

Отрицательное магнитосопротивление и коэффициент Холла двумерной неупорядоченной системы

© А.Г. Грошев, С.Г. Новокшенов

Физико-технический институт Уральского отделения Российской академии наук,
426001 Ижевск, Россия

E-mail: nov@otf.fti.udmurtia.su

(Поступила в Редакцию 9 августа 1999 г.)

Рассматривается задача вычисления локализационных поправок к продольному $\delta\rho$ и холловскому $\delta\rho_H$ сопротивлениям двумерной неупорядоченной системы во всей области классических магнитных полей вплоть до значений, при которых длина свободного пробега носителей заряда l меньше или порядка циклотронного радиуса R_c . Показано, что физической причиной отклонения их поведения от логарифмического $\propto \ln(l_B/l)$ (l_B — магнитная длина) при $l_B \ll l \ll R_c$ является не переход к квазибаллистическому режиму, а нелокальность процесса диффузии в куперовском канале. Полученные аналитические выражения открывают принципиальную возможность анализировать интерференционные поправки в $\delta\rho$ и $\delta\rho_H$ в квантующих магнитных полях ($R_c \ll l$), включая квантовый предел.

Показано, что вопреки общепринятой точке зрения локализационные поправки к ρ_H отличны от нуля. Они имеют знак, противоположный знаку заряда носителей, и приводят к уменьшению абсолютной величины холловского сопротивления. Их полевая зависимость имеет те же особенности, а относительная величина — тот же порядок, что и в продольном сопротивлении. Возникновение квантовых поправок в холловском сопротивлении обусловлено ларморовской прецессией замкнутых траекторий, которые обходятся электронами в процессе их многократного рассеяния на хаотически распределенных примесях.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы INTAS (грант 99-10-70).

Теория квантовых поправок к электропроводности (слабой локализации), обусловленных квантовой интерференцией электронных волн, испытывающих многократное рассеяние в случайном поле примесей [1], в настоящее время является одним из наиболее разработанных и экспериментально проверенных разделов теории неупорядоченных систем. К числу ее важнейших приложений относится объяснение природы отрицательного магнитосопротивления (ОМС) [2,3], которое наблюдается в низкоразмерных полупроводниковых структурах [4]. За двадцатилетний период развития этой области исследований достигнут значительный прогресс. Разработана количественная теория ОМС, справедливая в широкой области классических магнитных полей ($l \ll R_c$) [5–9], которая последовательно учитывает основные вклады в этот эффект, возникающие в первом порядке по малому параметру $1/k_F l$ [6,9]. Дана адекватная квазиклассическая интерпретация механизмов возникновения квантовых поправок к электропроводности неупорядоченных систем [9,10].

Несмотря на это, здесь еще остается ряд важных и до сих пор не решенных проблем. Не разработана теория квантовых поправок в области квантующих магнитных полей ($R_c \ll l$), хотя и сделаны первые шаги в этом направлении [10,11]. На наш взгляд, не выяснена физическая причина отклонения квантовых поправок к электропроводности от классического диффузионного приближения [1], которое имеет место при достаточно малых временах сбоя фазы τ_φ и сильных магнитных полях $l_B \ll l$.

После работы Фукуямы [12], в которой было предсказано отсутствие в первом порядке по $1/k_F l$ интерференционных вкладов в холловское сопротивление ρ_H , сложилась точка зрения, согласно которой основным механизмом квантовых поправок в ρ_H является электрон-электронное взаимодействие [3,13–15].

В настоящей статье рассматривается вычисление интерференционных квантовых поправок к продольному ρ и холловскому ρ_H сопротивлениям. В рамках подхода [5,7,9] получены выражения для этих величин, справедливые в широкой области магнитных полей, в том числе квантующих. Показано, что вопреки установившейся точке зрения локализационные поправки к холловскому сопротивлению $\delta\rho_H$ отличны от нуля в первом порядке по $1/k_F l$. Выявлена физическая природа $\delta\rho_H$, исследованы аналитические асимптотики и проведен численный анализ их полевой зависимости.

Показано, что куперон, определяющий локализационные поправки в кинетических коэффициентах, фактически во всей области классических магнитных полей $l < R_c$ сохраняет структуру диффузионного пропагатора в канале частица–частица. Однако с ростом магнитного поля в нем необходимо учитывать пространственно-временную нелокальность (дисперсию) обобщенного коэффициента диффузии. Отклонение от этой структуры происходит в более сильных полях и связано, скорее, с нарушением инвариантности относительно обращения времени, чем с переходом к баллистическому режиму [8,9].

1. Исходные уравнения

Рассмотрим двумерный вырожденный газ электронов, испытывающих упругое рассеяние на неподвижных примесях с концентрацией n_I , распределенных в образце по закону Пуассона. Одноэлектронный гамильтониан рассматриваемой задачи имеет вид

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{U} = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + \sum_{\mathbf{R}} U(\mathbf{r} - \mathbf{R}). \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{A} = (0, Bx)$ — векторный потенциал магнитного поля в калибровке Ландау. Потенциал примеси, локализованной в точке \mathbf{R} , предполагается короткодействующим и аппроксимируется δ -образным: $U(\mathbf{r} - \mathbf{R}) = U_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R})$. Это приближение можно использовать, если его радиус действия r_0 мал по сравнению с длиной волны де Бройля электрона на уровне Ферми \mathcal{E}_F . Кроме этого, авторы предполагают слабым рассеяние электрона на изолированной примеси и учитывают его в первом борновском приближении.

Тензор электропроводности рассматриваемой системы имеет всего одну независимую циркулярно-поляризованную компоненту σ . Определим ее таким образом, чтобы $\text{Re } \sigma = \sigma_{xx}$, а $\text{Im } \sigma = \sigma_{yx}$, и представим в виде суммы ($\hbar = 1$)

$$\sigma = \sigma_B^0 + \delta\sigma = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega_c\tau} + \frac{e^2}{2\pi} \langle Sp V_+ \delta R^+ V_- \delta R^- \rangle. \quad (2)$$

Здесь $\sigma_0 = ne^2\tau/m$, $\omega_c = |e|B/mc$ — циклотронная частота, $V_{\pm} = V_x \pm iV_y$ — циркулярно-поляризованные компоненты оператора скорости электрона в магнитном поле, $R^{\pm}(\mathcal{E}) = (\mathcal{E} - \mathcal{H} \pm i0)^{-1}$ — резольвента гамильтониана (1), $\delta R^{\pm} = R^{\pm} - \langle R^{\pm} \rangle$, угловые скобки $\langle \dots \rangle$ обозначают конфигурационное усреднение, объем рассматриваемой системы полагается равным единице,

$$\langle R^{\pm} \rangle = G^{\pm} = \left(\mathcal{E} - \mathcal{H}_0 - \Sigma^{\pm}(\mathcal{E}) \right)^{-1},$$

$$\Sigma^{\pm}(\mathcal{E}) = \Delta(\mathcal{E}) \mp i\Gamma(\mathcal{E})/2, \quad (3)$$

где $\Sigma^{\pm}(\mathcal{E})$ — оператор электронной собственно-энергетической части, определяющий сдвиг (Δ) и ширину ($\Gamma = 1/\tau$) одноэлектронных уровней в случайном поле примесей.

Первое слагаемое в (2) представляет собой известное выражение для электропроводности в приближении классической кинетической теории, справедливое в широкой области магнитных полей вплоть до классически сильных (но не квантовых, $\omega_c\tau \lesssim 1$). Квантовые поправки к σ , ответственные за эффекты слабой локализации или ОМС, содержатся во втором слагаемом (2). Они возникают в результате интерференции волновых функций электронов, испытывающих многократное рассеяние на примесях при движении вдоль замкнутых траекторий в противоположных направлениях. Как показано в работе [6], в области сильных магнитных

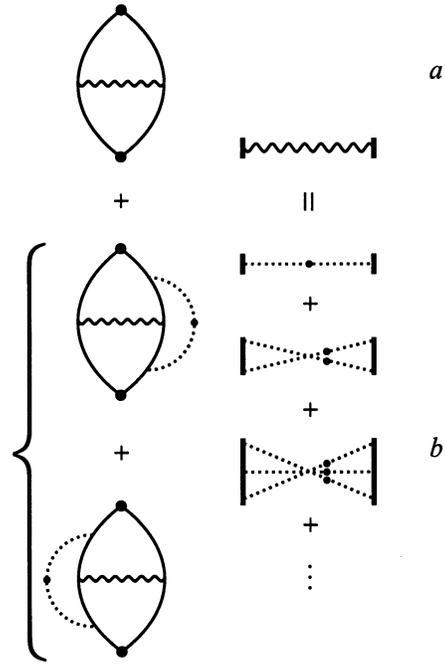


Рис. 1. Вклады в квантовые поправки к σ от когерентного рассеяния назад (a) и на произвольные углы (b). Волнистая линия изображает сумму максимально пересеченных диаграмм.

полей основной вклад в них вносят два типа процессов рассеяния, представленные на рис. 1 скелетными диаграммами (a) и (b). Подробный анализ, выполненный в [9], показывает, что с уменьшением времени сбоя фазы τ_{φ} или с увеличением магнитного поля относительная роль процессов типа (b) возрастает и их учет становится необходимым для количественного описания эффектов слабой локализации.

Используя тождество

$$G^{\pm} V_{\mp} G^{\mp} = \mp i\tau \frac{V_{\mp} G^{\mp} - G^{\pm} V_{\mp}}{1 - i\omega_c\tau} \quad (4)$$

и переходя в координатное представление, запишем выражения для соответствующих квантовых поправок к σ в следующем виде:

$$\delta\sigma = -\frac{\sigma_0^2}{(1 - i\omega_c\tau)^2} \frac{2\pi^2}{e^2} \Delta, \quad (5)$$

где $\Delta = \Delta_a + \Delta_b$,

$$\Delta_a = \frac{1}{\pi k_F^3 l} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \langle \mathbf{r} | G^- V_+ - V_+ G^+ | \mathbf{r}' \rangle \langle \mathbf{r} | V_- G^- - G^+ V_- | \mathbf{r}' \rangle C(\mathbf{r}', \mathbf{r}),$$

$$\Delta_b = \frac{W}{\pi k_F^3 l} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \int d\mathbf{r}_1 \langle \mathbf{r} | G^- | \mathbf{r}_1 \rangle \langle \mathbf{r} | V_- G^- - G^+ V_- | \mathbf{r}_1 \rangle \langle \mathbf{r}_1 | G^- V_+ - V_+ G^+ | \mathbf{r}' \rangle C(\mathbf{r}', \mathbf{r}). \quad (6)$$

Здесь $C(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ — куперон, представляющий собой сумму ряда максимально пересеченных (всерных) диаграмм,

которая на рис. 1 изображена волнистой линией. В (6) явно выписаны поправки, соответствующие диаграмме типа (а) и первой из двух диаграмм типа (b); вторая поправка типа (b) строится подобно первой. Предложенная в [9] квазиклассическая интерпретация механизма возникновения квантовых поправок к электропроводности наглядно показывает, что в отличие от Δ_a , обусловленной аномальным ростом амплитуды рассеяния назад ($\theta \approx \pi$), в Δ_b соизмеримый вклад вносит рассеяние на произвольные углы $0 < \theta < \pi$.

Измеряемыми в эксперименте величинами являются продольное ρ и холловское ρ_H сопротивление, связанные с σ соотношениями $\rho = \text{Re } \sigma^{-1}$ и $\rho_H = \text{Im } \sigma^{-1}$. Предполагая, что локализационные поправки к электропроводности достаточно малы ($|\delta\sigma| \ll |\sigma_B^0|$), обратим (2) в линейном по Δ приближении. Это дает следующие выражения для квантовых поправок к ρ и ρ_H , измеряемых в единицах $2\pi^2/e^2$:

$$\delta\rho = \rho - \rho_0 = \text{Re } \Delta, \quad \delta\rho_H = \rho_H - \rho_{H_0} = \text{Im } \Delta, \quad (7)$$

где $\rho_0 = 1/\sigma_0$ и $\rho_{H_0} = \rho_0\omega_c\tau = B/enc$. Как следовало ожидать, в (7) отсутствуют множители $1/(1 + \omega_c^2\tau^2)$. Действительно, в компонентах тензора электропроводности (2), (5) они появляются вследствие классического искривления траекторий в магнитном поле, т.е. имеют кинематическое происхождение. Но, как хорошо известно (см., например, [16]), в вырожденных проводниках с одной группой носителей заряда это не изменяет компонент тензора удельных сопротивлений. Таким образом, в рассматриваемой здесь одноэлектронной модели полевая зависимость $\delta\rho$ и $\delta\rho_H$ во всей области классических магнитных полей ($\omega_c\tau \lesssim 1$) оказывается целиком обусловленной именно локализационными поправками к электропроводности. Это обстоятельство чрезвычайно важно для интерпретации экспериментальных результатов.

2. Одноэлектронная функция Грина

Центральную роль в дальнейших вычислениях играет усредненная одноэлектронная функция Грина в координатном представлении $G^\pm(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathcal{E}) = \langle \mathbf{r} | G^\pm(\mathcal{E}) | \mathbf{r}' \rangle$, пропорциональная амплитуде вероятности обнаружить в точке \mathbf{r}' электрон, испытавший последнее столкновение в точке \mathbf{r} . В отсутствие магнитного поля она имеет простую асимптотику, справедливую при $\rho = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| > \lambda_F$,

$$G^\pm(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathcal{E}) = \frac{\mp im}{\sqrt{2\pi k_F \rho}} \exp \left[\pm ik_F \rho - \frac{\rho}{2l} \mp i \frac{\pi}{4} \right], \quad (8)$$

где $l = v_F\tau$ — средняя длина свободного пробега электрона.¹ Для учета влияния слабого магнитного поля ($\omega_c\tau \ll 1$) достаточно (8) умножить на фазовый множитель $\exp(-i\Phi) = \exp[-i(x+x')(y-y')/2l_B^2]$, где $l_B = \sqrt{c/|e|B}$ — магнитная длина.

¹ При наличии механизмов сбоя фазы необходимо во всех выражениях для одноэлектронных функций Грина заменить $1/\tau$ на $1/\tau + 1/\tau_\varphi$.

Аппроксимация (8) использовалась в [5–7,9] при анализе ОМС в сильных магнитных полях $B \gg B_{tr} = c/2|e|l^2$. Этого вполне достаточно, пока выполняется условие $\omega_c\tau \ll 1$ (или $l \ll R_c$, $R_c = l_B^2 k_F$ — циклотронный радиус), и искривлением квазиклассических траекторий электронов в магнитном поле можно пренебречь. Однако в больших полях ($l \gtrsim R_c$) необходимо использовать аппроксимации, учитывающие не только изменение фазы, но и ограничение свободного движения электрона в области $\rho < 2R_c$. Их можно получить, исходя из точного выражения для запаздывающей функции Грина $G^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathcal{E})$, которое, как и в случае слабого магнитного поля, представляет собой произведение фазового множителя $\exp(-i\Phi)$, и не зависящей от калибровки ее трансляционно-инвариантной части

$$G^+(\rho; \mathcal{E}) = -\frac{m\omega_c}{4\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sin(\omega_c t/2)} \times \exp \left[ia^+ \omega_c t + i \frac{m\omega_c}{4} \rho^2 \text{ctg} \frac{\omega_c t}{2} \right], \quad (9)$$

где $a^+ = (\mathcal{E} + i/2\tau)/\omega_c = k_F R_c (1 + i/k_F l)/2$, $G^-(\rho; \mathcal{E}) = [G^+(\rho; \mathcal{E})]^*$.

Входящий в (9) интеграл можно выразить через вырожденную гипергеометрическую функцию Трикоми $\Psi(a, c; x)$ [17]

$$G^+(\rho; \mathcal{E}) = -\frac{m}{2\pi} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - a^+\right) \Psi\left(\frac{1}{2} - a^+, 1; x\right), \quad (10)$$

($x = \rho^2/2l_B^2$) и воспользоваться ее асимптотиками при больших значениях параметра и аргумента ($|a^+| \gg 1$, $x \ll 1$). Однако здесь лучше применить предложенный Горным [10] простой и физически прозрачный способ, состоящий в оценке (9) методом стационарной фазы. Применяя его в классически доступной области ($\rho < 2R_c$) при $k_F l = \infty$ и аналитически продолжая полученный результат в верхнюю комплексную плоскость $k_F \rightarrow k_F(1 + i/k_F l)^{1/2}$, нетрудно найти²

$$G^+(\rho; \mathcal{E}) = -i \exp(-i\pi/4) \frac{m}{\sqrt{2\pi k_F \rho}} \left(1 - \frac{\rho^2}{4R_c^2} + \frac{i}{k_F l}\right)^{-1/4} \times \left[\frac{\exp(i\xi^+)}{1 + \exp(2\pi ia^+)} - i \frac{\exp(-i\xi^+)}{1 + \exp(-2\pi ia^+)} \right], \quad (11)$$

$\rho < 2R_c,$

где показатель фазы

$$\xi^+ = \frac{k_F \rho}{2} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4R_c^2} + \frac{i}{k_F l}} + 2a^+ \arcsin \left[\frac{\rho}{2R_c} \left(1 + \frac{i}{k_F l}\right)^{-1/2} \right] \quad (12)$$

при $k_F l = \infty$ равен действию, соответствующему переходу электрона $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$ вдоль короткой дуги циклотронной орбиты.

² Этот же результат получается при использовании соответствующих асимптотик функции Трикоми в (1) [17].

Аппроксимация одноэлектронной функции Грина (11), справедливая с точностью до слагаемых порядка $\omega_c/\mathcal{E}_F \sim 1/k_F R_c$ и $\min(l_B, \lambda_F)/\rho$, имеет простой физический смысл. С точностью до замены импульса Ферми на его радиальную составляющую $k_F \sqrt{1 - \rho^2/4R_c^2}$ общий множитель в (11) совпадает с предэкспонентой в (8). Первое слагаемое в квадратных скобках (11) обусловлено квазиклассическим движением электрона из точки \mathbf{r} в точку \mathbf{r}' по короткой (S) дуге циклотронной орбиты, второе — по длинной (L) дуге [10]. Множители $1 + \exp(\pm 2\pi i a^+)$ в знаменателях возникают в результате суммирования амплитуд вероятности перехода $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$ после n -кратного ($n = 0, 1, 2, \dots$) обхода электроном циклотронной орбиты. Они достигают минимального по модулю значения при энергиях $\mathcal{E}/\omega_c = n + 1/2$, отвечающих центрам размытых столкновениями уровней Ландау. Таким образом, в классически доступной области запаздывающая функция Грина (11) в отличие от (8) представляет собой суперпозицию расходящейся (G_S^+) и отраженной от барьера сходящейся (G_L^+) волн. С уменьшением магнитного поля амплитуда последней экспоненциально $\propto \exp(-R_c/l)$ падает по сравнению с первой. Поэтому при $l \ll R_c$ на удалении $\rho \ll R_c$ искривлением траекторий электронов в магнитном поле можно пренебречь и (11) переходит в асимптотику (8).

Амплитуда вероятности обнаружить электрон в классически недоступной области ($\rho > 2R_c$), куда он проникает благодаря туннельному эффекту, с ростом ρ экспоненциально $\propto \exp(-\rho^2/4l_B^2)$ стремится к нулю. В этом случае асимптотическое поведение $G^+(\rho; \mathcal{E})$ хорошо описывается первым слагаемым из (11).

Локализованные поправки к электропроводности в классически сильных полях ($l \lesssim R_c$) выражаются через величину $P(\rho) = W|G^\pm(\rho)|^2$, пропорциональную плотности вероятности того, что электрон будет обнаружен на расстоянии ρ от точки последнего столкновения. Асимптотике (8) соответствует экспоненциальное распределение $P(\rho) = \exp(-\rho/l)/(2\pi\rho l)$ [5,7], справедливое лишь в пределе $B \rightarrow 0$. Преимуществом аппроксимации (11) является то, что она позволяет вычислять $P(\rho)$ в широком диапазоне магнитных полей вплоть до значений $k_F R_c \approx 10$ и расстояний $\min(l_B, \lambda_F) < \rho < +\infty$, включая окрестность классической точки поворота $\rho \approx 2R_c$.³

На рис. 2 приведены графики зависимостей $2\pi\rho l P(\rho)$, рассчитанных с использованием асимптотики (11) при различных значениях отношения l/R_c . При $l \ll R_c$ основной вклад в $P(\rho)$ вносит движение по короткой дуге циклотронной траектории. В этом случае в области $\rho < R_c$ поведение $2\pi\rho l P(\rho)$ приблизительно следует асимптотике слабого поля $\propto \exp(-\rho/l)$, сменяясь при $\rho > 2R_c$ более резким экспоненциальным $\propto \exp(-\rho^2/2l_B^2)$ затуханием. С ростом отношения l/R_c в (11) увеличиваются относительные вклады как от

³ Заметим, что без аналитического продолжения $k_F \rightarrow K_F \times (1 + i/k_F l)^{1/2}$, т. е. при $k_F l = \infty$, (11) дает результат $G(\rho; \mathcal{E}) \propto \rho^{-1/2} \times (1 - \rho^2/4R_c^2)^{-1/4}$ [10], справедливый лишь при $\rho \ll 2R_c, l$.

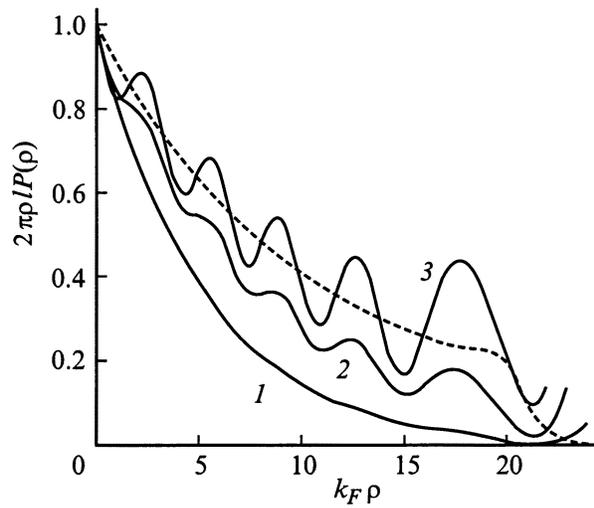


Рис. 2. Плотность вероятности обнаружить электрон на расстоянии ρ от точки его последнего столкновения, рассчитанная с использованием аппроксимации (11) при $k_F R_c = 10.0$: (1) — $l/R_c = 0.5$; (2) — $l/R_c = 0.75$; (3) — $l/R_c = 1.0$. Штриховая линия, полученная при $l/R_c = 1.0$ без учета отраженных волн, описывает поведение $2\pi\rho l P(\rho)$ в классически недоступной области $\rho > 2R_c$.

движения по длинным дугам циклотронных орбит, так и от их многократного обхода. В результате в $P(\rho)$ появляются слагаемые, обусловленные интерференцией волн, пришедших в рассматриваемую точку по разным траекториям. Это приводит к осциллирующей зависимости $P(\rho)$ в области $0 < \rho < 2R_c$, достаточно сильной уже при $l \sim R_c$.

Эти и другие особенности одноэлектронной функции Грина начинают отражаться на поведении локализационных поправок к кинетическим коэффициентам в области сильных полей $\omega_c \tau \sim 1$.

3. Куперон за пределами классического диффузионного приближения

Квантовые поправки к электропроводности (5), (6) пропорциональны куперону $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, которому на диаграммном языке соответствует веерный ряд (рис. 1). В отсутствие магнитного поля рассматриваемая система в среднем трансляционно инвариантна, поэтому удобно использовать импульсное представление, в котором веерный ряд легко суммируется и равен

$$C(q) = \frac{P(q)}{1 - P(q)},$$

$$P(q) = W \sum_{\mathbf{k}} G_{\mathbf{k}_+}^+ G_{\mathbf{k}_-}^- = (s^2 + l^2 q^2)^{-1/2}, \quad (13)$$

где $q = |\mathbf{q}| = |\mathbf{p} + \mathbf{p}'|$, $\mathbf{k}_\pm = \mathbf{k} \pm \mathbf{q}/2$, $s = 1 + \tau/\tau_\varphi$.

В длинноволновом пределе ($ql \ll 1$) и при достаточно большом времени сбоя фазы ($\tau \ll \tau_\varphi$) $P(q) = (1 + \tau/\tau_\varphi + q^2 D_0 \tau)^{-1}$, где $D_0 = v_F^2 \tau / 2$ — классический коэффициент диффузии двумерных электронов и (13) приобретает стандартный диффузионный вид [1]. В противоположном пределе $|P(q)| \ll 1$, в связи с чем обычно утверждается [7,9], что за пределами области $ql \ll 1$, $\tau \ll \tau_\varphi$ диффузионное приближение для куперона (13) становится неприменимым. Действительно, при $ql \gg 1$ основной вклад в него вносят первые слагаемые веерного ряда, которым отвечают замкнутые траектории малых размеров $\sim l$ с малым числом столкновений. Движение по ним носит скорее квазибаллистический, чем диффузионный характер. Однако (13) сохраняет вид диффузионного пропагатора и в общем случае (но при выполнении условий $q \ll k_F$, $\tau_\varphi \mathcal{E}_F \gg 1$), а именно

$$C(q, \tau_\varphi^{-1}) = \frac{1}{\tau/\tau_\varphi + q^2 D(q, i/\tau_\varphi) \tau}, \quad (14)$$

где $D(q, i/\tau_\varphi)$ — обобщенный, зависящий от волнового числа q и частоты $\omega = i/\tau_\varphi$, коэффициент диффузии, вычисленный в лестничном приближении [18],

$$D(q, i/\tau_\varphi) = \frac{2D_0}{s + \sqrt{s^2 + l^2 q^2}}. \quad (15)$$

Это согласуется с общим результатом Сулова [19], согласно которому наличие в неприводимой четыреххвостке диффузионного полюса типа (14) с точным обобщенным коэффициентом диффузии является следствием инвариантности относительно обращения времени и закона сохранения числа частиц. Таким образом, в рассматриваемой области изменения q и τ_φ процесс распространения остается диффузионным, но приобретает нелокальный характер. При этом роль нелокальности увеличивается с ростом относительного вклада в куперон от замкнутых траекторий малых размеров, что имеет место в области больших значений q и $1/\tau_\varphi$. Диффузионный механизм распространения все-таки нарушается, но это происходит на атомных пространственно-временных масштабах ($q \sim k_F$, $\tau_\varphi \mathcal{E}_F \sim 1$), где он управляется квантовомеханическим законом движения. Подстановка (15) в (14) дает выражение для куперона $C(q, \tau_\varphi^{-1})$, в точности совпадающее с использованием в [5–7], поэтому здесь речь идет только о физической интерпретации куперона при больших импульсах.

Включение внешнего магнитного поля нарушает трансляционную инвариантность системы. В этом случае удобнее исходить из координатного представления, в котором куперон удовлетворяет интегральному уравнению⁴

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = P(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \int d\mathbf{r}_1 P(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) C(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \quad (16)$$

⁴ Здесь и далее для упрощения обозначений не выписывается в явном виде зависимость от времени сбоя фазы τ_φ .

с ядром

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = W \langle \mathbf{r} | G^+ | \mathbf{r}' \rangle \langle \mathbf{r} | G^- | \mathbf{r}' \rangle = \exp\{-i2\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\} W |G^\pm(\rho)|^2. \quad (17)$$

Очевидно, подобную структуру имеет и куперон $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, т.е. он представляет собой интегральное ядро оператора, диагонального в базисе собственных волновых функций $\Psi_{n,k}(\mathbf{r})$ частицы с зарядом $2e$, движущейся в магнитном поле B , а его трансляционно-инвариантная часть имеет вид

$$C(\rho) = \frac{1}{\pi l_B^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_n}{1 - P_n} J_{n,n}(\sqrt{2}\rho),$$

$$P_n = 2\pi \int_0^{+\infty} \rho d\rho J_{n,n}(\sqrt{2}\rho) P(\rho). \quad (18)$$

Здесь мы ввели компактное обозначение для используемой в дальнейшем величины

$$J_{n,n'}(\rho) = \left(\frac{n_{\min}!}{n_{\max}!} \right)^{1/2} \left(\frac{\rho^2}{2l_B^2} \right)^{|n-n'|/2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{4l_B^2}\right) \times L_{n_{\min}}^{|n-n'|} \left(\frac{\rho^2}{2l_B^2} \right), \quad (19)$$

где $L_n^m(x)$ — присоединенный полином Лагерра ($L_n(x) = L_n^0(x)$).

Выражения (18) для куперона получены Кавабатой [5] для слабого магнитного поля, удовлетворяющего условию $\omega_c \tau \ll 1$. Однако они остаются справедливыми и в области квантующих магнитных полей $\omega_c \tau \gg 1$ [11],⁵ если одночастичные функции Грина вычислять в базисе Ландау. Это позволяет исследовать квантовые поправки к тензору электропроводности не только в слабых, но и в сильных магнитных полях вплоть до квантового предела.

Связь куперона (18) с диффузионным пропагатором нетрудно установить, рассматривая его асимптотику в области слабых магнитных полей, где коэффициенты P_n в соответствии с поведением полиномов Лагерра при $n \gg 1$ [20] стремятся к Фурье-образу функции $P(\rho)$

$$P_n \approx P(q_n) = 2\pi \int_0^{+\infty} \rho d\rho P(\rho) J_0(q_n \rho)$$

$$= \frac{1}{s + q_n^2 D(q_n) \tau}, \quad (20)$$

вычисленному при дискретных значениях волнового числа $q_n = \sqrt{(4n+2)}/l_B$, где $J_n(x)$ — функция Бесселя n -го порядка.

Асимптотика (20) работает при выполнении условий $l^2/l_B^2 \ll q_n^2 l_B^2 \ll R_c k_F = 2\mathcal{E}_F/\omega_c$. Первое из

⁵ К сожалению, в [11] использовалось выражение для P_n , справедливое лишь в области больших квантовых чисел $n \gg 1$.

этих неравенств определяет порядок поправок к (20) $\sim l/(l_B^2 q_n)$, второе — ограничивает снизу атомным пространственным масштабом ($\rho = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gg \lambda_F$) область, в которой куперон $C(\rho)$ сохраняет структуру диффузионного пропагатора. Второе равенство в (20) получено с помощью соотношений (13) и (14), связывающих $P(q)$ с $D(q)$ — обобщенным коэффициентом диффузии электронов в классическом магнитном поле. Последний можно вычислить независимо, решив кинетическое уравнение в приближении времени релаксации. В случае рассматриваемой здесь двумерной системы в магнитном поле это дает следующий результат:

$$P(q) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{J_n^2(qR_c)}{s + in\omega_c\tau}. \quad (21)$$

В классических магнитных полях (21) и преобразование Фурье (20), вычисленное с использованием (11), совпадают с точностью до слагаемых порядка ω_c/\mathcal{E}_F и q/k_F . Классическое диффузионное приближение для куперона в магнитном поле получается, если разложить (20) и (21) в ряд по степеням τ/τ_φ и q^2 , ограничиваясь первыми неисчезающими слагаемыми. Это дает выражение (14), в котором $D(q) \rightarrow D_B = D_0/(1 + \omega_c^2\tau^2)$, что соответствует пренебрежению пространственной дисперсией коэффициента диффузии и справедливо при выполнении неравенства $D_B(4n + 2)\tau/l_B^2 \ll 1$.

Таким образом, куперон в магнитном поле сохраняет структуру диффузионного пропагатора (14) с обобщенным коэффициентом диффузии, зависящим от дискретного волнового числа $q_n = \sqrt{4n + 2}/l_B$, мнимой частоты i/τ_φ и магнитного поля B , если основной вклад в ряд (18) формируется слагаемыми из интервала $l^2/l_B^2 \ll q_n^2 l_B^2 \ll R_c k_F$. С ростом магнитного поля этот интервал сужается и куперон постепенно теряет диффузионный вид. Он заведомо нарушается в сильных магнитных полях $l^2/l_B^2 \sim R_c k_F$ (или $\omega_c\tau \sim 1$), когда перестает работать асимптотика (20) коэффициентов P_n . При достаточно низкой подвижности носителей заряда (или больших значениях $B_{tr} = c\hbar/(2|e|l^2)$) это происходит задолго до начала квазибаллистического режима распространения в канале частица–частица и вызвано нарушением инвариантности относительно обращения времени в магнитном поле.

4. Квантовые поправки к продольному и холловскому сопротивлениям

Явное вычисление параметров $\Delta_{a,b}$, определяющих квантовые поправки к продольному и холловскому сопротивлениям (7), аналогично выполненному в [9,10], поэтому, не вдаваясь в подробности, остановимся лишь на его наиболее важных моментах.

Строго говоря, в $\Delta_{a,b}$ вносят вклад все процессы многократного рассеяния, начиная со второго порядка. Однако последние нечувствительны к изменению внешнего магнитного поля, поскольку им отвечает движение электронов по замкнутым траекториям, охватывающим нулевую площадь [6]. Поэтому они дают поправки $\delta\rho^{(2)} = O(B^0)$ и $\delta\rho_H^{(2)} = O(B)$, которые можно исключить, соответствующим образом переопределив значения продольного ρ_0 и холловского ρ_{H_0} сопротивлений при $B \rightarrow 0$. Обратим внимание на то, что в сильных полях это оказывается возможным именно благодаря отсутствию кинематических факторов в $\delta\rho$ и $\delta\rho_H$ (7).

Начиная с первых работ [2,5,12,14], посвященных теории ОМС, при вычислении входящих в определение квантовых поправок (6) векторных вершин

$$\langle \mathbf{r} | V_\pm G^\pm - G^\mp V_\pm | \mathbf{r}' \rangle = \pm \exp(-i\Phi \pm i\varphi) V_F K(\rho) \quad (22)$$

(φ — полярный угол вектора $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$) по существу пренебрегается некоммутативностью компонент оператора скорости. На языке классической механики это означает пренебрежение силой Лоренца, действующей на электроны в магнитном поле. Неудивительно, что такое приближение, слабо влияя на величину квантовых поправок в продольном сопротивлении, в холловском — тождественно обращает их в нуль. Этот результат, впервые полученный Фукуямой [12], в настоящее время является общепризнанным и рассматривается как отличительная особенность проявления локализационных эффектов в гальваномагнитных коэффициентах неупорядоченных систем. Более того, равенство $\rho_H = B/enc$ вблизи порога подвижности на металлической стороне перехода металл–диэлектрик ($d > 2$) предсказывают скейлинговая [21] и самосогласованная [22] теории андерсоновской локализации.

Точное выражение для $K(\rho)$ имеет следующий вид:

$$K(\rho) = \frac{2}{k_F} \frac{\partial}{\partial \rho} \text{Im} G^+(\rho; \mathcal{E}) - i \text{sign}(e) \frac{\rho}{R_c} \text{Re} G^+(\rho; \mathcal{E}), \quad (23)$$

где $G^+(\rho; \mathcal{E})$ — трансляционно-инвариантная часть одноэлектронной функции Грина (9). В достаточно слабых магнитных полях, в которых справедлива асимптотика одноэлектронной функции Грина (11), ее изменение вдоль траектории движения в основном определяется быстро осциллирующими фазовыми множителями $\propto \exp(\pm i\xi)$. В этом случае первое слагаемое в (23) пропорционально радиальной составляющей скорости электрона на расстоянии ρ от точки его последнего столкновения $V_r = \sqrt{V_F^2 - \omega_c^2 \rho^2/4} = m^{-1} \partial \xi / \partial \rho$. Второе слагаемое пропорционально тангенциальной составляющей $V_t = \omega_c \rho/2$, возникающей в результате ларморовской прецессии траектории электрона в магнитном поле. Именно эта компонента векторной вершины не учитывалась в предыдущих работах. Являясь чисто мнимой и зависящей от знака заряда носителей, она приводит к появлению отличных от нуля квантовых поправок к

холловскому сопротивлению (7). Очевидно, что учет вклада тангенциальной составляющей (23) в $\delta\rho$ (7) дает поправки второго порядка по малому параметру l/R_c в области классических магнитных полей.

Дальнейшие вычисления по существу не отличаются от выполненных в [9,10], поэтому далее приводятся лишь окончательные результаты

$$\Delta = \frac{z}{2(\pi k_F l)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n}{1-P_n} \left[P_n A_n - B_{n-1}^{(+)^2} - B_n^{(-)^2} \right], \quad (24)$$

где $z = B/B_{tr} = 2l^2/l_B^2$,

$$A_n = 2\pi W \int_0^{+\infty} \rho d\rho J_{n,n}(\sqrt{2}\rho) K^2(\rho),$$

$$B_n^{\pm} = 2\pi W \int_0^{+\infty} \rho d\rho J_{n,n+1}(\sqrt{2}\rho) G^{\pm}(\rho) K(\rho). \quad (25)$$

Эти выражения в принципе позволяют анализировать локализационные поправки к тензору сопротивлений во всем интервале магнитных полей от классически слабых ($\omega_c \tau \ll 1$) до квантовых ($\omega_c \tau \gg 1$). В последнем случае все вычисления необходимо проводить в базисе Ландау. Результаты работ [9,10] для $\delta\rho$ получаются из (24), (25), если в подинтегральных выражениях (25) пренебречь быстро осциллирующими слагаемыми, зависящими от произведений однотипных функций Грина $G^{\pm}G^{\pm}$. Это дает для них следующие приближения:

$$\begin{aligned} WK^2 &\approx 2P(\rho)(1 - i \operatorname{sign}(e)\rho/R_c), \\ WG^{\pm}K &\approx P(\rho)(1 - i \operatorname{sign}(e)\rho/2R_c), \end{aligned} \quad (26)$$

справедливые до тех пор, пока асимптотика одноэлектронной функции Грина (11) определяется лишь короткими дугами циклотронных орбит. Как показывают результаты выполненного выше численного анализа (см. рис. 2), такое приближение хорошо аппроксимирует $G^{\pm}(\rho; \mathcal{E})$ в магнитных полях, удовлетворяющих условию $l \lesssim 2R_c/3$. Таким образом, область применимости соответствующих результатов [9,10], строго говоря, ограничена сверху этим неравенством. Учет тангенциальной компоненты в векторной вершине (23) приводит к появлению в Δ (24) отличной от нуля мнимой части. Это новый результат, который вопреки общепринятой точке зрения [3] предсказывает наличие отличных от нуля локализационных поправок в холловском сопротивлении.

В слабых полях $B \ll B_{tr}$ ряды (24) сходятся довольно медленно. В этом случае достаточно воспользоваться асимптотиками коэффициентов A_n , B_n^{\pm} (25) при $n \gg 1$, что дает следующие выражения для продольного и хол-

ловского сопротивлений:

$$\begin{aligned} \delta\rho &= \frac{z}{2(\pi k_F l)^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_n}{1-P_n} \left[2P_n^2 - P_{n-1/2}^2 \frac{1 - sP_{n-1/2}}{1 + sP_{n-1/2}} \right. \\ &\quad \left. - P_{n+1/2}^2 \frac{1 - sP_{n+1/2}}{1 + sP_{n+1/2}} \right], \\ \delta\rho_H &= -\operatorname{sign}(e) \frac{l}{R_c} \frac{z}{2(\pi k_F l)^2} \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_n}{1-P_n} \left[2sP_n^4 - P_{n-1/2}^3 (1 - sP_{n-1/2}) \right. \\ &\quad \left. - P_{n+1/2}^3 (1 - sP_{n+1/2}) \right], \end{aligned} \quad (27)$$

где $P_n = P(q_n)$ (13), (20). Первые слагаемые в квадратных скобках (24) и (27) обусловлены процессами когерентного рассеяния назад, вторые и третьи — на произвольные углы. Первое из уравнений (27) совпадает с полученным в [9]. В пределе $B \rightarrow 0$ суммирование в (27) можно заменить интегрированием, что дает логарифмически зависящие от температуры ($\tau_{\varphi} \sim T^{-p}$, $p = 1 - 2$) асимптотики

$$\begin{aligned} \delta\rho &= \frac{2}{s+1} \frac{1}{(\pi k_F l)^2} \left[s \ln \frac{s}{s-1} - \ln 2 \right], \\ \delta\rho_H &= -\operatorname{sign}(e) \frac{l}{R_c} \frac{1}{(\pi k_F l)^2} \left[(2s-1) \ln \frac{s}{s-1} - 2 \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

В области достаточно слабых магнитных полей $l \ll l_B \ll l_{\varphi}$, R_c полевые зависимости продольного и холловского сопротивлений также являются логарифмическими, $\delta\rho/\rho_0 \sim \delta\rho_H/\rho_{H0} \propto \ln(l_B^2/l^2)$. В противоположном пределе ($l_B \ll l \ll R_c$) они сменяются степенными $\delta\rho/\rho_0 \propto B^{-1/2}$ [5,6], $\delta\rho_H/\rho_{H0} \propto B^{-3/2}$. Относительная величина квантовых поправок к обобщенным кинетическим коэффициентам имеет один порядок, $(\delta\rho/\rho_0)/|\delta\rho_H/\rho_{H0}| \sim 1$. Но в отличие от всегда положительной $\delta\rho$ знак $\delta\rho_H$ противоположен знаку носителей заряда. Другими словами, локализационные поправки приводят к уменьшению холловского сопротивления по абсолютной величине.

На рис. 3, 4 приведены результаты численного расчета квантовых поправок к продольному и холловскому сопротивлениям при значениях параметров $\tau/\tau_{\varphi} = 10^{-2}$ и $k_F l = 10$, что при концентрации носителей заряда $2\pi n = 10^{12} \text{ см}^{-2}$ соответствует подвижности $\mu \approx 1.5 \cdot 10^4 \text{ см}^2 \text{ В}^{-1} \text{ с}^{-1}$. Пренебрежение вкладом длинных дуг в одноэлектронные функции Грина (11) дает в области $\omega_c \tau < 1$ полевые зависимости $\Delta\rho/\rho(0)$ и $\Delta\rho_H/\rho_H(0)$, несущественно отличающиеся от полученных с использованием асимптотики (8). Начиная с полей, удовлетворяющих условию $\omega_c \tau \approx 0.5$, продольное и холловское сопротивления обнаруживают шубниковские

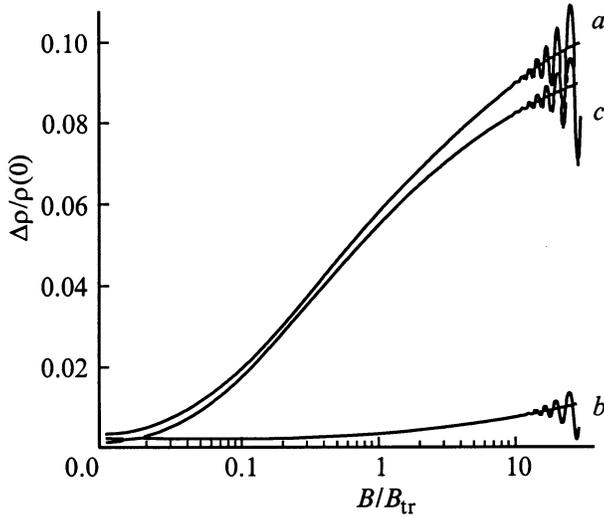


Рис. 3. Отрицательное магнитосопротивление $\Delta\rho/\rho(0) = (\rho(B) - \rho(0))/\rho(0)$, обусловленное когерентным рассеянием назад (a), на произвольные углы (b) и суммарное (c). Зависимости рассчитаны с использованием асимптотики (11) для $G^\pm(\rho)$ без учета вклада от длинных дуг циклотронных орбит.

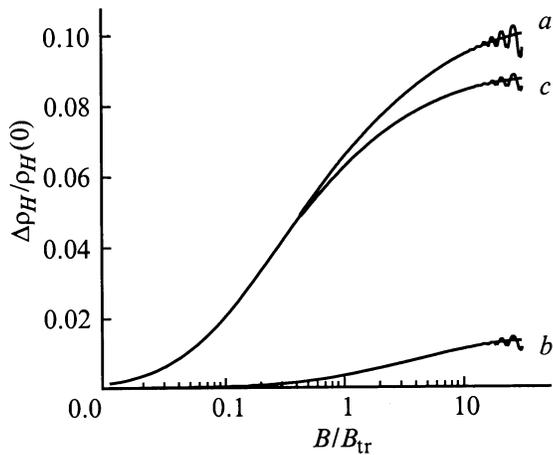


Рис. 4. То же, что и на рис. 3, для холловского сопротивления $\Delta\rho_H/\rho_H(0) = (\rho_H(B) - \rho_H(0))/\rho_H(0)$.

осцилляции, что фактически определяет границу применимости сделанных авторами приближений. В достаточно сильных полях ($B > B_{tr}$) происходит отклонение полевых зависимостей от логарифмических, однако в чистом виде степенные асимптотики $\delta\rho/\rho(0) \propto B^{-1/2}$ и $\delta\rho_H/\rho_H(0) \propto B^{-3/2}$ не наблюдаются, поскольку при выбранных значениях параметров условия их появления выполняются при $B/B_{tr} > 10^2$ [8], т.е. далеко за пределами актуальной области полей.⁶

⁶ Как показывают оценки, такое поведение в классических полях ($\omega_c\tau < 1$) может наблюдаться в совершенных гетероструктурах, в которых при концентрации носителей заряда $2\pi n = 10^{12} \text{ cm}^{-2}$ их подвижность достигает значений $\mu \sim 10^5 - 10^6 \text{ cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$.

5. Обсуждение результатов

Как уже указывалось выше, физическая природа отличных от нуля локализационных поправок к холловскому сопротивлению состоит в прецессии электронных траекторий в магнитном поле. Ее направление совпадает с направлением циклотронного движения электронов, что ведет к увеличению холловского тока или, что эквивалентно, — к уменьшению абсолютной величины ρ_H . Поведение $\delta\rho_H$ с ростом магнитного поля определяется двумя конкурирующими факторами: с одной стороны, уменьшение вероятности когерентного рассеяния вследствие магнитной расфазировки, с другой — увеличение частоты ларморовской прецессии.

На первый взгляд, утверждение об отсутствии локализационных поправок к холловскому сопротивлению (по крайней мере в первом порядке по $1/k_F l$) имеет достаточно убедительное физическое обоснование (см., например, [3]). Дело в том, что интерференционные эффекты не приводят к изменению концентрации носителей заряда, а вносимые ими квантовые поправки к транспортному времени релаксации взаимно уничтожаются в выражении для ρ_H . Это рассуждение совершенно справедливо, если предполагать, что холловская компонента электропроводности σ_{yx} имеет структуру решения классического кинетического уравнения в магнитном поле (см. первое слагаемое в (2)). Но, как впервые показано в работе [23], в σ_{yx} присутствуют слагаемые, которые не имеют аналогов в классической кинетической теории. Их общая структура детально исследована Герхардтсом [24]. Нетрудно проверить, что в первом исчезающем приближении по малому параметру $\omega_c\tau$ выражение (5) для квантовых поправок к холловской электропроводности имеет структуру первого слагаемого в правой части уравнения (3.24) работы [24].

Таким образом, локализационные поправки в холловском сопротивлении в отличие от таковых в продольном сопротивлении не объясняются одним лишь интерференционным изменением транспортного времени релаксации [9]. Их величина пропорциональна среднему значению линейной скорости ларморовской прецессии замкнутых участков электронных траекторий $V_L = \langle \omega_c \rho / 2 \rangle$. Проиллюстрируем это на примере квантовых поправок типа (a) к холловскому сопротивлению, которые в случае слабого магнитного поля можно представить в виде

$$\begin{aligned} \delta\rho_H^{(a)} &= \frac{1}{(\pi k_F l)^2} 2\pi l^2 \sum_{n=3}^{+\infty} \int d^2\mathbf{r} \frac{\omega_c r}{V_F} W_n(r) P(r) \\ &= \delta\rho^{(a)} 2 \frac{V_L}{V_F}. \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь $W_n(r)$ — плотность вероятности того, что электрон, испытав n столкновений, окажется на расстоянии r от точки первого столкновения [7]. Аналогичное представление можно получить и для $\delta\rho_H^{(b)}$.

Естественно, что они не имеют аналога в классической кинетической теории, в которой такие процессы, вносящие вклад в изменение транспортного времени релаксации, рассматриваются как мгновенные события. Отношению V_L/V_F в [29] можно придать смысл дополнительного тангенса угла Холла $2V_L/V_F = \operatorname{tg} \theta_{WL}$, который обусловлен ларморовской прецессией замкнутых электронных траекторий и отличается от тангенса классического холловского угла $\operatorname{tg} \theta = \omega_c l / V_F$. Другими словами, в процессе многократного рассеяния электронов происходит накопление их дополнительного смещения в направлении, перпендикулярном току.

Полученные в данной работе результаты, на наш взгляд, позволяют глубже понять физическую природу квантовых явлений переноса в неупорядоченных системах. В частности, они открывают перспективы их теоретического изучения в области квантующих магнитных полей, для которой недавно получен ряд интересных экспериментальных результатов [25]. Наряду с этим они поднимают множество проблем, требующих своего решения. Так, для более достоверной интерпретации эксперимента необходимо пересмотреть соотношение локализационных и электрон-электронных вкладов в кинетические коэффициенты двумерных неупорядоченных систем [3,15]. Также актуальным представляется вновь возникающий вопрос о поведении коэффициента Холла в окрестности перехода металл-диэлектрик и многие другие.

Выражаем благодарность сотрудникам лабораторий физики полупроводников Института физики металлов УрО РАН и Уральского университета за плодотворное и заинтересованное обсуждение результатов данной работы. Мы также благодарим Г.М. Минькова, познакомившего нас с неопубликованными результатами измерений холловского сопротивления, выполненных его группой. Авторы особенно признательны И.В. Горному за консультации, позволившие преодолеть ряд трудностей при выполнении этой работы.

Список литературы

- [1] Л.П. Горьков, А.И. Ларкин, Д.Е. Хмельницкий. Письма в ЖЭТФ **30**, 248 (1979).
- [2] S. Hikami, A.I. Larkin, Y. Nagaoka. *Progr. Theor. Phys.* **63**, 707 (1980).
- [3] B.L. Altshuler, A.G. Aronov, D.E. Khmel'nitskii, A.I. Larkin. In: *Quantum Theory of Solids* / Ed. by I.M. Lifshits. MIR Publishers, Moscow (1982). P. 130.
- [4] G. Bergman. *Phys. Reports* **101**, 1 (1984).
- [5] A. Kawabata. *J. Phys. Soc. Jap.* **53**, 3540 (1984).
- [6] В.М. Гаспарян, А.Ю. Зюзин. ФТТ **27**, 1662 (1985).
- [7] M.I. Dyakonov. *Solid State Commun.* **92**, 711 (1994).
- [8] A. Zduniak, M.I. Dyakonov, W. Knap. *Phys. Rev.* **B56**, 1996 (1997).
- [9] A.P. Dmitriev, I.V. Gornyi, V.Yu. Kachorovskii. *Phys. Rev.* **B56**, 9910 (1997).
- [10] И.В. Горный. Автореф. канд. дисс. Санкт-Петербург (1998).
- [11] А.К. Аржников, С.Г. Новокшенов, С.В. Пахомов. ТМФ **94**, 486 (1993).
- [12] H. Fukuyama. *J. Phys. Soc. Jap.* **49**, 644 (1980).
- [13] Б.Л. Альтшулер, А.Г. Аронов, А.И. Ларкин, Д.Е. Хмельницкий. ЖЭТФ **81**, 768 (1980).
- [14] B.L. Altshuler, D.E. Khmel'nitskii, A.I. Larkin, P.A. Lee. *Phys. Rev.* **B22**, 5142 (1980).
- [15] A. Houghton, J.R. Senna, S.C. Ying. *Phys. Rev.* **B25**, 2196 (1982).
- [16] J.M. Ziman. *Principles of the Theory of Solids*. Cambridge (1972).
- [17] H. Bateman, A. Erdelyi. *Higher Transcendental Functions*. V. 1. McGraw-Hill Book Company, INC (1953).
- [18] А.Г. Грошев, С.Г. Новокшенов. ЖЭТФ **111**, 1787 (1997).
- [19] И.М. Суслов. ЖЭТФ **108**, 1686 (1995).
- [20] H. Bateman, A. Erdelyi. *Higher Transcendental Functions*. V. 2. McGraw-Hill Book Company, INC (1953).
- [21] B. Shapiro, E. Abrahams. *Phys. Rev.* **B24**, 4025 (1981).
- [22] Е.А. Котов, М.В. Садовский. ФММ **60**, 22 (1985).
- [23] A. Bastin, C. Leviner, O. Betbeder-Matibet, P. Nozieres. *J. Phys. Chem. Solids.* **32**, 1811 (1971).
- [24] R.R. Gerhardts. *Z. Phys.* **B22**, 327 (1975).
- [25] С.С. Мурзин. Письма в ЖЭТФ **67**, 201 (1998).