# Новый нелинейный интенсивностный эффект Керра в полярной геометрии

© В.И. Белотелов[*,**], А.П. Пятаков[*,**], С.А. Еремин[***], Г.Г. Мусаев[***], А.К. Звездин[*,**]

[*] Институт общей физики Российской академии наук,
117942 Москва, Россия
[**] Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
119899 Москва, Россия
[***] Дагестанский государственный университет,
367025 Махачкала, Россия

(Поступила в Редакцию 4 февраля 2000 г.
В окончательной редакции 9 марта 2000 г.)

Рассмотрена задача об отражении электромагнитной волны на второй оптической гармонике от полубесконечной оптически изотропной магнитной среды для направления однородной намагниченности, соответствующего полярному эффекту Керра. В первом приближении по намагниченности с помощью метода тензорных функций Грина получены выражения для комплексных амплитуд поля волны в случаях падения на среду *s*- и *p*-поляризованных волн, а также их суперпозиции. Показано, что в последнем случае нелинейный полярный эффект Керра является интенсивностным. Приведены полученные в результате численного эксперимента зависимости интенсивностного эффекта от угла падения индуцирующей волны и от угла, характеризующего ее поляризацию. Приведен сравнительный анализ линейного и нелинейного интенсивностных эффектов Керра.

Работа поддержана РФФИ (проект № 99.02-17830), МН (проект № 97-1071), INTAS (проект № 97-705).

Недавно были предсказаны, а вскоре после этого и обнаружены новые магнитооптические (МО) эффекты, связанные с поверхностью магнитных сред, — нелинейные эффекты Керра на второй гармонике [1–5]. Хотя генерация второй гармоники запрещена в материалах с центром инверсии, а таковыми является большинство из широко распространенных материалов (Fe, Co, Ni, FeNi и т. д.), на поверхности или интерфейсе симметрия относительно пространственной инверсии нарушается. Нарушение этих симметрий и приводит к возникновению МО явлений на второй гармонике, которые, как выяснилось, значительно превышают по величине соответствующие линейные эффекты [4,5]. Нелинейные МО эффекты являются новым, перспективным инструментом для исследования с высоким пространственным и временны́м разрешением магнитных поверхностей и интерфейсов в магнитных пленках и многослойных структурах. Большое значение угла поворота плоскости поляризации волны на второй гармонике (относительно поляризации индуцирующей волны) обеспечивает высокий контраст между областями с противоположными направлениями намагниченности [6–10]. Например, для многослойной структуры Co/Cu (100) он может превосходить 50%.

Наряду с поворотом плоскости поляризации в некоторых геометриях падения волны возможно изменение интенсивности отраженной волны в зависимости от намагниченности образца. Такие эффекты получили название интенсивностных эффектов. Интенсивностными являются линейный и нелинейный экваториальные эффекты Керра. В [11] говорится о существовании линейного интенсивностного полярного эффекта в случае падения на среду волны, плоскость поляризации которой составляет с плоскостью падения некоторый отличный от 0 и 90° угол.

Можно предположить, что наряду с этим линейным эффектом должен иметь место аналогичный нелинейный эффект, который сравним или даже превосходит линейный эффект. Основной задачей данной работы является теоретическое исследование возможности существования такого нелинейного интенсивностного эффекта.

В [10] уже изучалась конфигурация, соответствующая полярному эффекту Керра. Рассматривалось падение *s*- или *p*-поляризованной волны на полубескоенчную магнитную среду. Из уравнения Максвелла были найдены нормальные моды поля с частотой $2\omega$ в магнитной и в прозрачной средах, с помощью граничных условий было получено поле второй гармоники отраженной волны.

В настоящей работе также исследуется геометрия полярного эффекта. Однако рассматриваются не только *s*- и *p*-поляризации индуцирующей волны, но и более общий случай падения на магнитную среду плоскополяризованной волны, являющейся суперпозицией *s*- и *p*-поляризованных волн.

Решение задачи о нахождении поля отраженной волны для всех трех случаев проводится с помощью метода тензорных электродинамических функций Грина [12–14], который излагается далее. Такой подход оказывается очень удобным и весьма перспективным для решения задач, связанных с отражением волны от магнитных сред с различным распределением намагниченности. Одним из достоинств метода является то, что в функциях Грина уже учтены максвеллловские граничные условия.

В работе показано, что в том случае, когда плоскость поляризации падающей волны составляет отличный от 0 и 90° угол с плоскостью падения, нелинейный полярный эффект Керра является интенсивностным, т. е. возникает контраст между областями среды с противоположными направлениями намагниченности. Для

$s$- и $p$-поляризованных волн интенсивностный эффект обращается в 0. Углы вращения поляризации и эллиптичности отраженных волн совпадают с приведенными в [10]. Приведены аналитические формулы, описывающие эффект, и результаты численных экспериментов, характеризующие интенсивностный эффект в сравнении с соответствующим линейным эффектом.

## 1. Уравнение для поля на частоте $2\omega$

Пусть на поверхность ферромагнитной среды, заполняющей все полупространство $z < 0$, падает под некоторым углом $\varphi$ световая волна $\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}^{(i)} \times \times \exp(-i(\mathbf{kr}-\omega t))$ с волновым вектором $\mathbf{k} = (k_x, 0, k_z)$ (рис. 1). Под действием поля этой волны среда приобретает поляризацию $\mathbf{P}$, которая слагается из линейной по электрическому полю поляризации и поверхностной поляризации, квадратичной по полю. Поверхностная поляризация изменяется в зависимости от времени с частотой $2\omega$ и является источником плоских волн с частотой $2\omega$, затухающих в полубесконечной магнитной среде. Поэтому поляризация среды приобретает еще одно слагаемое, зависящее линейно от поля с частотой $2\omega$.

Таким образом,

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_\omega(\mathbf{r})\exp(i\omega t) + \mathbf{P}_{2\omega}(\mathbf{r})\exp(i2\omega t) + \tilde{\mathbf{P}}^{\mathrm{surf}}(\mathbf{r})\exp(i2\omega t)\delta(z), \tag{1a}$$

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi_\omega\mathbf{E}(\mathbf{r})\exp(i\omega t) + \varepsilon_0\chi_{2\omega}\mathbf{E}(\mathbf{r})\exp(i2\omega t) + \tilde{\mathbf{P}}^{\mathrm{surf}}(\mathbf{r})\exp(i2\omega t)\delta(z). \tag{1b}$$

Материальное уравнение $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}_{\mathrm{tot}} + \mathbf{P}$ приобретает вид

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\bar{\varepsilon}(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})\exp(i\omega t) + \varepsilon_0\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r})\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})\exp(i2\omega t) + \tilde{\mathbf{P}}^{\mathrm{surf}}(\mathbf{r})\exp(i2\omega t)\delta(z), \tag{2}$$

где $\bar{\varepsilon}$ и $\tilde{\varepsilon}$ — тензоры диэлектрической проницаемости магнитной среды на частотах $\omega$ и $2\omega$ соответственно [10,15].

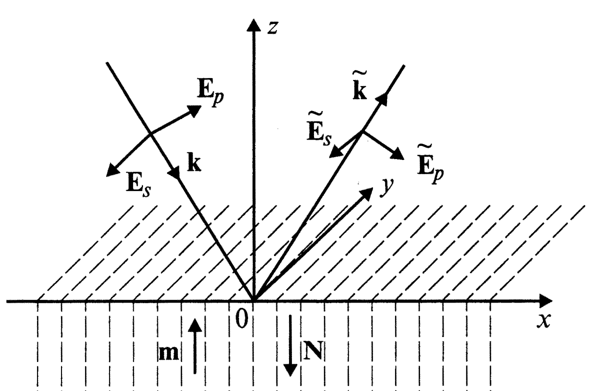


**Рис. 1.** К постановке задачи о падении световой волны на полубесконечную ферромагнитную среду.

$$\bar{\varepsilon} = n^2\begin{pmatrix} 1 & -im_3Q & im_2Q \\ im_3Q & 1 & -im_1Q \\ -im_2Q & im_1Q & 1 \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad z < 0;$$

$$\bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad z > 0, \tag{3}$$

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{n}^2\begin{pmatrix} 1 & -im_3\tilde{Q} & im_2\tilde{Q} \\ im_3\tilde{Q} & 1 & -im_1\tilde{Q} \\ -im_2\tilde{Q} & im_1\tilde{Q} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad z < 0;$$

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad z > 0, \tag{4}$$

где $n$ и $\tilde{n}$ — комплексные коэффициенты преломления ($\mathrm{Im}\, n > 0$) для частот $\omega$ и $2\omega$ соответственно, $Q$, $\tilde{Q}$ — магнитооптические параметры, линейно зависящие от намагниченности $\mathbf{M}$, для частот $\omega$ и $2\omega$ соответственно, $m_1$, $m_2$, $m_3$ — координаты вектора $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M$, характеризующего направление намагниченности.

Уравнение Максвелла ($\mu = 1$)

$$\mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{E}_{\mathrm{tot}} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{D}}{\partial t^2} \tag{5}$$

при учете (2) разбивается на две части, первая из которых зависит от времени с частотой $\omega$, а вторая — с частотой $2\omega$

$$\mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) - \varepsilon_0\frac{\omega^2}{c^2}\bar{\varepsilon}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \tag{6a}$$

$$\mathrm{rot\,rot}\,\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) - \varepsilon_0\frac{4\omega^2}{c^2}\tilde{\varepsilon}\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \frac{4\omega^2}{c^2}\tilde{\mathbf{P}}^{\mathrm{surf}}(\mathbf{r})\delta(z). \tag{6b}$$

Из уравнения (6$b$), как будет показано далее, может быть найдено поле второй гармоники отраженной волны.

## 2. Нелинейная поляризация и намагниченность среды

Поверхностная нелинейная оптическая поляризация второго порядка может быть записана в виде [1,16]

$$\tilde{P}_i^{\mathrm{surf}} = \chi^{(2)}_{i,j,k}(\mathbf{M})E_jE_k, \tag{7}$$

где тензор поверхностной нелинейной восприимчивости $\chi^{(2)}$ зависит линейно от намагниченности $\mathbf{M}$, $E_j$ — составляющая электрического поля световой волны в среде. Из симметрийных соображений следует, что поляризация $\tilde{\mathbf{P}}^{\mathrm{surf}}$ может быть представлена в виде [10,15,17]

$$\tilde{\mathbf{P}}^{\mathrm{surf}} = \tilde{\mathbf{P}}_0 + \tilde{\mathbf{P}}_m, \tag{8}$$

где

$$\tilde{\mathbf{P}}_0 = \chi_1\mathbf{E}(\mathbf{EN}) + \chi_2\mathbf{E}^2\mathbf{N}, \tag{8a}$$

а линейно зависящий от намагниченности вклад есть

$$\tilde{\mathbf{P}}_m = \chi_3 \mathbf{E}\big(\mathbf{E}(\mathbf{mN})\big) + \chi_4 \mathbf{E}^2[\mathbf{mN}] + \chi_5[\mathbf{Em}](\mathbf{EN}) + \chi_6[\mathbf{EN}][\mathbf{Em}]. \qquad (8b)$$

Здесь $\chi_1$, $\chi_2$ — нелинейные оптические и $\chi_3$, $\chi_4$, $\chi_5$, $\chi_6$ — нелинейные магнитооптические параметры, $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M$ — вектор, характеризующий направление намагниченности, $\mathbf{N}$ — нормаль к поверхности.

## 3. Комплексные амплитуды поля волны на частоте $\omega$

В правую часть уравнения $(6b)$ входит нелинейная поверхностная поляризация, которая зависит от электрического поля $\mathbf{E}$ на частоте $\omega$ в магнитном веществе. Поэтому, для того чтобы решить уравнение $(6b)$, необходимо из уравнения $(6a)$ найти поле $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ при $z < 0$.

В работе [15] это уравнение было решено, и мы приведем здесь полученные результаты для интересующей нас полярной конфигурации с $\mathbf{m} = (0, 0, \pm 1)$, когда намагниченность ортогональна поверхности среды и лежит в плоскости падения света.

Комплексная амплитуда электрического поля в магнитной среде может быть представлена в виде суммы двух слагаемых: $\mathbf{E} = \mathbf{E}^0 + \mathbf{E}^a$, где $\mathbf{E}^0$ — часть поля, не зависящая от магнитных анизотропных свойств среды на частоте $\omega$, а $\mathbf{E}^a$ — часть поля, учитывающая существование анизотропии.

Составляющие электрического поля в веществе

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1^0 + \mathbf{E}_1^a,$$

$$\mathbf{E}_1^0 = \frac{2\beta\cos\varphi}{Y}\,\mathbf{E}_p^{(i)}, \qquad \mathbf{E}_1^a = \pm\frac{iQn^2\cos^2\varphi}{XY}\,\mathbf{E}_s^{(i)},$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_2^0 + \mathbf{E}_2^a,$$

$$\mathbf{E}_2^0 = \frac{2\cos\varphi}{X}\,\mathbf{E}_s^{(i)}, \qquad \mathbf{E}_2^a = \mp\frac{iQn^2\cos\varphi}{XY}\,\mathbf{E}_p^{(i)},$$

$$\mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_3^0 + \mathbf{E}_3^a,$$

$$\mathbf{E}_3^0 = \frac{2\alpha\cos\varphi}{Y}\,\mathbf{E}_p^{(i)}, \qquad \mathbf{E}_3^a = \mp\frac{iQ\alpha\cos\varphi}{XY}\,\mathbf{E}_s^{(i)}, \qquad (9)$$

где $\alpha = \sin\varphi$, $X = \beta + \cos\varphi$, $Y = \beta + n^2\cos\varphi$, $\beta = \sqrt{n^2 - \alpha^2}$; $n$ — показатель преломления среды на частоте $\omega$; $\mathbf{E}_s^{(i)}$ и $\mathbf{E}_p^{(i)}$ — комплексные амплитуды $s$- и $p$-составляющих поляризации падающей волны.

## 4. Решение уравнения для поля с частотой $2\omega$

Перепишем уравнение $(6b)$ через компоненты

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \delta_{\mu\nu}\frac{\partial^2}{\partial x_\nu^2} - \varepsilon_0\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu}(\mathbf{r})\frac{4\omega^2}{c^2}\right)\tilde{E}_\nu(\mathbf{r}) = \frac{4\omega^2}{c^2}\tilde{P}_\mu^{\mathrm{surf}}(\mathbf{r})\delta(z). \qquad (10)$$

Тензор диэлектрической проницаемости при $z < 0$ может быть представлен в виде

$$\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu}(\mathbf{r}) = \tilde{\varepsilon}\delta_{\mu\nu} + \Delta\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu}, \ \text{ где } \ \Delta\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu} = -i\tilde{n}^2\tilde{Q}e_{\mu\nu\kappa}m_k, \quad (11)$$

где $e_{\mu\nu\kappa}$ — антисимметричный тензор Леви–Чевита $(\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu}(\mathbf{r}) = \delta_{\mu\nu}$ при $z > 0)$.

Введем операторы

$$L_{\mu\nu}^0 = \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \delta_{\mu\nu}\frac{\partial^2}{\partial x_\nu^2} - \varepsilon_0\tilde{\varepsilon}\frac{4\omega^2}{c^2}\delta_{\mu\nu}, \qquad (12a)$$

$$L_{\mu\nu}^1 = \varepsilon_0\frac{4\omega^2}{c^2}\Delta\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu}. \qquad (12b)$$

Тогда уравнение (10) может быть записано следующим образом:

$$\big(L_{\mu\nu}^0 - L_{\mu\nu}^1\big)\tilde{E}_\nu(\mathbf{r}) = \frac{4\omega^2}{c^2}\tilde{P}_\mu^{\mathrm{surf}}(\mathbf{r})\delta(z). \qquad (13)$$

Ограничиваясь линейным по намагниченности приближением, представим вектор $\tilde{\mathbf{P}}_0$ (см. $(8a)$) в виде суммы двух слагаемых: $\tilde{\mathbf{P}}_0(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{P}}^{00}(\mathbf{r}) + \tilde{\mathbf{P}}^a(\mathbf{r})$, где

$$\tilde{\mathbf{P}}^{00}(\mathbf{r}) = \chi_1\mathbf{E}^0(\mathbf{r})\big(\mathbf{E}^0(\mathbf{r})\mathbf{N}\big) + \chi_2\big(\mathbf{E}^0(\mathbf{r})\mathbf{E}^0(\mathbf{r})\big)\mathbf{N} \ \text{—} \qquad (14a)$$

составляющая поляризации $\tilde{\mathbf{P}}_0(\mathbf{r})$, не зависящая от магнитооптических (анизотропных) свойств среды на частоте $\omega$,

$$\tilde{\mathbf{P}}^a(\mathbf{r}) = \chi_1\mathbf{E}^0(\mathbf{r})\big(\mathbf{E}^a(\mathbf{r})\mathbf{N}\big) + \chi_1\mathbf{E}^a(\mathbf{r})\big(\mathbf{E}^0(\mathbf{r})\mathbf{N}\big) + 2\chi_2\big(\mathbf{E}^0(\mathbf{r})\mathbf{E}^a(\mathbf{r})\big)\mathbf{N} \ \text{—} \qquad (14b)$$

составляющая поляризации $\tilde{\mathbf{P}}_0(\mathbf{r})$, зависящая от магнитооптических (анизотропных) свойств среды на частоте $\omega$. $\mathbf{E}^0(\mathbf{r})$ и $\mathbf{E}^a(\mathbf{r})$ — слагаемые электрического поля на частоте $\omega$ в среде, комплексные амплитуды которых были введены формулой (9).

В этом приближении в выражение для поляризации $\tilde{\mathbf{P}}_m$ (см. $(8b)$) входит только поле $\mathbf{E}^0$.

Поле, являющееся решением уравнения (13), можно представить в виде суммы трех слагаемых

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{E}}^{00}(\mathbf{r}) + \tilde{\mathbf{E}}^0(\mathbf{r}) + \tilde{\mathbf{E}}^1(\mathbf{r}), \qquad (15)$$

где поле $\tilde{\mathbf{E}}^{00}(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению

$$L_{\mu\nu}^0\tilde{E}_\nu^{00}(\mathbf{r}) = \frac{4\omega^2}{c^2}\,\tilde{P}_\mu^{00}(\mathbf{r})\delta(z), \qquad (16)$$

а поле $\tilde{\mathbf{E}}^0(\mathbf{r})$ — уравнению

$$L_{\mu\nu}^0\tilde{E}_\nu^0(\mathbf{r}) = \frac{4\omega^2}{c^2}\,\tilde{P}_\mu^a(\mathbf{r})\delta(z), \qquad (17)$$

$\tilde{\mathbf{E}}^1(\mathbf{r})$ — поправка к полю, учитывающая анизотропные магнитные свойства вещества на частоте $2\omega$.

Рассматривая первое приближение, учитывающее лишь линейные по намагниченности слагаемые, уравнение (13) можно переписать в виде

$$L_{\mu\nu}^0\tilde{E}_\nu^1(\mathbf{r}) = \frac{4\omega^2}{c^2}\,\tilde{P}_\mu^m(\mathbf{r})\delta(z) + L_{\mu\nu}^1\tilde{E}_\nu^{00}(\mathbf{r}). \qquad (18)$$

Решение задачи о нахождении второй гармоники отраженной волны сводится к решению дифференциальных уравнений в частных производных (16)–(18).

Эти уравнения могут быть решены с использованием тензорных электродинамических функций Грина $D_{\mu,\nu}(\mathbf{r},\mathbf{r}',2\omega)$ [12–14].

Введем функции Грина уравнением

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\lambda \partial x_\mu} - \delta_{\lambda\mu}\frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2} - \varepsilon_0\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r})\frac{4\omega^2}{c^2}\delta_{\lambda\mu}\right) \times D_{\mu\nu}(\mathbf{r},\mathbf{r}',2\omega) = -\delta_{\lambda\nu}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \qquad (19)$$

Граничные условия, которые используются при решении этого уравнения, вытекают из требования непрерывности тангенциальных компонент $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ и нормальных компонент $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ при переходе через плоскость $z = 0$. Поэтому полученные с помощью функции Грина поля заведомо будут удовлетворять максвелловским граничным условиям.

С помощью функций Грина $D_{\mu\nu}(\mathbf{r},\mathbf{r}',2\omega)$ решения уравнений (16)–(18) запишутся в виде

$$\tilde{E}^{00}_\mu(\mathbf{r}) = -\frac{4\omega^2}{c^2}\int d\mathbf{r}' D_{\mu\nu}(\mathbf{r},\mathbf{r}',2\omega)\tilde{P}^{00}_\nu(\mathbf{r}')\delta(z'), \qquad (20a)$$

$$\tilde{E}^{0}_\mu(\mathbf{r}) = -\frac{4\omega^2}{c^2}\int d\mathbf{r}' D_{\mu\nu}(\mathbf{r},\mathbf{r}',2\omega)\tilde{P}^{a}_\nu(\mathbf{r}')\delta(z'), \qquad (20b)$$

$$\tilde{E}^{1}_\mu(\mathbf{r}) = -\frac{4\omega^2}{c^2}\left(\int d\mathbf{r}' D_{\mu\nu}(\mathbf{r},\mathbf{r}',2\omega)\tilde{P}^{m}_\nu(\mathbf{r}')\delta(z') + \int\limits_{z<0} d\mathbf{r}' D_{\mu\nu}(\mathbf{r},\mathbf{r}',2\omega)\varepsilon_0\Delta\tilde{\varepsilon}_{\nu\kappa}\tilde{E}^{00}_k(\mathbf{r}')\right). \qquad (20c)$$

Для вычисления интегралов в уравнениях (20) перейдем к Фурье-образам функций Грина

$$D_{\mu\nu}(\mathbf{r},\mathbf{r}',2\omega) = \int \frac{4d^2\mathbf{k}_\parallel}{(2\pi)^2}\exp\big(2i\mathbf{k}_\parallel(\mathbf{r}_\parallel - \mathbf{r}'_\parallel)\big) \times d_{\mu\nu}(2\mathbf{k}_\parallel, 2\omega, z, z'), \qquad (21)$$

$$d_{\mu\nu}(2\mathbf{k}_\parallel, 2\omega, z, z') = \int d(\mathbf{r}-\mathbf{r}'_\parallel)\exp\big(-2i\mathbf{k}_\parallel(\mathbf{r}_\parallel - \mathbf{r}'_\parallel)\big) \times D_{\mu\nu}(\mathbf{r},\mathbf{r}',2\omega), \qquad (22)$$

где $\mathbf{k}_\parallel = (k_x,0,0) = \mathbf{k}(\alpha,0,0)$, $\alpha = \sin\varphi$, $\mathbf{r}_\parallel = (x,y,0)$.

Представим поля, входящие в выражение для $\tilde{\mathbf{P}}^{\mathrm{surf}}(\mathbf{r})$, в виде

$$E^0_\nu(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k}_\parallel\mathbf{r}_\parallel)E^0_\nu(z),$$
$$E^a_\nu(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k}_\parallel\mathbf{r}_\parallel)E^a_\nu(z). \qquad (23)$$

Подставляя (23) в (16)–(18) и учитывая (22), получаем

$$\tilde{E}^{00}_\mu(\mathbf{r}) = -\frac{4\omega^2}{c^2}\exp(2i\mathbf{k}_\parallel\mathbf{r}_\parallel)d_{\mu\nu}(2\mathbf{k}_\parallel,2\omega,z,0-)\tilde{P}^{00}_\nu(0-), \qquad (24a)$$

$$\tilde{E}^{0}_\mu(\mathbf{r}) = -\frac{4\omega^2}{c^2}\exp(2i\mathbf{k}_\parallel\mathbf{r}_\parallel)d_{\mu\nu}(2\mathbf{k}_\parallel,2\omega,z,0-)\tilde{P}^{a}_\nu(0-), \qquad (24b)$$

$$\tilde{E}^{1}_\mu(\mathbf{r}) = -\frac{4\omega^2}{c^2}\exp(2i\mathbf{k}_\parallel\mathbf{r}_\parallel)\Big(d_{\mu\nu}(2\mathbf{k}_\parallel,2\omega,z,0-)\tilde{P}^{m}_\nu(0-) + \varepsilon_0\int\limits_{-\infty}^{0} dz' d_{\mu\nu}(2\mathbf{k}_\parallel,2\omega,z,z')\Delta\tilde{\varepsilon}_{\nu\kappa}\tilde{E}^{00}_k(z')\Big), \qquad (24c)$$

где $d_{\mu\nu}(2\mathbf{k}_\parallel,2\omega,z,0-) = \lim\limits_{z'\to 0-} d_{\mu\nu}(2\mathbf{k}_\parallel,2\omega,z,z')$, $\tilde{\mathbf{P}}(0-) = \lim\limits_{z'\to 0}\tilde{P}(z')$, $\tilde{\mathbf{P}}(z)\exp(2i\mathbf{k}_\parallel\mathbf{r}_\parallel) = \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r})$. Интегрирование по $z'$ в (20$a$), (20$b$) и в первом слагаемом (20$c$) произведено с учетом того, что поляризация среды $\tilde{\mathbf{P}}^{\mathrm{surf}}$ является поверхностной и отлична от нуля лишь в тонком приповерхностном слое.

Таким образом, используя выражения для Фурье-образов функций Грина и производя интегрирование в (24$c$), которое сводится к нахождению первообразной для экспоненты, можно в явном виде получить выражение для поля отраженной волны.

## 5. Фурье-образы функций Грина

Фурье-образы функций Грина, необходимые для вычисления поля отраженной волны, приведены далее [12] (заметим, что не все они являются непрерывными функциями $z$, некоторые из них терпят разрыв при $z = 0$).

1) Фурье-образы функции Грина при $z > 0$, $z' < 0$

$$d_{11} = -\eta\frac{\cos\varphi\tilde{\beta}}{\tilde{Y}}\exp\big(2ik_z z\big)\exp\big(-2ik\tilde{\beta}z'\big),$$
$$d_{12} = 0,$$
$$d_{13} = \eta\alpha\frac{\cos\varphi}{\tilde{Y}}\exp\big(2ik_z z\big)\exp\big(-2ik\tilde{\beta}z'\big),$$
$$d_{21} = 0,$$
$$d_{22} = -\frac{\eta}{\tilde{X}}\exp(2ik_z z)\exp(-2ik\tilde{\beta}z'),$$
$$d_{23} = 0,$$
$$d_{31} = \eta\frac{\tilde{\beta}\alpha}{\tilde{Y}}\exp(2ik_z z)\exp(-2ik\tilde{\beta}z'),$$
$$d_{32} = 0,$$
$$d_{33} = \frac{-\eta\alpha^2}{\tilde{Y}}\exp(2ik_z z)\exp(-2ik\tilde{\beta}z'). \qquad (25)$$

2) Фурье-образы функции Грина при $z < 0$, $z' = (0-)$ (для вычисления поля $\mathbf{E}^{00}$ в среде)

$$d_{11} = -\eta\frac{\cos\varphi\tilde{\beta}}{\tilde{Y}}\exp(-2ik\tilde{\beta}z),$$
$$d_{12} = 0,$$
$$d_{13} = -\eta\alpha\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{Y}\tilde{n}^2}\exp(-2ik\tilde{\beta}z),$$

$$
\begin{gathered}
d_{21}=0, \\
d_{22}=-\frac{\eta}{\tilde{X}}\exp(-2ik\tilde{\beta}z) \\
d_{23}=0, \\
d_{31}=\frac{-\eta\alpha\cos\varphi}{\tilde{Y}}\exp(-2ik\tilde{\beta}z), \\
d_{32}=0, \\
d_{33}=\frac{-\eta\alpha^2}{\tilde{Y}\tilde{n}^2}\exp(-2ik\tilde{\beta}z)+\frac{\eta}{2ik\tilde{n}^2}\delta(z).
\end{gathered}
\tag{26}
$$

В формулах (25), (26) $\alpha=\sin\varphi$, $k=\frac{\omega}{c}$, $\tilde{\beta}=\sqrt{\tilde{n}^2-\alpha^2}$, $\tilde{X}=\tilde{\beta}+\cos\varphi$, $\tilde{Y}=\tilde{\beta}+\tilde{n}^2\cos\varphi$, $\eta=\frac{i}{2k\varepsilon_0}$, $k_z=k\cos\varphi$, $\tilde{n}$ — показатель преломления среды на частоте $2\omega$.

## 6. Комплексные амплитуды поля отраженной волны на частоте $2\omega$

В случае $\mathbf{m}=(0,0,+1)$, который соответствует конфигурации полярного эффекта Керра, составляющие $\tilde{P}^{\text{surf}}$ равны (8), (14)

$$
\begin{gathered}
\tilde{P}_1=-\chi_1(E_1E_3^0+E_1^0E_3^a)\mp(\chi_5+\chi_6)E_2^0E_3^0, \\
\tilde{P}_2=-\chi_1(E_2E_3^0+E_2^0E_3^a)\pm(\chi_5+\chi_6)E_1^0E_3^0, \\
\tilde{P}_3=-\chi_2\Big((E_1^0)^2+2E_1^0E_1^a\Big)-\chi_2\Big((E_2^0)^2+2E_2^0E_2^a\Big) \\
-(\chi_1+\chi_2)\Big((E_3^0)^2+2E_3^0E_3^a\Big),
\end{gathered}
\tag{27}
$$

где комплексные амплитуды $E_1$, $E_2$, $E_3$ известны из (9).

Таким образом, с помощью (9), (24)–(27) составляющие поля отраженной волны на частоте $2\omega$ определяются через $s$- и $p$-составляющие поля падающей волны ($E_p^i$ и $E_s^i$) и магнитооптические параметры магнитной среды.

Для удобства последующего анализа полученных результатов в выражениях для полей отраженных волн будем выделять слагаемые, не зависящие от намагниченности среды, — $C=\tilde{E}^{00}$ и слагаемые, линейно зависящие от намагниченности среды, — $D=\tilde{E}^0+\tilde{E}^1$.

Комплексная амплитуда поля отраженной волны на частоте $2\omega$ складывается из компонент $\tilde{E}_s$ и $\tilde{E}_p$ с $s$- и $p$-поляризацией соответственно.

Если падающая волна $s$-поляризована, то

$$
\begin{gathered}
\tilde{E}_s^{\pm}=C_s^{\pm}+D_s^{\pm}, \\
C_s^{\pm}=0, \\
D_s^{\pm}=\mp\frac{\alpha k}{\varepsilon_0\tilde{X}}\left(\frac{2\cos\varphi}{X}E_s^{(i)}\right)^2\left(\chi_1\frac{Q}{Y}+\chi_2\frac{\tilde{Q}}{\tilde{Y}}\right), \\
\tilde{E}_p^{\pm}=C_p^{\pm}+D_p^{\pm}, \\
C_p^{\pm}=\frac{2i\alpha k}{\varepsilon_0\tilde{Y}}\left(\frac{2\cos\varphi}{X}E_s^{(i)}\right)^2\chi_2, \\
D_p^{\pm}=0.
\end{gathered}
\tag{28}
$$

Если падающая волна $p$-поляризована, то

$$
\begin{gathered}
C_s^{\pm}=0, \\
D_s^{\pm}=\mp\frac{\alpha k}{\varepsilon_0\tilde{X}}\left(\frac{2\cos\varphi}{Y}E_p^{(i)}\right)^2\left[\chi_1\Big(\frac{n^2Q}{X}\right. \\
\left.+\frac{\tilde{Q}}{\tilde{Y}}(\beta\tilde{n}^2\cos\varphi+\alpha^2)\Big)+\chi_2\frac{n^2\tilde{Q}}{\tilde{Y}}-2i(\chi_5+\chi_6)\beta\right], \\
C_p^{\pm}=-\frac{2i\alpha k}{\varepsilon_0\tilde{Y}}\left(\frac{2\cos\varphi}{Y}E_p^{(i)}\right)^2\left[\chi_1(\beta\tilde{\beta}-\alpha^2)-\chi_2n^2\right], \\
D_p^{\pm}=0.
\end{gathered}
\tag{29}
$$

Пусть теперь на магнитную среду падает волна с плоскостью поляризации, которая составляет с плоскостью падения некоторый угол $\psi$. Тогда $E_p^{(i)}=E^i\cos\psi$, $E_s^{(i)}=E^i\sin\psi$.

В такой конфигурации получаются следующие выражения для комплексных амплитуд компонент поля отраженной волны:

$$
\begin{gathered}
C_p^{\pm}=-\frac{2ki\alpha(2\cos\varphi)^2}{\varepsilon_0\tilde{Y}}\left[\frac{\chi_1}{Y^2}(E_p^{(i)})^2\{\beta\tilde{\beta}-\alpha^2\}\right. \\
\left.-\chi_2\Big\{\frac{n^2}{Y^2}(E_p^{(i)})^2+\frac{(E_s^{(i)})^2}{X^2}\Big\}\right], \\
D_p^{\pm}=\mp\frac{2k\alpha(2\cos\varphi)^2}{\varepsilon_0\tilde{Y}}\left[\frac{\chi_1Q}{2Y^2X}(\beta\tilde{\beta}-n^2\tilde{\beta}\cos\varphi-2\alpha^2)\right. \\
-\chi_1\frac{\tilde{Q}\tilde{n}^2}{2X\tilde{X}Y}+\chi_2Q\Big\{\frac{n^2\beta\cos\varphi}{Y^2X}-\frac{\alpha^2}{Y^2X}-\frac{n^2}{X^2Y}\Big\} \\
\left.+i(\chi_5+\chi_6)\frac{\tilde{\beta}}{XY}\right]E_p^{(i)}E_s^{(i)}, \\
C_s^{\pm}=-\frac{2ki\alpha\chi_1(2\cos\varphi)^2}{\varepsilon_0\tilde{X}XY}E_p^{(i)}E_s^{(i)}, \\
D_s^{\pm}=\mp\frac{2k\alpha(2\cos\varphi)^2}{\varepsilon_0\tilde{X}}\left[\frac{\chi_1Q}{2}\left\{\frac{(E_s^{(i)})^2}{X^2Y}+\frac{n^2(E_p^{(i)})^2}{X^2Y}\right\}\right. \\
+\frac{\tilde{Q}}{2\tilde{Y}}\left[\chi_1\left\{\frac{\tilde{n}^2\beta}{Y^2}\cos\varphi+\frac{\alpha^2}{Y^2}\right\}(E_p^{(i)})^2+\chi_2\Big\{\frac{n^2}{Y^2}(E_p^{(i)})^2\right. \\
\left.\left.+\frac{(E_s^{(i)})^2}{X^2}\Big\}\right]-\frac{i(\chi_5+\chi_6)\beta E_p^{(i)}}{Y^2}\right]
\end{gathered}
\tag{30}
$$

## 7. Интенсивностный нелинейный эффект Керра

Определим интенсивностный нелинейный эффект Керра как относительное изменение $\delta=(I_+-I_-)/(I_++I_-)$ интенсивности отраженной волны при переходе среды из состояния с однородной намагниченностью $\mathbf{m}=(0,0,+1)$–$I_+$ в состояние с однородной намагниченностью $\mathbf{m}=(0,0,-1)$–$I_-$.

Выразим величины $I_+$ и $I_-$ через составляющие отраженной волны $C^\pm$ и $D^\pm$

$$I_\pm = (\mathbf{E}_s^\pm + \mathbf{E}_p^\pm)(\mathbf{E}_s^\pm + \mathbf{E}_p^\pm)^*$$

$$= (C_s^\pm + D_s^\pm)(C_s^\pm + D_s^\pm)^* + (C_p^\pm + D_p^\pm)(C_p^\pm + D_p^\pm)^*.$$

Замечая, что $C_{s,p}^+ = C_{s,p}^-$, а $D_{s,p}^+ = -D_{s,p}^-$, получаем

$$I_+ - I_- = 2\Big(C_s^+(D_s^+)^* + (C_s^+)^* D_s^+ + C_p^+(D_p^+)^* + (C_p^+)^* D_p^+\Big),$$

$$I_+ + I_- = 2\Big(\left|C_s^+\right|^2 + \left|D_s^+\right|^2 + \left|C_p^+\right|^2 + \left|D_p^+\right|^2\Big).$$

Таким образом,

$$\delta = \frac{C_s^+(D_s^+)^* + (C_s^+)^* D_s^+ + C_p^+(D_p^+)^* + (C_p^+)^* D_p^+}{\left|C_s^+\right|^2 + \left|D_s^+\right|^2 + \left|C_p^+\right|^2 + \left|D_p^+\right|^2}, \quad (31)$$

где величины $C_s$, $C_p$, $D_s$, $D_p$ определены формулами (30).

Если на среду падает $s$- или $p$-поляризованная волна, то $C_s = D_p = 0$, следовательно, $\delta = 0$ и интенсивностный эффект обращается в 0.

Если же на магнитную среду падает поляризованная волна с углом поворота плоскости поляризации $\psi$ ($\psi \neq 0$, $\psi \neq \frac{\pi}{2}$), то все составляющие $C$ и $D$ отличны от нуля и $\delta$ в общем случае отлично от нуля. При такой геометрии нелинейный полярный эффект Керра является интенсивностным.

Приведем в качестве примера характерные зависимости $\delta$ от угла падения $\varphi$ и от угла поляризации падающего света $\psi$ для нелинейного полярного эффекта Керра при $\tilde{n} = n = 2.36 + 3.48i$, $Q = \tilde{Q} = -0.034 + 0.003i$ ($Q$ и $n$ соответствуют железу [10]), $\chi_2/\chi_1 = 0.1$, $\chi_5/\chi_1 = \chi_6/\chi_1 = 0.01i$, $\operatorname{Im}\chi_1 = 0$ (значение этих отношений близки к приведенным в [18,19]).

На рис. 2 представлены зависимости $\delta$ от угла поляризации $\psi$ падающего света при различных углах падения $\varphi$. Величина интенсивностного эффекта в максимуме кривой ($\psi \approx 85°$) монотонно возрастает при увеличении угла $\varphi$, достигая наибольшего значения при скользящем угле падения ($\varphi = 90°$).

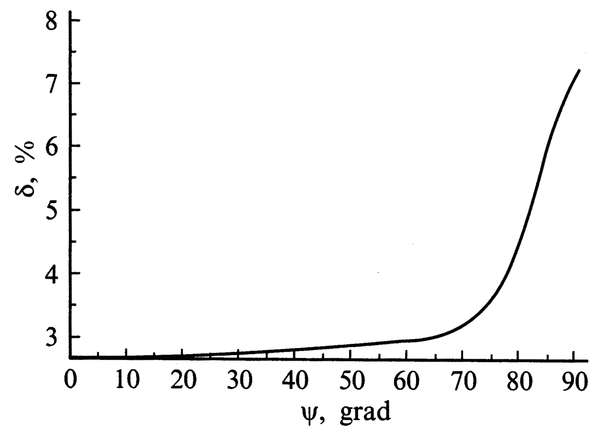


**Рис. 3.** Зависимость относительного изменения интенсивности $\delta$ от угла падения $\varphi$ при угле поляризации $\psi = 85°$.

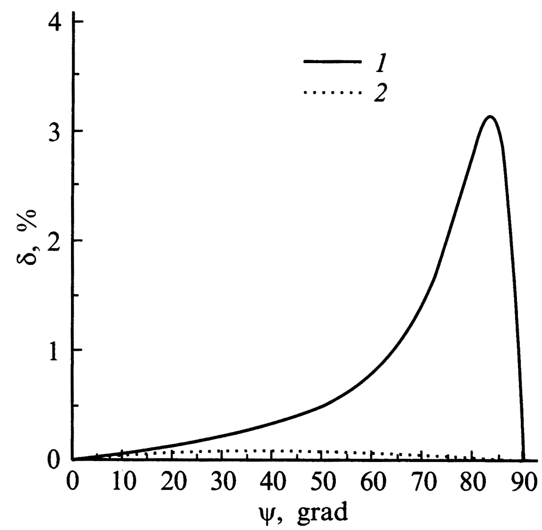


**Рис. 4.** Зависимости относительного изменения интенсивности $\delta$ от угла поляризации $\psi$ при угле падения $\varphi = 60°$. *1* — нелинейный эффект, *2* — линейный эффект.

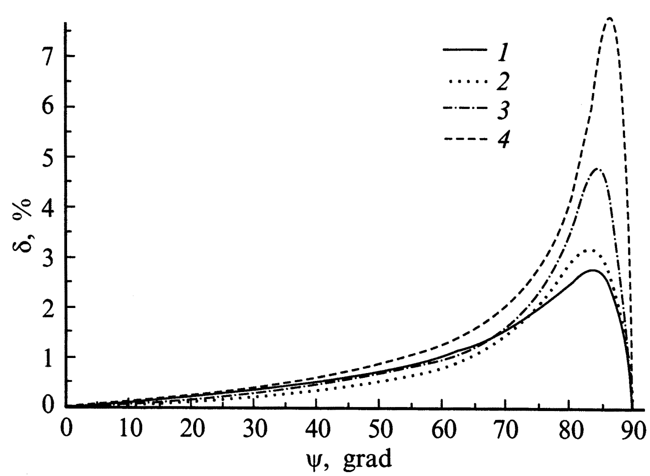


**Рис. 2.** Зависимости относительного изменения интенсивности $\delta$ от угла поляризации $\psi$ при различных углах падения $\varphi$ (*1* — 0°, *2* — 60°, *3* — 80°, *4* — 90°).

Зависимость величины $\delta$ от угла $\varphi$ при оптимальном угле поляризации $\psi = 85°$ показана на рис. 3.

На рис. 4 приведены для сравнения зависимости линейного и нелинейного эффектов от угла поляризации $\psi$ при угле падения $\varphi = 60°$.

Подчеркнем, что интенсивностный нелинейный эффект Керра является $T$-нечетным, т. е. изменяет знак при обращении времени (а следовательно, при обращении намагниченности и магнитного поля). Это важное свойство позволяет использовать его при изучении доменной структуры, магнитных солитонов и вихрей, доменных границ, линий Блоха и т. д.

К основным результатам данной работы можно отнести предсказание существования нелинейного интенсивностного полярного эффекта Керра и получение аналитических выражений, характеризиуюших $s$- и $p$-составляющие отраженной волны на второй гармонике через оптические и магнитооптические параметры среды для случаев падения $s$- или $p$-поляризованной волны или плоскополяризованной суперпозиции $s$- и $p$-поляризованных волн на полубесконечную магнитную среду в конфигурации полярного эффекта. Все результаты даны в линейном приближении по параметрам, зависящим от намагниченности.

Для известных значений параметров приведены зависимости интенсивностного эффекта от угла падения и от угла поляризации падающей волны. Приведен сравнительный анализ линейного и нелинейного интенсивностных эффектов.

Показано, что для решения задач, связанных с отражением волны от магнитных сред с различным распределением намагниченности, весьма перспективным является использование метода электродинамических тензорных функций Грина.

## Список литературы


[1] Ru-Pin Pan, H.D. Wei, Y.R. Shen. Phys. Rev. **B39**, 1229 (1989).
[2] J. Reif, J.C. Zink, C.M. Schneider, J. Kirschner. Phys. Rev. Lett. **67**, 2878 (1991).
[3] G. Spierings, V. Koutsos, H.A. Wierenga, M.V.J. Prins, D. Abraham, Th. Rasing. Surf. Sci. **287**, 747 (1993).
[4] U. Pustogowa, W. Hübner, K.H. Bennemann. Phys. Rev. **B49**, 10 031 (1994).
[5] B. Koopmans, M. Groot Koerkamp, Th. Rasing, H. v.d.Berg. Phys. Rev. Lett. **74**, 3692 (1995).
[6] G. Spierings, V. Koutsos, H.A. Wierenga, M.V. Prins, D. Abraham, T. Rasing. J. Magn. Magn. Mater. **121**, 109 (1993).
[7] H.A. Wierenga, M.V. Prins, Th. Rasing. Physica **B204**, 281 (1995).
[8] T.M. Crawford, C.T. Rogers, T.J. Silva, Y.K. Kim. J. Appl. Phys. **81**, 4354 (1997).
[9] T.M. Crawford, C.T. Rogers, T.J. Silva, Y.K. Kim. IEEE Trans. Magn. **38**, 3598 (1997).
[10] А.К. Звездин, Н.Ф. Кубраков. ЖЭТФ **116**, *1* (*7*) 141 (1999).
[11] Г.С. Кринчик. Физика магнитных явлений. Изд-во МГУ, М. (1985).
[12] A.A. Maradudin, D.L. Mills. Phys. Rev. **B11**, *4*, 1392 (1975).
[13] В.А. Кособукин. ФТТ **35**, *4*, 884 (1993).
[14] V.A. Kosobukin. J. Magn. Magn. Mater. **153**, 397 (1996).
[15] A.K. Zvesdin, V.A. Kotov. Modern magneto-optics and magneto-optical materials. IOP Publishing, UK (1997).
[16] Y.R. Shen. The Principles of Nonlinear Opticals. Willey, N. Y. (1984).
[17] A.K. Zvesdin. Physica **A241**, 444 (1997).
[18] U. Pustogowa, W. Hübner, K.H. Bennemann. Phys. Rev. **B48**, 8607 (1993).
[19] U. Pustogowa, W. Hübner, K.H. Bennemann. Surf. Sci. **307-309**, 1129 (1994).