,(\alpha/2)]$, $\mathrm{sh}\,\alpha = (l/L)$. Последнее представляет собой известное решение нелокальной джозефсоновской электродинамики, использовавшееся, в частности, в работах [3,4] при построении теории ВАХ в ДП между массивными сверхпроводниками.

Для нахождения ВАХ для ДП с вихревым цугом (2) представим решение уравнения (1) в виде

$$\varphi(z,t) = \varphi_0(s) + \varphi_1(s), \qquad \varphi_1(s) \ll \varphi_0(s), \qquad (6)$$

где $s = z - vt$, а $\varphi_0(s)$ представляет собой структуру (2), движущуюся со скоростью v, что является причиной появления возмущения $\varphi_1(s)$. Тогда получаем следующее уравнение для $\varphi_1(s)$:

$$\varphi_1\cos\varphi_0 + \frac{v^2}{\omega_j^2}\left(\frac{d^2\varphi_1}{ds^2} - \frac{\beta}{v}\frac{d\varphi_1}{ds}\right)$$
$$- \frac{1}{2d_s}\fint_{-\infty}^{+\infty}\frac{ds'}{\mathrm{sh}\,[\pi(s'-s)/2d_s]}\left(\frac{d\varphi_1}{ds'} - \tau v\frac{d^2\varphi_1}{(ds')^2}\right)$$
$$= -\frac{v^2}{\omega_j^2}\left(\frac{d^2\varphi_0}{dx^2} - \frac{\beta}{v}\frac{d\varphi_0}{ds}\right) - \frac{\tau l v}{2v_s}$$
$$\times \fint_{-\infty}^{+\infty}\frac{ds'}{\mathrm{sh}\,[\pi(s'-s)/2d_s]}\frac{d^2\varphi_0}{(ds')^2}$$
$$\equiv \frac{\beta v}{\omega_j^2 L} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4v}{L}\frac{q^n}{1+q^{2n}}\left[\frac{nv}{\omega_j^2 L}\,\mathrm{ch}\left(\frac{nd_s}{L}\right)\sin\left(\frac{ns}{L}\right)\right.$$
$$\left. + \left\{\frac{\beta}{\omega_j^2}\,\mathrm{ch}\left(\frac{nd_s}{L}\right) + \frac{l\tau n}{L}\,\mathrm{sh}\left(\frac{nd_s}{L}\right)\right\}\cos\left(\frac{ns}{L}\right)\right], \qquad (7)$$

где $q = \exp\left(-\pi K'(k)/K(k)\right)$. Имея в виду черенковское возбуждение коротких волн и пренебрегая отличием $\cos\varphi_0$ от единицы (ср. [3]), непосредственно получаем решение уравнения (7)

$$\varphi_1 = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(ns/L) + b_n\sin(ns/L)\right). \qquad (8)$$

Здесь $a_0 = (\beta v/\omega_j^2 L)$,

$$a_n = \frac{4q^n\omega_n^2 v\Gamma_n}{(1+q^{2n})L}\,\frac{\mathrm{ch}\,(nd_s/L)}{[\omega_n^2 - (vn/L)^2] + (\Gamma_n vn/L)^2}, \qquad (9)$$

$$b_n = \frac{4q^n\,\mathrm{ch}\,(nd_s/L)}{n(1+q^{2n})}\left[-1 + \frac{\omega_n^2\left(\omega_n^2 - [nv/L]^2\right)}{[\omega_n^2 - (vn/L)^2]^2 + (\Gamma_n vn/L)^2}\right], \qquad (10)$$

$$\omega_n^2 = \omega_j^2[1 + (nl/L)\,\mathrm{th}\,(nd_s/L)],$$

$$\Gamma_n = \left[\beta + (\omega_j^2\tau nl/L)\,\mathrm{th}\,(nd_s/L)\right]. \qquad (11)$$

Предполагая малость диссипации, имеем следующее условие черенковского резонанса:

$$\frac{n_r^2 v_r^2}{L^2} = \omega_j^2\left[1 + \frac{n_r l}{L}\,\mathrm{th}\left(\frac{n_r d_s}{L}\right)\right], \qquad (12)$$

выполняющееся при скорости вихревой структуры $v = v_r$ для слагаемого ряда (8) с номером $n = n_r$, которое далее в тексте называется резонансным слагаемым. Для малых скоростей v номер резонансного слагаемого велик. Более того, будем считать, что

$$n_r \gg (L/d_s), \qquad n_r \gg (L/l). \tag{13}$$

Тогда из условия черенковского резонанса следует

$$n_r = \left(Ll\omega_j^2/v_r^2\right). \tag{14}$$

Выполнение условий (13) при этом означает выполнение следующего условия на резонансную скорость v_r:

$$v \ll \omega_j \min(l, \sqrt{ld_s}). \tag{15}$$

Заметим, что условия (13) накладывают на номер n_r черенковского резонанса условие $n_r \gg 1$ при выполнении условия

$$L \gg \min(l, d_s). \tag{16}$$

Если $v = v_r$, то резонансное слагаемое в (8) с номером $n = n_r$ имеет вид

$$\varphi_r = \frac{2v_r}{L\Gamma_{n_r}} \exp\left[-n_r\left(\frac{\pi K'}{K} - \frac{d_s}{L}\right)\right] \cos\left(\frac{n_r s}{L}\right). \tag{17}$$

Вблизи резонанса, когда

$$|v - v_r| < (\Delta v_r/2) = (v_r/4n_r) \ll v_r, \tag{18}$$

резонансное слагаемое записывается в виде

$$\varphi_r = \frac{2v}{L\Gamma_{n_r}} \exp\left[-n_r\left(\frac{\pi K'}{K} - \frac{d_s}{L}\right)\right] \times \frac{\cos(n_r s/L) - \left[2n_r(v - v_r)\Gamma_{n_r}^{-1}L^{-1}\right]\sin(n_r s/L)}{1 + \left[2n_r(v - v_r)\Gamma_{n_r}^{-1}L^{-1}\right]^2}. \tag{19}$$

Наиболее важное отличие этого результата от полученного в теории ДП между массивными сверхпроводниками заключается в показателе экспоненты, отражающем влияние конечной толщины сверхпроводящих электродов.

Возможность ограничения в сумме (8) одним резонансным слагаемым обеспечивается выполнением неравенства (см. [3])

$$\left[\omega_n^2 - (vn/L)^2\right]^2 \gg [\Gamma_n vn/L]^2, \quad n \neq n_r. \tag{20}$$

Это сводится к условию

$$v_r \gg L\Gamma_{n_r} = L\left[\beta + \left(l^2\tau\omega_j^4/v_r^2\right)\right]. \tag{21}$$

Наконец, условие малости φ_r по сравнению с φ_0 обеспечивается условием

$$\frac{2v}{L\Gamma_{n_r}} \exp\left[-n_r\left(\frac{\pi K'}{k} - \frac{d_s}{L}\right)\right] \ll 1. \tag{22}$$

С учетом формулы для n_r (14) и условия на скорость (15) нетрудно убедиться, что для φ_r справедливо неравенство $\left|\left(v^2/\omega_j^2\right)\left(d^2\varphi_r/ds^2\right)\right| \gg |\varphi_r|$, оправдывающее замену $\cos\varphi_0 \to 1$ в уравнении (7) при вычислении резонансного слагаемого.

Установив таким образом возможность описания черенковского поля излучения с помощью выражения (19), используем этот результат для нахождения ВАХ. Для этого запишем баланс работы плотности тока j, протекающего через ДП, и потери энергии вихревой цепочки, обусловленной черенковским излучением (ср. [3,4])

$$\frac{j}{j_c}\int_0^{2\pi L} ds\frac{d\varphi}{ds} = \int_0^{2\pi L} ds\left\{\frac{\beta v}{\omega_j^2}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 - \frac{l\tau v}{2d_s}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right) \times \fint_{-\infty}^{+\infty}\frac{ds'}{\operatorname{sh}\left[\pi(s'-s)/2d_s\right]}\frac{d^2\varphi}{(ds')^2}\right\}. \tag{23}$$

Отсюда после постановки $\varphi = \varphi_0 + \varphi_r$ получаем следующую зависимость плотности тока от скорости:

$$\frac{j}{j_c} = \frac{\beta v}{\omega_j^2}R(w,k) + \frac{l\tau v}{2B}\frac{dR(w,k)}{dw} + \frac{2\omega_j^2 l^2}{vL\Gamma_{n_r}}\frac{\exp\left[-(2\omega_j^2 l d_s/v_r^2 w)(K' - w)\right]}{1 + \left[2\omega_j^2 l(v - v_r/v_r^2\Gamma_{n_r})\right]^2}, \tag{24}$$

где $\Gamma_{n_r} = \beta + \omega_j^2\tau(l\omega_j/v)^2$, $w \equiv (d_s/B) < K'(k)$ и использовано обозначение

$$R(w,k) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi L} ds\left(\frac{d\varphi_0}{ds}\right)^2 = \frac{2}{\pi B}\left[\left(\frac{\mathrm{dn}^2(w,k')}{\mathrm{cn}^2(w,k')} + \frac{1}{\mathrm{sh}^2(w,k')}\right)\Pi\left(\frac{k^2\mathrm{sn}^2(w,k')}{\mathrm{cn}^2(w,k')}, k\right) - \frac{1}{\mathrm{sn}^2(w,k')}K(k) + E(k)\right]. \tag{25}$$

При этом $E(k)$ и

$$\Pi(\mu^2,k) \equiv \int_0^1 d\rho(\rho^2\mu^2 + 1)^{-1}[1 - \rho^2(1 - \rho^2 k^2)]^{-1/2}$$

— полные эллиптические интегралы 2-го и 3-го рода соответственно. В силу соотношения (3) w определяется из уравнения

$$\frac{l}{d_s}w = \frac{\mathrm{dn}\,(w,k')\,\mathrm{cn}\,(w,k')}{k^2\mathrm{sn}(w,k')} \equiv \frac{\mathrm{sn}\,(K' - w,k')}{\mathrm{cn}\,(K'-w,k')\,\mathrm{dn}\,(K'-w,k')}. \tag{26}$$

Наконец, модуль k эллиптических функций Якоби определяется уравнением

$$K(k) = \frac{\pi L}{d_s}w \equiv \frac{\Phi_0}{4d_s\lambda H}w. \tag{27}$$

Поскольку постоянная разность потенциалов на джозефсоновском переходе, содержащем движущуюся с постоянной скоростью вихревую структуру (2), определяется соотношением

$$V = -\frac{\hbar}{2|e|}\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\rangle = \frac{\hbar v}{2|e|L}, \tag{28}$$

где $\langle\,\rangle$ обозначает усреднение по периоду $2\pi L$, то соотношения (24)–(27) определяют искомую ВАХ. В пределе массивных сверхпроводящих электродов сандвича, когда $d_s = \infty$, соотношения (24)–(27) дают ВАХ работы [4].

3. Обсудим некоторые следствия из общих соотношений (24)–(27) для ВАХ джозефсоновского перехода, в котором движется цепочка вихрей. Сосредоточим свое внимание на случае большого расстояния L между составляющими цепочку к единице. При этом

$$k' = 4\exp(-\pi L w/d_s) \ll 1. \tag{29}$$

Если при этом уравнение (26) представлено в виде [10]

$$\frac{l}{d_s}w = \frac{\mathrm{dn}\,(w,k')\,\mathrm{cn}\,(w,k')}{k^2\mathrm{sn}\,(w,k')} = \frac{\pi}{2k^2K'(k)}$$
$$\times\left[\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi w}{2K'(k)}\right) - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(q')^n}{1+(q')^n}\sin\left(\frac{\pi n w}{K'(k)}\right)\right],$$

$$(q') \equiv q(k') = \exp\bigl(-\pi K(k)/K'(k)\bigr), \tag{30}$$

то учитывая $K'(k) \approx \pi/2$, а также имея в виду следующую оценку ряда:

$$\left|4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(q')^n}{1+(q')^n}\sin\left(\frac{\pi n w}{K'(k)}\right)\right| < 4\sum_{n=1}^{\infty}(q')^n$$
$$= \frac{4(q')}{1-(q')} \cong (k')^2/4 = 4\exp(-2\pi L w/d_s), \tag{31}$$

можно вкладом этого ряда пренебречь при условии

$$4\exp(-2\pi L w/d_s) \ll (lw/d_s). \tag{32}$$

При этом уравнение (26) принимает следующую простую форму:

$$(l/d_n)w_0 = \mathrm{ctg}\,w_0, \qquad w_0 \equiv (d_s/B_1), \tag{33}$$

отвечающую уравнению (29) работы [6] для отдельного вихря. Использование (33) позволяет получить явные условия на расстояние между вихрями. Так, если $l \gg d_s$, то $B_1 \approx \sqrt{ld_s}$, $w_0 = d_s/B_1 = \sqrt{d_s/l}$. Если же $l \leqslant d_s$, то $B_1 \approx d_s$, $w_0 \approx 1$. Поэтому выполнение неравенств (32) и (29), определяющих возможность использовать уравнения (33) вместо (26), сводятся к следующему:

$$\pi L \gg \max\left[\sqrt{ld_s},\ d_s\ln(4d_s/l)\right]. \tag{34}$$

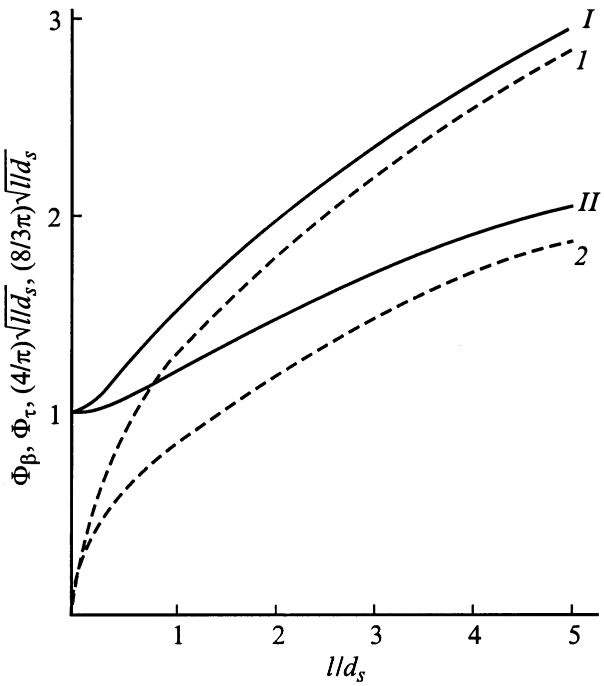

Рис. 1. Зависимость коэффициентов $\Phi_\beta(w_0)$ (I) и $\Phi_\tau(w_0)$ (II) от отношения (l/d_s); *1, 2* — функции $(4\pi)\sqrt{l/d_s}$ и $(8/3\pi)\sqrt{l/d_s}$, отвечающие асимптотике коэффициентов Φ_β, Φ_τ при $l \gg d_s$.

В таких условиях ВАХ (24) принимает вид

$$\frac{j}{j_c} = \frac{\beta v}{\omega_j^2 l}\Phi_\beta(w_0) + \frac{\tau v}{2l}\Phi_\tau(w0)$$
$$+\frac{2\omega_j^2 l^2}{vL\Gamma_{n_r}}\,\frac{\exp\left[-(2\omega_j^2 l d_s/w_0 v_r^2)([\pi/2]-w_0)\right]}{1+\left[(2\omega_j^2 l/\Gamma_{n_r}v_r^2)(v-v_r)\right]^2}, \tag{35}$$

где

$$\Phi_\beta(w_0) = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{ctg}\,w_0\left(1+\frac{2w_0}{\sin[2w_0]}\right), \tag{36}$$

$$\Phi_\tau(w_0) = \frac{4}{\pi}\frac{\mathrm{ctg}^2\,w_0}{\sin[2w_0]}\left(1-\frac{2w_0}{\mathrm{tg}[2w_0]}\right). \tag{37}$$

Здесь при предельном переходе от формулы (24) к соотношению (35) использовано, что при $k' \ll 1$ [10]

$$\left[1+(k^2/\mu^2)\right]\Pi(\mu^2,k) - (k^2/\mu^2)K(k)$$
$$= (1/\mu)\arccos\left(1/\sqrt{1+\mu^2}\right).$$

Зависимость коэффициентов $\Phi_\beta(w_0)$ и $\Phi_\tau(w_0)$ от отношения (l/d_s) изображена на рис. 1.

В пределе тонких электродов $l \gg d_s$ ВАХ (35) принимает вид

$$\frac{j}{j_c} = \frac{4}{\pi}\frac{\beta v}{\omega_j v_{s,eff}} + \frac{4}{3\pi}\frac{v}{v_{s,eff}}\tau\omega_j^2 + \frac{2v_{s,eff}}{v}\frac{\omega_j}{\Gamma_{n_r}}\frac{l}{L}\sqrt{\frac{l}{d_s}}$$

$$\times\frac{\exp\left[-\pi(v_{s,eff}/v_r)^2\sqrt{l/d_s}\right]}{1+\left[2(v_{s,eff}/v_r)^2(v-v_r)/(\Gamma_{n_r}d_s)\right]^2}, \qquad (38)$$

где введено обозначение $v_{s,eff} = \omega_j\sqrt{ld_s}$. Только наличие $v_{s,eff}$ вместо обычной скорости Свихарта $v_s = \omega_j\lambda_j$ отличает линейное по v слагаемое в ВАХ (38) от возникающего при балансе энергии для одиночного джозефсоновского вихря локальной теории (ср. [11]). Последнее резонансное слагаемое в ВАХ (38), которое не может возникать в локальной теории, связано с возбуждением вихрем черенковских волн.

Оценим проводимость ДП σ, при которой проявляется резонансное слагаемое в ВАХ (38), причем применительно к случаю достаточно низких температур эффектом от нормальных электронов пренебрежем $\tau = 0$. (Влияние нормальных электронов на ВАХ подробно рассмотрено в работе [4]). Тогда резонансное слагаемое в (38) больше линейного по v слагаемого, если

$$\left(\frac{4\pi\lambda\sigma}{c}\right)^2\frac{l}{d\varepsilon} \equiv \left(\frac{\beta}{\omega_j}\right)^2 < \frac{\pi}{2}\left(\frac{v_{s,eff}}{v}\right)^2\frac{l}{L}\sqrt{\frac{l}{d_s}}$$

$$\times\exp\left[-\pi\left(\frac{v_{s,eff}}{v}\right)^2\sqrt{\frac{l}{d_s}}\right]. \qquad (39)$$

Отсюда, если принять $l/d_s = 5$, $L/l = 10$, $v_{s,eff}/v = 3$, $l/d = 10^2$, $\varepsilon = 10$, получим $\sigma_{s^{-1}}\lambda_{\mu m} \leqslant 10^{-1}$, где $\sigma_{s^{-1}}$ — проводимость ДП, измеренная в обратных секундах, а $\lambda_{\mu m}$ — лондоновская длина, измеряемая в микронах, что отвечает весьма малым проводимостям ДП. Таким образом, в пределе очень тонких электродов, который во многом аналогичен пределу локальной джозефсоновской теории, резонансное слагаемое в ВАХ (38) при малых скоростях (15) проявляется при весьма малых проводимостях ДП.

В качестве иллюстрации зависимости вида ВАХ для не очень тонких сверхпроводящих электродов от отношения (l/d_s) на рис. 2 приведена при $\sigma \sim 10^8\,\mathrm{s}^{-1}$ и $\tau = 0$ огибающая (кривая проходящая через максимумы резонансов) ВАХ (35), имеющая вид

$$\frac{j}{j_c} = \frac{V}{j_cR_s}\frac{L}{l}\left(\Phi_\beta(w_0) + 2\left(\frac{j_1R_s}{V}\right)^2\right.$$

$$\left.\times\exp\left(-\frac{2V_0^2}{V^2}\frac{[(\pi/2)-w_0]}{\operatorname{ctg} w_0}\right)\right), \qquad (40)$$

где $R_s = (2d/\sigma)$, $V_0 = (\hbar l\omega_j/2|e|L)$, $j_1 = j_c(l/L)^{3/2}$. Из рис. 2 следует, что при уменьшении d_s наклон линейного участка ВАХ растет, а отклонение от линейного закона происходит при меньших напряжениях.

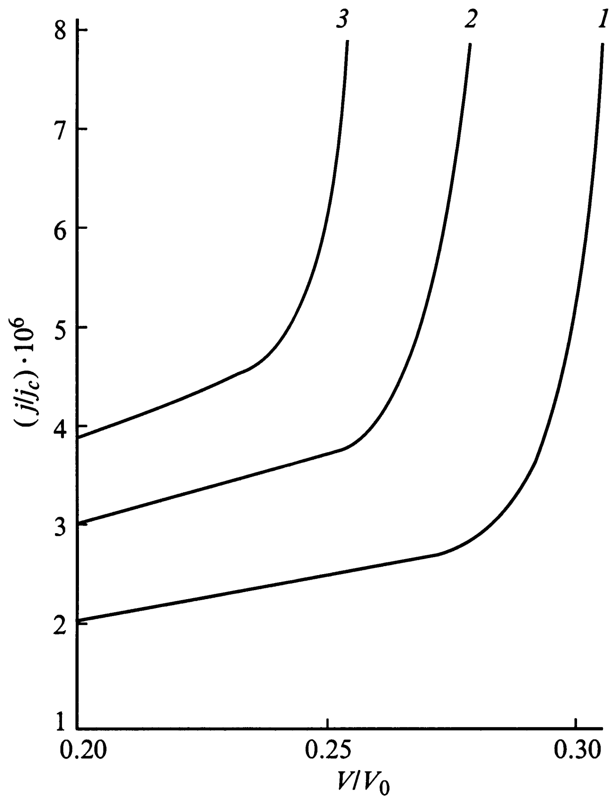

Рис. 2. ВАХ ДП с большой критической плотностью тока при $\tau = 0$, $(l/L) = 10^{-2}$, $(j_1R_s/V_0) = 10^4$ ($\sigma \sim 10^8\,\mathrm{s}^{-1}$) при различных отношениях l/d_s. l/d_s: *1* — 0.1, *2* — 1, *3* — 2.

4. Отметим, что в пределе $L = \infty$ формула (2) переходит в описывающую один вихрь в ДП

$$\varphi_0 = \pi + 2\operatorname{arctg}\left[\operatorname{sh}(z/B_1)/\cos(d_s/B_1)\right]. \qquad (41)$$

При этом $(d_s/B_1) \equiv w_0$ определяется уравнением (33). Используя (41) в качестве источника возмущения в уравнении (7) и действуя аналогично работе [2], получаем следующее поле черенковского излучения от одного вихря:

$$\varphi_{ch}(s) = 4\pi\exp\left(\frac{\gamma s}{v}\right)\cos\left(\frac{l\omega_j^2 s}{v^2}\right)$$

$$\times\exp\left\{-\frac{l\omega_j^2}{v^2}\left(\frac{\pi}{2}B_1 - d_s\right)\right\}\theta(-s), \qquad (42)$$

где $\theta(x) = 1$, $x > 0$, $\theta(x) = 0$, $x < 0$, а $\gamma = \beta + (\tau l^2\omega_j^4/v^2)$. Выражение (42) написано в предположении слабого затухания черенковской волны в размере вихря, т. е. $v \gg (\beta + \tau l^2\omega_j^2/v^2)\min(l, \sqrt{ld_s})$, а малость выражения (42) по сравнению с φ_0 (41) обеспечивается малостью скорости (15). Используя поле (42) и пренебрегая затуханием черенковской волны $(\gamma \to +0)$, нетрудно найти поток энергии позади вихря и связанную с этим силу трения, тормозящую вихрь (см. [1,2]). Предполагая протекание постоянной плотности тока j через ДП от внешнего источника, которая ускоряет вихрь силой Лоренца $f_L = \Phi_0 j/c \equiv (\pi\hbar j/|e|)$, записывая баланс силы трения и силы Лоренца, получим следующую зависимость плотности тока от скорости вихря:

$$\frac{j}{j_c} = 2\pi\frac{l^2\omega_j^2}{v^2}\exp\left(-\frac{2l\omega_j^2}{v^2}\left[\frac{\pi}{2}B_1 - d_s\right]\right). \qquad (43)$$

В пределе массивных электродов $d_s \gg l$ выражение (43) совпадает с указанным в работе [2]. В пределе тонких пленочных сверхпроводников $d_s \ll l$ формула (43) переходит в следующую:

$$\frac{j}{j_c} = 2\pi\frac{l^2\omega_j^2}{v^2}\exp\left(-\frac{\pi\omega_j^2 l\lambda_{j,eff}}{v^2}\right), \qquad (44)$$

где введено обозначение $\lambda_{j,eff} \equiv \sqrt{ld_s}$. Нетрудно убедиться, что предел $d_s \ll l$ аналогичен пределу локальной джозефсоновской электродинамики [11]. Так, например, уравнение (1) в этом пределе переходит в уравнение синус-Гордона с диссипацией, а выражение, описывающее один вихрь в ДП (41), — в формулу для обычного джозефсоновского вихря

$$\varphi_0(z) = \pi + 2\,\mathrm{arctg}\{\mathrm{sh}\,(z/\lambda_{j,eff})\}$$
$$\equiv 4\,\mathrm{arctg}\,\{\exp(z/\lambda_{j,eff})\}, \qquad (45)$$

причем роль джозефсоновской длины играет $\lambda_{j,eff} \equiv \sqrt{ld_s}$.

С учетом приведенного выше замечания зависимости плотности тока от скорости (44) отвечает локальному пределу уравнения (1). Поэтому можно было бы думать об использовании подхода работы [1] для получения формулы (44), когда при линеаризации уравнения (1) вместо точного выражения φ_0, отвечающего формуле (41), подставлялось бы приближенное выражение (45). Однако, как в этом нетрудно убедиться, использование подхода работы [1] приводит в формулах (42) и (44) к существенно большему предэкспоненциальному множителю. Это связано с неточностью решения(45) именно в интересующей нас области малых расстояний, отвечающих коротким волнам, что непосредственно проявляется в линеаризации уравнения (1), когда вместо уравнения (7) возникает уравнение с правой частью, не обращающейся в нуль при $v = 0$. Поэтому правильной формулой, определяющей связь тока со скоростью обычного джозефсоновского вихря, является формула (44) с заменой $\sqrt{ld_s} \equiv \lambda_{j,eff} \to \lambda_j$.

5. Подведем итог полученным результатам. Итак, использование решения (41) позволило найти соотношение (43), определяющее связь скорости движения вихря и приводящей его в движение плотности тока через ДП типа сандвича.

В частности, наша формула (44) для локального предела показала, что использование в работе [1] в таком пределе вместо применяемого нами точного выражения (41) приближенного выражения (45) для вихревого источника, возбуждающего при своем движении черенковские волны, не позволяет найти тот правильный предэкспоненциальный множитель, который возник в (44).

Для построения теории ВАХ в ДП типа сандвича на основании метематической теории дислокаций [7] определена зависимость от координаты разности фаз куперовских пар по разные стороны ДП для бесконечной покоящейся цепочки вихрей с отличным от нуля средним магнитным полем (2). Определены аналогичные выражения для цепочки вихрей с нулевым магнитным полем (4). При использовании (2) найдено общее соотношение, определяющее ВАХ в рассматриваемом ДП. Черенковские потери на излучение обобщенных волн Свихарта определяют ВАХ тогда, когда малы омические потери. Поскольку при низких температурах практически нет нормальных электронов в сверхпроводящих электродах сандвича, то именно при таких температурах следует искать влияние черенковского излучения на ВАХ.

Приложение

Убедимся, что выражение (2) является статическим решением уравнения (1). Для этого воспользуемся следующими разложениями в ряды Фурье [10]:

$$\frac{d\varphi_0}{dz} = \frac{2}{B}\frac{\mathrm{dn}\,(id_s/B,k)\,\mathrm{dn}\,(z/B,k)}{[1 - k^2\,\mathrm{sn}^2(z/B,k)\,\mathrm{sn}\,(id_s/B,k)]}$$
$$= \frac{1}{B}\left[\mathrm{dn}\left(\frac{z+id_s}{B},k\right) + \mathrm{dn}\left(\frac{z-id_s}{B},k\right)\right]$$
$$= \frac{\pi}{BK} + \frac{4\pi}{BK}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{1+q^{2n}}\cos\left(\frac{\pi nz}{BK}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{\pi nd_s}{BK}\right), \qquad (46)$$

$$\sin\varphi_0 = -\frac{2\,\mathrm{dn}\,(id_s/B,k)\,\mathrm{sn}\,(z/B,k)\,\mathrm{cn}\,(z/B,k)}{1 - k^2\mathrm{sn}\,(z/B,k)\,\mathrm{sn}\,(id_s/B,k)}$$
$$= -\frac{\mathrm{dn}\,(id_s/B,k)}{k^2\mathrm{sn}\,(id_s/B,k)\,\mathrm{cn}\,(id_s/B,k)}$$
$$\times\left[\mathrm{dn}\left(\frac{z-id_s}{B}\right) - \mathrm{dn}\left(\frac{z+id_s}{B}\right)\right]$$
$$= -\frac{\mathrm{dn}\,(d_s/B,k')\,\mathrm{cn}\,(d_s/B,k')}{k^2\mathrm{sn}\,(d_s/B,k')}$$
$$\times\frac{4\pi}{K}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{1+q^{2n}}\sin\left(\frac{\pi nz}{BK}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{\pi nd_s}{BK}\right). \qquad (47)$$

Используем далее преобразования

$$\frac{1}{2d_s}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz'}{\operatorname{sh}[\pi(z'-z)/2d_s]}\begin{Bmatrix}\cos(nz'/L)\\ \sin(nz'/L)\end{Bmatrix}$$

$$=\operatorname{th}\left(\frac{nd_s}{L}\right)\begin{Bmatrix}-\sin(nz/L)\\ \cos(nz/L)\end{Bmatrix}, \tag{48}$$

где $2\pi L \equiv 2BK(k)$ представляет период вихревой структуры (2). Тогда из уравнения (1) в качестве условия разрешимости возникает условие (3).

Это подтверждает то, что (2) является решением уравнения (1). Аналогично можно убедиться в справедливости решения (4).

Список литературы

[1] R.G. Mints, I.B. Snapiro. Phys. Rev. **B52**, 9691 (1995).
[2] В.П. Силин, А.В. Студенов. ФТТ **39**, 444 (1997).
[3] В.П. Силин, А.В. Студенов. ЖЭТФ **113**, 2148 (1998).
[4] В.П. Силин, А.В. Студенов. ФТТ **41**, *4*, 582 (1999).
[5] Ж.Д. Генчев, В.И. Васькивский. ЖЭТФ **113**, 955 (1998).
[6] G.L. Alfimov, A.F. Popkov. Phys. Rev. **B52**, 4503 (1995).
[7] A. Seeger. Theorie der Gittefehlstellen, Handbuch der Physik, bd. 17, t. 1, Kristallphysik, Springer Verlag, Berlin–Gottingen–Hedelberg (1955). S. 383.
[8] А.С. Малишевский, В.П. Силин, С.А. Урюпин. ФТТ **41**, *7*, 1154 (1999).
[9] Г.Л. Алфимов, В.П. Силин. ЖЭТФ **108**, 1668 (1995).
[10] И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Наука, М. (1971). С. 1108.
[11] Yu.S. Kivshar, B.A. Malomed. Rev. Mod. Phys. **64**, *4*, 763 (1989).