

Влияние нормальных процессов фонон-фононного рассеяния на взаимное увлечение электронов и фононов и кинетические эффекты в вырожденных проводниках

© И.Г. Кулеев

Институт физики металлов Уральского отделения Российской академии наук,
620219 Екатеринбург, Россия

E-mail: kuleev@imp.uran.ru

(Поступила в Редакцию 2 марта 2000 г.)

Рассмотрено влияние нормальных процессов фонон-фононного рассеяния на релаксацию импульса в неравновесной электрон-фононной системе. Решена система кинетических уравнений для электронной и фононной функций распределения с учетом взаимного увлечения электронов и фононов. Вычислены кинетические коэффициенты проводников в линейном приближении по параметру вырождения. Проанализировано влияние нормальных процессов рассеяния фононов на электрон-фононное увлечение и кинетические эффекты в проводниках с вырожденной статистикой носителей.

В выполненных до настоящего времени работах [1–13], посвященных исследованию электрон-фононного увлечения в металлах и полупроводниках предполагалось, что релаксацию импульса как электронов, так и фононов в неравновесной электрон-фононной системе можно описать, вводя полные частоты релаксации электронов $\nu_e(k)$ и фононов $\nu_{ph}(q)$ соответственно. Это приближение оправдывалось сложностью решения системы интегральных уравнений для неравновесных электрон-фононной функций распределения. В нулевом приближении по параметру вырождения электронного газа $k_B T / \zeta \ll 1$ (ζ — энергия Ферми) эта система решена в работах [10,11]. В работах [12,13] автору удалось решить систему кинетических уравнений для неравновесной электрон-фононной системы в линейном приближении по параметру вырождения и произвольной степени взаимного влияния неравновесности электронов и фононов. Это позволило корректно определить влияние взаимного увлечения электронов и фононов на кинетические эффекты в проводниках с вырожденной статистикой носителей тока [12,13] в рамках однопараметрического описания.

Прогресс, достигнутый в работах [12,13], позволяет выйти за рамки однопараметрического описания неравновесной электрон-фононной системы и включить в рассмотрение процессы фонон-фононного рассеяния (N-процессы). Эти процессы рассеяния не вносят вклада в релаксацию импульса фононов и соответственно в теплосоппротивление [14–18]. Однако они формируют неравновесную функцию распределения фононов и приводят к релаксации фононной подсистемы к локально равновесному распределению со средней дрейфовой скоростью \mathbf{u} [14–18]. Поскольку большинство механизмов релаксации импульса фононов зависят от частоты фононов, то N-процессы, перераспределяя энергию и импульс между различными фононными модами, препятствуют сильному отклонению от равновесной заселенности в каждой моде. Роль N-процессов в теории решеточной

теплопроводности хорошо изучена [14–18]. Учет этих процессов рассеяния необходим в условиях, когда частота релаксации фононов в N-процессах $\nu_{phN}(q)$ будет больше либо сравнима с резистивной частотой $\nu_{phR}(q)$, которая обусловлена релаксацией фононов на границах, примесях, электронах и в процессах переброса. Здесь мы покажем, что учет N-процессов необходим и при рассмотрении влияния электрон-фононного увлечения на кинетические эффекты в твердых телах.

Дело в том, что термоэдс, теплопроводность и термомагнитные эффекты находятся из условия равенства нулю полного тока через образец. В этом случае средняя скорость упорядоченного движения электронов в любом физически малом объеме образца равна нулю. Поэтому передача импульса упорядоченного движения электронов фононам мала и возникает только в первом порядке по параметру вырождения. С другой стороны, при наличии градиента температуры существует стационарный поток фононов от горячего конца образца к холодному, и передача импульса упорядоченного движения фононов электронам происходит уже в нулевом приближении по параметру вырождения. Заметим, что при низких температурах, когда электрон-фононное увлечение вносит заметный вклад в величину термоэдс, частота релаксации фононов $\nu_{phN}(q) > \nu_{phR}(q)$. Из сказанного выше следует, что релаксацию импульса фононов в неравновесной электрон-фононной системе необходимо учитывать более строго, чем это было сделано в рамках однопараметрического описания [1–13]. В данной работе неравновесность фононной подсистемы описывается тремя параметрами: двумя частотами релаксации $\nu_{phN}(q)$ и $\nu_{phR}(q)$ и скоростью дрейфа \mathbf{u} . Такая постановка задачи является актуальной для проводников с вырожденной статистикой носителей тока.

В работе исследуется влияние нормальных фонон-фононных процессов рассеяния на взаимное увлечение электронов и фононов и кинетические эффекты в проводниках с вырожденной статистикой носителей тока.

В разделе 1 система кинетических уравнений вместе с уравнением баланса импульса электронов преобразованы в систему интегральных уравнений для функций, описывающих неравновесность электронов. В разделе 2 эта система решена в линейном приближении по параметру вырождения. В разделе 3 вычислены электропроводность и термоэдс вырожденных проводников. В разделе 4 проанализированы соотношения симметрии Онзагера и роль нормальных процессов рассеяния фононов в теплопроводности.

1. Система кинетических уравнений для неравновесной электрон-фононной системы с учетом нормальных процессов рассеяния фононов

Хорошо известно [14–18], что нормальные процессы рассеяния фононов не вносят вклада в релаксацию импульса фононов, а приводят фононную подсистему к локально равновесному распределению Планка со средней скоростью u_λ , которая может быть различной для фононов с различной поляризацией λ

$$N(\mathbf{q}, \mathbf{u}_\lambda) = \left(\exp \left(\frac{\hbar\omega_{q\lambda} - \hbar\mathbf{q}\mathbf{u}_\lambda}{k_B T} \right) - 1 \right)^{-1} \cong N_{q\lambda}^0 + \frac{\hbar\mathbf{q}\mathbf{u}_\lambda}{k_B T} N_{q\lambda}^0 (N_{q\lambda}^0 + 1), \quad (1)$$

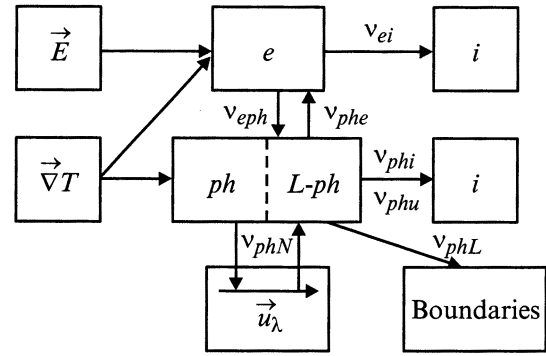
где $N_{q\lambda}^0$ — функция Планка. Схема, иллюстрирующая перераспределение и релаксацию импульса, полученного электрон-фононной системой от электрического поля и градиента температуры, приведена на рисунке. Механизмы электрон-фононной релаксации, характеризуемые частотами ν_{eph} и ν_{phe} , приводят к перераспределению импульса внутри электрон-фононной системы. Рассеяние электронов на примесях ν_{ei} , фононов на границах ν_{phL} , фононов на примесях (механизм Рэлея) ν_{phi} и фонон-фононное рассеяние с перебросом ν_{phu} приводят к релаксации полного импульса электрон-фононной системы. N-процессы перераспределяют импульс между различными фононными модами и приводят к дрейфу фононов со скоростью u_λ .

Система кинетических уравнений для неравновесных электронной $f(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ и фононной $N^\lambda(\mathbf{q}, \mathbf{r})$ функций распределения с учетом нормальных процессов фонон-фононного рассеяния имеет вид [12–18]

$$\frac{e}{\hbar} \mathbf{E}_0 \frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}} + (\mathbf{v}_k \nabla_{\mathbf{r}}) f_{\mathbf{k}} = I_{ei}(f_{\mathbf{k}}) + I_{eph}(f_{\mathbf{k}}, N_{\mathbf{q}}^\lambda),$$

$$\mathbf{v}_q^\lambda \nabla_{\mathbf{r}} N_{\mathbf{q}}^\lambda = - (N_{\mathbf{q}}^\lambda - N_{q\lambda}^0) \nu_{ph}^{(1)\lambda} - (N_{\mathbf{q}}^\lambda - N(\mathbf{q}, \mathbf{u}_\lambda)) \nu_{phN}^\lambda + I_{phe}(N_{\mathbf{q}}^\lambda, f_{\mathbf{k}}). \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{v}_q^\lambda = s_\lambda \mathbf{q}/q$ — групповая скорость акустических фононов с поляризацией λ , частота релаксации $\nu_{ph}^{(1)\lambda}(q)$ включает все неэлектронные резистивные



Схема, иллюстрирующая релаксацию импульса электрон-фононной системы при учете нормальных процессов рассеяния фононов. Здесь ν_{phi} , ν_{phL} , ν_{phN} — частоты релаксации фононов на примесях (механизм Рэлея), границах и на фононах в N-процессах соответственно.

механизмы рассеяния фононов: рассеяние фононов на фононах в процессах переброса, дефектах и границах образца. Интегралы столкновений электронов с примесями I_{ei} , фононами I_{eph} и фононов с электронами I_{phe} определены в [3,5,12]. Согласно уравнению (2), подсистема фононов описывается не одним параметром $\nu_{ph}^\lambda(q) = \nu_{phN}^\lambda(q) + \nu_{phR}^\lambda(q)$ — полной частотой релаксации импульса фононов [1–13], а тремя параметрами: двумя частотами релаксации $\nu_{phN}^\lambda(q)$ и $\nu_{phR}^\lambda(q)$ ($\nu_{phR}^\lambda(q) = \nu_{phi}^\lambda(q) + \nu_{phL}^\lambda(q) + \nu_{phe}^\lambda(q) + \nu_{phu}^\lambda(q)$ — резистивная частота релаксации фононов) и средней скоростью дрейфа фононов u_λ . Известны два механизма нормальных трехфононных процессов рассеяния: механизмы Херинга [19] и Саймонса [20]. Механизм рассеяния Херинга, в котором участвуют фононы различных поляризаций ($t+l \Leftrightarrow l$, $t+l \Leftrightarrow t$), стремится установить одинаковую скорость дрейфа для фононов обеих поляризаций $u_t = u_f = u_{ph}$. В механизме релаксации Саймонса [20] участвуют фононы одной поляризации. Поэтому для этого механизма N-процессов рассеяния скорость дрейфа будет различной для продольных и поперечных фононов. Резистивная частота также различна для продольных и поперечных фононов. Поэтому далее будет рассмотрен более общий случай различных скоростей дрейфа для продольных и поперечных фононов $u_l \neq u_t$. Заметим, что в ряде работ допускается довольно произвольное обращение с N-процессами рассеяния фононов. Так, в работах [21] при рассмотрении влияния взаимного увлечения электронов и фононов на термомагнитные эффекты авторы учли механизм релаксации Саймонса в качестве единственного неэлектронного механизма рассеяния фононов. Однако этот механизм формально был включен в резистивную частоту релаксации импульса фононов. В связи с этим результаты, полученные в этих работах, нельзя признать вполне обоснованными.

Для нахождения u_λ система кинетических уравнений (2) должна быть дополнена уравнением баланса импульса фононов, которое получается путем умножения

уравнения (1) на вектор импульса фононов $\hbar\mathbf{q}$ и суммирования по всем векторам \mathbf{q} . При этом необходимо учесть, что в нормальных процессах фонон-фононного рассеяния полный импульс фононной подсистемы не меняется

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}} \hbar\mathbf{q}\nu_{\text{phN}}^{\lambda}(q)(N_{\mathbf{q}}^{\lambda} - N(\mathbf{q}, \mathbf{u}_{\lambda})) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}} \hbar\mathbf{q}\nu_{\text{phN}}^{\lambda}(q) \times \left[g_{\lambda}(\mathbf{q}) - \frac{\hbar\mathbf{q}\mathbf{u}_{\lambda}}{k_{\text{B}}T} N_{q\lambda}^0(N_{q\lambda}^0 + 1) \right] = 0. \quad (3)$$

Представим функции распределения электронов и фононов в виде

$$f_{\mathbf{k}} = f_0(\varepsilon_{\mathbf{k}}) + \delta f_{\mathbf{k}}, \quad N_{\mathbf{q}}^{\lambda} = N_{q\lambda}^0 + g_{\lambda}(\mathbf{q}), \quad (4)$$

где $f_0(\varepsilon_{\mathbf{k}})$ и $N_{q\lambda}^0$ — локально-равновесные функции распределения для электронов и фононов, а $\delta f_{\mathbf{k}}$ и $g_{\lambda}(\mathbf{q})$ — неравновесные добавки к функциям распределения, линейные по внешним воздействиям. Линеаризуем интегралы столкновений по этим добавкам. Интегралы столкновений $I_{\text{ie}}(\delta f_{\mathbf{k}})$, $I_{\text{phe}}(f_0, g_{\lambda}(\mathbf{q}))$, а также $I_{\text{eph}}(\delta f_{\mathbf{k}}, N_{q\lambda}^0)$ в приближении упругого рассеяния представим через частоты релаксации [12,13]. При расчете интеграла столкновений $I_{\text{eph}}(f_0, g_{\lambda}(\mathbf{q}))$ учтем неупругость столкновений электронов с фононами в первом порядке по параметру неупругости $\hbar\omega_{q\lambda}/\zeta$. Представим функцию распределения электронов $\delta_{\mathbf{k}}$ в стандартном виде [2–13]

$$\delta f_{\mathbf{k}} = \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}}} \right) (\mathbf{v}_{\mathbf{k}}\chi(\varepsilon)). \quad (5)$$

Подставим выражения (1), (4) и (5) в (2) и получим уравнение для фононной функции распределения. Поскольку соответствующие выкладки аналогичны работе [12], то сразу запишем выражение для функции $g_{\lambda}(\mathbf{q})$

$$g_{\lambda}(\mathbf{q}) = -\frac{N_{q\lambda}^0(N_{q\lambda}^0 + 1)}{\nu_{\text{ph}}^{\lambda}(q)} \frac{\hbar\omega_{q\lambda}}{k_{\text{B}}T^2} (\mathbf{v}_{\mathbf{q}}^{\lambda}\nabla T) + \frac{\hbar\mathbf{q}\mathbf{u}_{\lambda}}{k_{\text{B}}T} \times N_{q\lambda}^0(N_{q\lambda}^0 + 1) \frac{\nu_{\text{phN}}^{\lambda}(q)}{\nu_{\text{ph}}^{\lambda}(q)} - \frac{\nu_{\text{phe}}^{\lambda}(q)}{\nu_{\text{ph}}^{\lambda}(q)} \times \frac{N_{q\lambda}^0(N_{q\lambda}^0 + 1)}{k_{\text{B}}T} \int_{\varepsilon_{q/2}}^{\infty} d\varepsilon \left(-\frac{\partial f_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right) \tilde{m}(\varepsilon) \times (\hbar\mathbf{q}\chi(\varepsilon)) = g_{0\lambda}(\mathbf{q}) + g_{u\lambda}(\mathbf{q}) + g_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{q}). \quad (6)$$

Здесь $\nu_{\text{ph}}^{\lambda} = \nu_{\text{ph}}^{(1)\lambda} + \nu_{\text{phe}}^{\lambda}$, а $\nu_{\text{phe}}^{\lambda}(k_{\text{F}}, q)$ — частота релаксации импульса фононов на электронах [10–12]. Неравновесная добавка $g_{0\lambda}(\mathbf{q})$ обусловлена непосредственным действием градиента температуры на фононную подсистему, а функция $g_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{q})$ учитывает влияние неравновесных электронов. Величина $g_{u\lambda}(\mathbf{q})$ обусловлена нормальными процессами фонон-фононного рассеяния, приводящими к дрейфу фононов со скоростью \mathbf{u}_{λ} . Из

выражений (2), (3) и (6) получим уравнение баланса импульса фононов, из которого скорость дрейфа фононов \mathbf{u}_{λ} может быть выражена через функцию $\chi(\varepsilon)$ следующим образом:

$$\mathbf{u}_{\lambda} = \frac{s_{\lambda}^2 \Psi_{\text{NR}}^{\lambda}}{k_{\text{B}}T \Psi_{\text{NR}}^{\lambda}} (-k_{\text{B}}\nabla T) + \frac{2s_{\lambda}^2}{k_{\text{B}}T \Psi_{\text{NR}}^{\lambda}} \left(\frac{k_{\text{F}}}{q_{T\lambda}} \right)^3 \times \int_0^{\infty} d\varepsilon \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) \tilde{m}(\varepsilon) \psi_{\text{ephN}}^{\lambda}(\varepsilon) \chi(\varepsilon) = \mathbf{u}_{0\lambda} + \Delta\mathbf{u}_{\lambda}. \quad (7)$$

Здесь

$$z_{\mathbf{q}}^{\lambda} = \frac{\hbar\omega_{q\lambda}}{k_{\text{B}}T} = \frac{q}{q_{T\lambda}}, \quad q_{T\lambda} = \frac{k_{\text{B}}T}{\hbar s_{\lambda}}, \quad z_{2k}^{\lambda} = \frac{2k}{q_{T\lambda}},$$

$$\tilde{m}(\varepsilon) = \frac{m(\varepsilon)}{m_{\text{F}}}, \quad m_{\text{F}} = m(\zeta)$$

— эффективная масса электрона на уровне Ферми, а остальные функции определяются выражениями

$$\psi_{\text{ephN}}^{\lambda}(\varepsilon) = \left\langle \frac{\nu_{\text{eph}}^{\lambda}(k_{\text{F}}, q) \nu_{\text{phN}}^{\lambda}(q)}{\nu_{\text{ph}}^{\lambda}(q)} \right\rangle_{z_{2k}^{\lambda}} \equiv \int_0^{z_{2k}^{\lambda}} dz_{\mathbf{q}}^{\lambda} \frac{\nu_{\text{eph}}^{\lambda}(k_{\text{F}}, q) \nu_{\text{phN}}^{\lambda}(q)}{\nu_{\text{ph}}^{\lambda}(q)},$$

$$\Psi_{\text{N}}^{\lambda} = \left\langle \frac{\nu_{\text{phR}}^{\lambda}(q)}{\nu_{\text{ph}}^{\lambda}(q)} \right\rangle_{z_{d\lambda}} \equiv \int_0^{z_{d\lambda}} dz_{\mathbf{q}}^{\lambda} (z_{\mathbf{q}}^{\lambda})^4 \frac{\nu_{\text{phR}}^{\lambda}(q)}{\nu_{\text{ph}}^{\lambda}(q)} N_{q\lambda}^0(N_{q\lambda}^0 + 1),$$

$$\Psi_{\text{NR}}^{\lambda} = \left\langle \frac{\nu_{\text{phR}}^{\lambda}(q) \nu_{\text{phN}}^{\lambda}(q)}{\nu_{\text{ph}}^{\lambda}(q)} \right\rangle_{z_{d\lambda}}, \quad (8)$$

где $z_{d\lambda} = \hbar\omega_{d\lambda}/k_{\text{B}}T$ ($\omega_{d\lambda}$ — дебаевская частота фононов с поляризацией λ). В скорости дрейфа фононов \mathbf{u}_{λ} мы выделили две части: первая часть $\mathbf{u}_{0\lambda}$ обусловлена непосредственным действием градиента температуры на фононную подсистему, а вторая — $\Delta\mathbf{u}_{\lambda}$ связана с влиянием неравновесности электронов.

Прежде чем переходить к дальнейшим расчетам, подставим (7) в выражение (6) для фононной функции распределения $g_{\lambda}(\mathbf{q})$ и проведем перегруппировку членов, которая значительно упростит дальнейшие выкладки. Для этого в функции $g_{\lambda}(\mathbf{q})$ объединим член $g_{0\lambda}(\mathbf{q})$ с вкладом $g_{u\lambda}(\mathbf{q})$, пропорциональным скорости дрейфа фононов $\mathbf{u}_{0\lambda}$, тогда получим

$$g_{\lambda}(\mathbf{q}) = g_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{q}) + g_{\Delta u\lambda}(\mathbf{q}) + g_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{q}),$$

$$g_{\Delta u\lambda}(\mathbf{q}) = \frac{(\hbar\mathbf{q}\Delta\mathbf{u}_{\lambda})}{k_{\text{B}}T} N_{q\lambda}^0(N_{q\lambda}^0 + 1) \frac{\nu_{\text{phN}}^{\lambda}(q)}{\nu_{\text{ph}}^{\lambda}(q)}, \quad (9)$$

$$g_\lambda^{(1)}(\mathbf{q}) = -\frac{N_{q\lambda}^0(N_{q\lambda}^0 + 1)}{\tilde{\nu}_{ph}^\lambda(q)} \frac{\hbar\omega_{q\lambda}}{k_B T^2} (\mathbf{v}_q^\lambda \nabla T),$$

$$\tilde{\nu}_{ph}^\lambda(q) = \nu_{ph}^\lambda(q) \left(1 + \nu_{phN}^\lambda(q) \frac{\Psi_N^\lambda}{\Psi_{NR}^\lambda} \right)^{-1}, \quad (10)$$

где $\tilde{\nu}_{ph}^\lambda(q)$ — эффективная частота релаксации импульса фононов, перенормированная нормальными процессами рассеяния фононов. Известно [14–18], что решеточная теплопроводность определяется именно этой частотой. Здесь мы покажем, что и термоэдс увлечения также будет определяться эффективной частотой релаксации импульса фононов. Очевидно, что при выполнении неравенства $\nu_{phN}^\lambda(q) \ll \nu_{phR}^\lambda(q)$ величина $\tilde{\nu}_{ph}^\lambda(q) \approx \nu_{phR}^\lambda(q)$, вклад дрейфа фононов в функцию распределения $g_\lambda(\mathbf{q})$ мал и им можно пренебречь. В этом предельном случае однопараметрическое приближение, принятое в работах [1–13] для описания влияния неравновесности фононной подсистемы на явления электронного процесса в проводниках с вырожденной статистикой носителей тока, является оправданным. В противоположном предельном случае $\nu_{phN}^\lambda(q) \gg \nu_{phR}^\lambda(q)$ необходимо учитывать влияние дрейфа фононов на обмен импульса в неравновесной электрон-фононной системе. Таким образом, в условиях, когда нормальные процессы играют существенную роль в перераспределении импульса фононов, необходимо описание фононной подсистемы в расширенном базисе — в рамках трехпараметрического приближения.

Цель данной работы — исследование роли дрейфа фононов, обусловленного N-процессами, на явления электронного переноса. Для полуметаллов и полупроводников с вырожденной статистикой носителей тока с $n_e < n_a/4$ (n_a — число атомов в единице объема) выполняется неравенство $2k_F < q_d$ (q_d — дебаевский волновой вектор) [22]. В этом случае для функции $\chi(\varepsilon)$, аналогично тому как это сделано в работе [12], может быть получено уравнение, которое удобнее представить в виде неоднородного интегрального уравнения Вольтерра

$$\chi(\varepsilon) = \chi_1(\varepsilon) + \chi_\Lambda(\varepsilon) + \frac{\tilde{m}^2(\varepsilon)\tau(\varepsilon)}{\tilde{k}^3} \mathbf{Q}(\varepsilon)$$

$$\equiv \chi_{1\Lambda}(\varepsilon) + \chi_2(\varepsilon),$$

$$\mathbf{Q}(\varepsilon) = \Phi(\varepsilon) \int_\varepsilon^\infty d\varepsilon' \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon'} \right) \tilde{m}(\varepsilon') \chi(\varepsilon')$$

$$+ \int_0^\varepsilon d\varepsilon' \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon'} \right) \tilde{m}(\varepsilon') \Phi(\varepsilon') \chi(\varepsilon')$$

$$= \Phi(\varepsilon) \mathbf{K}^>(\varepsilon) + \mathbf{K}^<(\varepsilon),$$

$$\Phi(\varepsilon) = \sum_\lambda \left\langle \Phi_\lambda(q) \right\rangle_{z_{2k}^\lambda},$$

$$\Phi_\lambda(q) = \frac{\nu_{phc}^\lambda(k_F, q) \nu_{eph}^\lambda(k_F, q)}{\nu_{ph}^\lambda(q)}. \quad (11)$$

Здесь $k = k/k_F$, $\hbar k_F$ — фермиевский импульс, $\tau(\varepsilon)$ — полное время релаксации электронов, $\tau^{-1}(\varepsilon_k) = \nu_e(k) =$

$= \nu_{ei}(k) + \nu_{eph}(k)$, $\nu_{ei}(k)$ и $\nu_{eph}(k)$ — частоты релаксации на примесях и фононах. Обратная величина $(\Phi(\varepsilon))^{-1}$ определяет время τ_{e-ph-e} , в течение которого импульс, переданный электронами в фононную подсистему, возвращается обратно электронам [12]. Функция $\chi_2(\varepsilon)$ учитывает влияние неравновесности электронов на электроны через подсистему фононов и связана взаимным увлечением электронов и фононов. Функция $\chi_1(\varepsilon)$ учитывает непосредственное действие электрического поля и градиента температуры на электронную подсистему, а также эффект увлечения электронов фононами

$$\chi_1(\varepsilon) = -e\tau(\varepsilon) \left(\mathbf{E} + \frac{k_B}{e} \left(\frac{(\tilde{m}(\varepsilon))^2}{\tilde{k}^3} \tilde{A}_{ph}(\varepsilon) + \frac{\varepsilon - \zeta}{k_B T} \right) \nabla T \right),$$

$$\tilde{A}_{ph}(\varepsilon) = \sum_\lambda \frac{m_F s_\lambda^2}{k_B T} \left\langle \frac{\nu_{eph}^\lambda(k_F, q)}{\tilde{\nu}_{ph}^\lambda(q)} \right\rangle_{z_{2k}^\lambda}$$

$$\equiv \sum_\lambda \frac{m_F s_\lambda^2}{k_B T} \int_0^{z_{2k}^\lambda} dz_q^\lambda \frac{\nu_{eph}^\lambda(k_F, q)}{\tilde{\nu}_{ph}^\lambda(q)}. \quad (12)$$

Функции $\tilde{A}_{ph}(\varepsilon)$ и $\Phi(\varepsilon)$ зависят от энергии ε только через верхий предел интегрирования $z_{2k(\varepsilon)}^\lambda$ [12]. Величина $\chi_\lambda(\varepsilon)$ обусловлена влиянием дрейфа фононов на функцию распределения электронов. Выражение для нее имеет вид

$$\chi_\Lambda(\varepsilon) = \frac{\tilde{m}^2(\varepsilon)\tau(\varepsilon)}{\tilde{k}^3} \Lambda(\varepsilon),$$

$$\Lambda(\varepsilon) = \sum_\lambda m_F \Delta \mathbf{u}_\lambda \psi_{ephN}^\lambda(\varepsilon), \quad (13)$$

$$\Lambda(\varepsilon) = \sum_\lambda \frac{2m_F s_\lambda^2 \psi_{ephN}^\lambda(\varepsilon)}{k_B T \Psi_{NR}^\lambda} \left(\frac{k_F}{qT\lambda} \right)^3$$

$$\times \int_0^\infty d\varepsilon \left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) \tilde{m}(\varepsilon) \psi_{ephN}^\lambda(\varepsilon) \chi(\varepsilon). \quad (14)$$

Выражения (11)–(14) определяют систему двух интегральных уравнений для величин $\chi(\varepsilon)$ и $\Lambda(\varepsilon)$, характеризующих неравновесность электронной подсистемы. В работе [12] показано, что для интегрального уравнения (11) можно построить регулярную схему расчета функции $\chi(\varepsilon)$, не прибегая к разложению по малому параметру, связанному со слабостью электрон-фононного взаимодействия или малостью эффекта взаимного влияния неравновесности электронов и фононов. Далее будет показано, что систему уравнений (11)–(14) можно решить и при учете нормальных процессов рассеяния фононов, используя лишь условие сильного вырождения $k_B T / \zeta \ll 1$.

2. Решение кинетического уравнения для электронов в вырожденных полупроводниках

Решение интегрального уравнения (11) удобнее искать не для функции $\chi(\varepsilon)$, а для $\mathbf{Q}(\varepsilon)$. Воспользовавшись формулами (11) и (12), найдем

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\varepsilon) &= \mathbf{Q}_1(\varepsilon) + \int_0^\varepsilon d\varepsilon' \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon'} \right) \Phi(\varepsilon') \varphi(\varepsilon') \mathbf{Q}(\varepsilon') \\ &\quad + \Phi(\varepsilon) \int_\varepsilon^\infty d\varepsilon' \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon'} \right) \varphi(\varepsilon') \mathbf{Q}(\varepsilon'), \\ \mathbf{Q}_1(\varepsilon) &= \int_0^\varepsilon d\varepsilon' \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon'} \right) \Phi(\varepsilon') \tilde{m}(\varepsilon') \chi_{1\Lambda}(\varepsilon') + \Phi(\varepsilon) \\ &\quad \times \int_\varepsilon^\infty d\varepsilon' \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon'} \right) \tilde{m}(\varepsilon') \chi_{1\Lambda}(\varepsilon'), \\ \varphi(\varepsilon) &= \left(\frac{\tilde{m}(\varepsilon)}{\tilde{k}(\varepsilon)} \right)^3 \tau(\varepsilon). \end{aligned} \quad (15)$$

Величина $\Lambda(\varepsilon)$, определяющая влияние дрейфа на функцию распределения электронов, выражается через функцию $\mathbf{Q}(\varepsilon)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \Lambda(\varepsilon) &= \frac{1}{1 - K_u(\varepsilon)} \sum_\lambda K_u^\lambda(\varepsilon) \left\{ -e \mathbf{E}_{\text{Au}}^\lambda + \frac{\nu_F}{\psi_{\text{ephN}}^\lambda(\zeta)} \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^\infty d\varepsilon \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) \varphi(\varepsilon) \psi_{\text{ephN}}^\lambda(\varepsilon) \mathbf{Q}(\varepsilon) \right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\mathbf{E}_{\text{Au}}^\lambda = \mathbf{E}_A + \frac{k_B \pi^2}{e} D_{\text{ephN}}^\lambda \nabla T, \quad \mathbf{E}_A = \mathbf{E} + \frac{k_B}{e} \tilde{A}_{\text{ph}}(\zeta) \nabla T,$$

$$K_u^\lambda(\varepsilon) = \frac{2m_F s_\lambda^2}{k_B T} \left(\frac{k_F}{q_{T\lambda}} \right)^3 \frac{\psi_{\text{ephN}}^\lambda(\zeta) \psi_{\text{ephN}}^\lambda(\varepsilon)}{\nu_F \Psi_{\text{NR}}^\lambda},$$

$$D_{\text{ephN}}^\lambda = k_B T \frac{d}{d\varepsilon} \left[\ln(m(\varepsilon) \tau(\varepsilon) \psi_{\text{ephN}}^\lambda(\varepsilon)) \right]_{\varepsilon=\zeta}.$$

Для решения системы интегральных уравнений (15), (16) можно было бы воспользоваться методом Гуревича и Коренблита [10], сделав в интегральном операторе (15) в условиях сильного вырождения замену $(-\partial f_0/\partial \varepsilon) \cong \delta(\varepsilon - \zeta)$. Однако этот способ позволяет корректно проанализировать кинетические коэффициенты с учетом взаимного увлечения лишь в нулевом приближении по вырождению электронного тока. Использование этого приближения в работах [21] привело к некорректным результатам при анализе термомагнитных эффектов.

Поэтому здесь воспользуемся методом, предложенным автором в работе [12], который является наиболее удобным для параметрического решения системы интегральных уравнений. Он позволяет, не конкретизируя энергетической зависимости функций $\Phi(\varepsilon)$, $\tau(\varepsilon)$ и $m(\varepsilon)$ от энергии электрона ε , найти решение этой системы уравнений в линейном приближении по параметру $k_B T/\zeta$. Согласно этому методу, решение находится в два этапа. Вначале определяется энергетическая зависимость функции $\mathbf{Q}(\varepsilon)$, после чего система интегральных уравнений (15), (16) может быть сведена к системе алгебраических уравнений.

На первом этапе разложим функцию $\mathbf{Q}(\varepsilon)$ в ряд по степеням параметра $\varepsilon - \zeta$, поскольку из-за производной функции Ферми $(-\partial f_0/\partial \varepsilon)$ основной вклад в интегралы (15) вносит узкая полоска энергий $|\varepsilon - \zeta| \leq k_B T$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\varepsilon) &= \mathbf{Q}(\zeta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\varepsilon - \zeta)^n}{n!} \mathbf{Q}^{(n)}(\zeta), \\ \mathbf{Q}^{(n)}(\zeta) &= \left(\frac{d^n \mathbf{Q}(\varepsilon)}{d\varepsilon^n} \right)_{\varepsilon=\zeta}. \end{aligned} \quad (17)$$

В работе [12] показано, что фактическим параметром энергетического разложения является величина $\eta = (\varepsilon - \zeta)/k_B T$. В окрестности уровня Ферми строгое неравенство $|\eta| \ll 1$ не выполняется, что не позволяет ограничиться конечным числом членов. Суммирование бесконечных рядов приводит к результату [12]

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\varepsilon) &= \mathbf{Q}(\zeta) + k_B T \Psi^{(1)}(\zeta) \{ \eta \mathbf{K}^>(\zeta) \\ &\quad - f_1(\eta) \chi(\zeta) - f_2(\eta) \tau_F(-k_B \nabla T) \}, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\mathbf{K}^>(\zeta) = \int_\zeta^\infty d\varepsilon \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) \tilde{m}(\varepsilon) \chi(\varepsilon),$$

$$f_1(\eta) = \ln(1 + \exp(-\eta)) - \ln(2) + \eta/2,$$

$$f_2(\eta) = \eta f_1(\eta) - 2 \int_0^\eta d\eta' f_1(\eta').$$

Отметим, что функция $f_1(\eta)$ симметрична относительно замены η на $-\eta$, а функция $f_2(\eta)$ — антисимметрична относительно такой замены, поэтому $\mathbf{Q}(\varepsilon)$ также может быть разделена на две части: симметричную $\mathbf{Q}_s(\varepsilon)$ и антисимметричную $\mathbf{Q}_a(\varepsilon)$.

Итак, для решения системы интегральных уравнений (15), (16) нам осталось определить функции $\mathbf{Q}(\zeta)$, $\mathbf{K}^>(\zeta)$ и величину $\Delta(\zeta)$. Воспользуемся разложением $\Phi(\varepsilon) - \Phi(\zeta) \approx (\varepsilon - \zeta) \Phi^{(1)}(\zeta)$ и, ограничившись линейным приближением по $(k_B T/\zeta)$, перепишем уравне-

ние (15) в следующем виде:

$$\mathbf{Q}(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \eta} \right) \Phi(\varepsilon) \tilde{m}(\varepsilon) \chi(\varepsilon) - \Phi(\zeta) D_{\Phi} \int_0^{\infty} d\eta \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \eta} \right) \eta \tilde{m}(\varepsilon) \chi(\varepsilon), \quad (19)$$

где $\varepsilon = \zeta + \eta k_B T$, а $D_{\Phi} = k_B T d/d\varepsilon [\ln(\Phi(\varepsilon))]_{\varepsilon=\zeta}$. В нулевом порядке по параметру вырождения вторым слагаемым в (19) можно пренебречь, и тогда выражение для $\mathbf{Q}_0(\zeta)$ и $\mathbf{\Lambda}(\zeta)$ находится просто

$$\mathbf{Q}_0(\zeta) = -e\Gamma \mathbf{E}_A (1 - \Gamma - K_u)^{-1},$$

$$\mathbf{\Lambda}^{(0)} = -eK_u \mathbf{E}_A (1 - \Gamma - K_u)^{-1}, \quad (20)$$

$\Gamma = \tau_F / \tau_{e-ph-e}$ — параметр, характеризующий степень взаимного влияния неравновесности электронов и фононов. Он равен отношению времени релаксации электронов τ_F к времени τ_{e-ph-e} , в течение которого импульс, переданный электронами фононам, возвращается обратно в электронную систему. Как видно из (20), учет нормальных процессов рассеяния фононов усиливает эффект взаимного увлечения электронов и фононов.

Для нахождения функций $\mathbf{Q}(\zeta)$, $\mathbf{K}^>(\zeta)$ и $\mathbf{\Lambda}(\zeta)$ в первом порядке по параметру вырождения подставим (18) в (16) и (19) и выполним интегрирование по η . В результате получим систему алгебраических уравнений для искоемых функций, решение которых имеет вид

$$\mathbf{Q}(\zeta) = \frac{-e\Gamma}{(1 - \Gamma - K_u)} \times \left\{ \mathbf{E}_A \left(1 - \frac{D_{\Phi} [J_1 \Gamma + (1 - K_u) \ln(2)]}{(1 - \Gamma - K_u)} \right) + \frac{\pi^2 k_B}{3e} [(1 - K_u) D_Q + \Delta_u] \nabla T \right\},$$

$$\mathbf{\Lambda} = \frac{-e}{(1 - \Gamma - K_u)} \left\{ K_u \mathbf{E}_A \left(1 - \frac{C_1 \Gamma D_{\Phi}}{(1 - \Gamma - K_u)} \right) + \frac{\pi^2 k_B}{3e} - [K_u \Gamma D_Q + (1 - \Gamma) \Delta_u] \nabla T \right\}, \quad (21)$$

где

$$J_1 = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \eta} \right) f_1(\eta) \cong 0.31,$$

$$D_Q = k_B T \frac{d}{d\varepsilon} \left[\ln(m(\varepsilon) \tau(\varepsilon) \Phi^{1/2}(\varepsilon)) \right]_{\varepsilon=\zeta},$$

$$C_1 = J_1 + \ln(2) \approx 1, \quad \Delta_u = \sum_{\lambda} K_u^{\lambda}(\zeta) D_{\text{ephN}}^{\lambda}(\zeta),$$

$$K_u = \sum_{\lambda} K_u^{\lambda}(\zeta).$$

В нулевом порядке по параметру вырождения для функции $\mathbf{K}^>(\zeta)$ имеем

$$\mathbf{K}_0^>(\zeta) = -\frac{e}{2\nu_F} \left\{ \mathbf{E}_A (1 - \Gamma - K_u)^{-1} + \frac{k_B}{2} 2 \ln(2) \nabla T \right\}. \quad (22)$$

Подстановка выражений (21), (22) в (18) дает нам решение интегрального уравнения для функции $\chi(\varepsilon)$, справедливое в линейном приближении по параметру вырождения. Это решение позволяет вычислить ток проводимости и поток тепла и проанализировать влияние нормальных процессов рассеяния фононов на кинетические коэффициенты проводников с вырожденной статистикой носителей тока как в случае слабого ($\Gamma \ll 1$), так и в случае сильного взаимного увлечения электронов и фононов.

3. Вычисление электропроводности и термоэдс вырожденных проводников

Вычислим ток проводимости \mathbf{j} , разбив его на три части, пропорциональные неравновесным добавкам к функции распределения электронов $\chi(\varepsilon)$

$$\mathbf{j} = -\frac{en_e}{m_F} \int_0^{\infty} d\varepsilon \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) \frac{\tilde{k}^3}{\tilde{m}(\varepsilon)} \times (\chi_1(\varepsilon) + \chi_{\Lambda}(\varepsilon) + \chi_2(\varepsilon)) = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_{\Lambda} + \mathbf{j}_2. \quad (23)$$

Для вычисления этих потоков подставим (18), (21) и (22) в (23) и, выполнив интегрирование по параметру η , в линейном приближении по $k_B T / \zeta$ получим

$$\mathbf{j} = \sigma_0 \left\{ \mathbf{E}_A + \frac{k_B \pi^2}{e} D_j \nabla T - \frac{1}{e} \times [\mathbf{\Lambda}(\zeta) + \mathbf{Q}(\zeta) - J_1 \Gamma D_{\Phi} \chi(\zeta)] \right\}. \quad (24)$$

Здесь

$$\sigma_0 = \frac{e^2 n_e \tau_F}{m_F}, \quad D_j = k_B T \frac{d}{d\varepsilon} \left[\ln \left(\frac{k^3(\varepsilon) \tau(\varepsilon)}{m(\varepsilon)} \right) \right]_{\varepsilon=\zeta}.$$

Первые два члена в фигурной скобке дают ток \mathbf{j}_1 ; слагаемое, пропорциональное $\mathbf{\Lambda}(\zeta)$, определяет ток \mathbf{j}_{Λ} , обусловленный влиянием дрейфа фононной системы на электроны проводимости; последние два слагаемых в квадратных скобках определяют ток взаимного увлечения. Подстановка выражений (21), (22) в (24) дает выражение для тока проводимости

$$\mathbf{j} = \tilde{\sigma}_0 \left\{ \mathbf{E}_A \left[1 - \frac{C_1 \Gamma D_{\Phi}}{1 - \Gamma - K_u} \right] + \frac{\pi^2 k_B}{3e} \times [\Gamma D_Q + (1 - \Gamma - K_u) D_j + \Delta_u] \nabla T \right\}, \quad (25)$$

где $\tilde{\sigma}_0 = e^2 n_e \tilde{\tau}_F / m_F$, $\tilde{\tau}_F = \tau_F (1 - \Gamma - K_u)^{-1}$.

Из формулы (25) для кинетических коэффициентов σ_{xx} и β_{xx} получим

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \tilde{\sigma}_0 \left\{ 1 - \Gamma D_{\Phi} C_1 (1 - \Gamma - K_u)^{-1} \right\}, \\ \beta_{xx} &= -\frac{k_B}{e} \left\{ \sigma_{xx} \tilde{A}_{\text{ph}}(\zeta) + \frac{\pi^2}{3} \tilde{\sigma}_0 \right. \\ &\quad \left. \times [(1 - \Gamma - K_u) D_j + \Gamma D_Q + \Delta_u] \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

При $\nu_{\text{phN}}^{\lambda}(q) = 0$ величина $K_u(\zeta) = 0$, и выражения (26) для σ_{xx} и β_{xx} переходят в соответствующие формулы работы [12]. Как видно из (26), учет дрейфа фононной подсистемы, связанный с нормальными процессами рассеяния фононов, приводит к увеличению доли импульса, передаваемого фононами электронам. Это усиливает эффект взаимного увлечения электронов и фононов в электропроводности и обуславливает перенормировку частоты релаксации фононов N-процессами в термоэлектрическом коэффициенте β_{xx} . Появление линейного по параметру вырождения слагаемого в σ_{xx} обусловлено взаимным увлечением электронов и фононов.

Рассмотрим влияние нормальных процессов фонон-фононного рассеяния на термоэлектродвижущую силу проводников с вырожденной статистикой носителей тока. Из условия $\mathbf{j} = 0$ найдем

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{k_B}{e} \left\{ \tilde{A}_{\text{ph}}(\zeta) + \frac{\pi^2}{3} [(1 - \Gamma - K_u) D_j \right. \\ &\quad \left. + \Gamma D_Q + \Delta_u] \right\} \alpha_{\text{ph}} + \alpha_{\text{dif}}. \end{aligned} \quad (27)$$

При $\nu_{\text{phN}}^{\lambda}(q) = 0$ величина $K_u(\zeta) = 0$, а величина $\tilde{A}_{\text{ph}}(\zeta) = A_{\text{ph}}(\zeta)$, и выражение для термоэдс (27) переходит в формулу (46) работы [12]. Прежде всего следует отметить, что фононная компонента термоэдс σ_{ph} определяется не полной частотой релаксации фононов $\nu_{\text{ph}}^{\lambda}(q)$, а перенормированной N-процессами резистивной частотой релаксации фононов (10). В предельном случае $\nu_{\text{phN}}(q) \ll \nu_{\text{phR}}(q)$ величина $\tilde{A}_{\text{ph}}(\zeta) = A_{\text{ph}}(\zeta)$, и можно пользоваться выражением для термоэдс увлечения, полученным ранее в рамках однопараметрического приближения [1–13]. При $\nu_{\text{phN}}(q) \geq \nu_{\text{phR}}(q)$ нормальные процессы рассеяния фононов приводят к увеличению абсолютных значений термоэдс увлечения

$$\alpha_{\text{ph}} = -\frac{k_B}{e} \sum_{\lambda} \frac{m_{\text{FS}}^2}{k_B T} \int_0^{\zeta_{2k}} d^2 \lambda \frac{\nu_{\text{ph}}^{\lambda}(k_{\text{F}}, q)}{\nu_{\text{ph}}^{\lambda}(q)} \left(1 + \nu_{\text{phN}}^{\lambda}(q) \frac{\Psi_{\text{N}}^{\lambda}}{\Psi_{\text{NR}}^{\lambda}} \right). \quad (28)$$

Поэтому при интерпретации экспериментальных данных необходимо учитывать дрейф фононной системы и пользоваться выражением (28). Таким образом, мы показали, что в термоэдс увлечения, как и в решеточную теплопроводность, входит перенормированная N-процессами частота релаксации импульса фононов. Как видно из

(27), взаимное увлечение электронов и фононов вносит вклад только в диффузионную компоненту термоэдс. Это физически понятно. При условии $\mathbf{j} = 0$ передача импульса от электронов в фононную подсистему (см. рисунок) происходит за счет диффузионных процессов, возникающих в первом порядке по параметру вырождения $k_B T / \zeta$. С другой стороны, при наличии градиента температуры в проводнике существует стационарный поток фононов, и передача импульса из фононной подсистемы электронам отлична от нуля уже в нулевом порядке по параметру вырождения. Это и следует из формулы (27).

При расчете термоэдс в работах [21] использование метода, предложенного в [10], привело к потере слагаемого ΓD_Q в выражениях (26) и (27). В магнитном поле в этом приближении появляются ложные зависимости Нернста–Этинсгаузена от магнитного поля [21]. Корректный расчет этих коэффициентов с учетом взаимного увлечения [23] в рамках однопараметрического описания не приводит к отклонению их зависимостей от классического поведения в сильных магнитных полях.

4. Расчет электронного и фононного потоков тепла и анализ соотношений Онзагера

Вычислим электронный поток тепла \mathbf{W}_e , разбив его на три части, пропорциональные неравновесным добавкам к функции распределения электронов $\chi(\varepsilon)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_e &= \frac{n_e}{m_{\text{F}}} \int_0^{\infty} d\varepsilon \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) (\varepsilon - \zeta) \frac{\tilde{k}^3}{\tilde{m}(\varepsilon)} (\chi_1(\varepsilon) + \chi_{\Lambda}(\varepsilon) \\ &\quad + \chi_2(\varepsilon)) = \mathbf{W}_e^{(1)} + \mathbf{W}_{e\Lambda} + \mathbf{W}_e^{(2)}. \end{aligned} \quad (29)$$

Расчет этого потока с использованием формул (18), (21) и (22) дает

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_e &= -L_0 T \sigma_0 \left\{ \frac{e}{k_B} \left[\mathbf{E} D_j + \mathbf{E}_A \frac{\Gamma D_Q + \Delta_u}{1 - \Gamma - K_u} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi^2 k_B}{3 e} [1 + D_{\Phi} \Gamma C_2 + \tilde{A}_{\text{ph}}(\zeta) D_A] \nabla T \right\}, \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$L_0 = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k_B}{e} \right)^2, \quad D_A = k_B T \frac{d}{d\varepsilon} [\ln(m(\varepsilon) \tau(\varepsilon) \tilde{A}_{\text{ph}}(\varepsilon))]_{\varepsilon=\zeta},$$

$$J_3 = \int_0^{\infty} d\eta \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \eta} \right) \eta f_2(\eta) \cong 0.381,$$

$$C_2 = \ln(2) - \frac{3}{\pi^2} J_3 \cong 0.577.$$

Нетрудно убедиться в том, что соотношения Онзагера для термоэлектрических коэффициентов в потоках тепла

\mathbf{W}_e и заряда \mathbf{j} не выполняются. Как показано в [12], необходимо учесть поток тепла, переносимый фононами, но обусловленный неравновесностью электронов.

Поток тепла, переносимый фононами, может быть разделен на три части

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{ph} &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}, \lambda} \hbar \omega_{\mathbf{q}\lambda} \mathbf{v}_{\mathbf{q}}^{\lambda} (g_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{q}) + g_{\Delta u \lambda}(\mathbf{q}) + \mathbf{g}_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{q})) \\ &= \mathbf{W}_{ph1} + \mathbf{W}_{\Delta u} + \mathbf{W}_{phe}. \end{aligned} \quad (31)$$

Поток тепла \mathbf{W}_{ph1} обусловлен как диффузионным, так и дрейфовым движением фононов под действием градиента температуры. Учет N-процессов, приводящих к дрейфу фононов, сводится к перенормировке частоты релаксации импульса фононов

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{ph} &= -\varkappa_{ph}^{(1)} \nabla T, \\ \varkappa_{ph}^{(1)} &= \sum_{\lambda} \frac{k_B s_{\lambda}^2 q_{T\lambda}^3}{6\pi^2} \int_0^{z_q^{\lambda}} dz_q^{\lambda} \frac{(z_q^{\lambda})^4}{\tilde{\nu}_{ph}^{\lambda}(q)} N_{q\lambda}^0 (N_{q\lambda}^0 + 1). \end{aligned} \quad (32)$$

Выражение (32) совпадает с формулой Калавея для решеточной теплопроводности [14–18]. Поток тепла $\mathbf{W}_{\Delta u}$ обусловлен влиянием электронов на дрейфовое движение фононов. Поток тепла \mathbf{W}_{phe} является результатом влияния неравновесности электронов на фононную систему. Выражения для этих потоков имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{\Delta u} &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}, \lambda} s_{\lambda}^2 \hbar \mathbf{q} g_{\Delta u \lambda}(\mathbf{q}) = \frac{n_e}{m_F} \sum_{\lambda} \frac{m_F s_{\lambda}^2 \Psi_{NR}^{\lambda}}{\Psi_{NR}^{\lambda}} \\ &\times \int_0^{\infty} d\varepsilon \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) \tilde{m}(\varepsilon) \psi_{ephN}^{\lambda}(\varepsilon) \chi(\varepsilon), \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{phe} &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}, \lambda} s_{\lambda}^2 \hbar \mathbf{q} g_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{q}) \\ &= \frac{k_B T n_e}{m_F} \int_0^{\infty} d\varepsilon \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) \tilde{m}(\varepsilon) A_{ph}(\varepsilon) \chi(\varepsilon). \end{aligned} \quad (34)$$

Поскольку неравновесность электронной системы обусловлена не только действием электрического поля и градиента температуры, но и также эффектом увлечения электронов фононами, то в потоки (33) и (34) вносят вклад как неравновесность электронов, так и результат влияния неравновесности фононов на фононы через подсистему электронов. Поэтому эти потоки приводят к перенормировке как электронного, так и фононного потоков тепла. Расчет этих потоков дает

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{phe} + \mathbf{W}_{\Delta u} &= -\frac{k_B}{e} T \tilde{A}_{ph}(\zeta) \left\{ \sigma_{xx} \mathbf{E}_A + \frac{k_B}{e} \frac{\pi^2}{3} \tilde{\sigma}_0 \right. \\ &\times \left. [(1 - \Gamma - K_u) D_A + \Gamma D_Q + \Delta_u] \nabla T \right\}. \end{aligned} \quad (35)$$

Как и при анализе потока \mathbf{W}_{phe} , проведенного в [12,13], дрейфовую и диффузионную компоненты потока тепла (35), обусловленные неравновесностью электронов, включим в полный электронный поток тепла

$$W_{etx} = \gamma_{xx} E_x - \varkappa_{xx}^e \nabla_x T. \quad (36)$$

Слагаемые, пропорциональные $(A_{ph}(\zeta))^2 \nabla T$ в формуле (35), связанные с влиянием неравновесности фононов на фононы через электроны проводимости, вносят вклад в фононный поток тепла. В результате такого разделения выражения для кинетических коэффициентов принимают вид

$$\begin{aligned} \gamma_{xx} &= T \beta_{xx}, \\ \varkappa_{ph} &= \varkappa_{ph}^{(1)} + \frac{3}{\pi^2} L_0 T \sigma_{xx} (\tilde{A}_{ph}(\zeta))^2, \\ \varkappa_{xx}^e &= L_0 \sigma_0 T \left\{ 1 + D_{\Phi} \Gamma C_2 + 2 \tilde{A}_{ph}(\zeta) \right. \\ &\times \left. \left[D_A + \frac{\Gamma D_Q + \Delta_u}{1 - \Gamma - K_u} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (37)$$

где β_{xx} определяется выражением (26). Итак, из непосредственного расчета мы убедились, что соотношения Онзагера для термоэлектрических коэффициентов β_{xx} и γ_{xx} , вычисленных в линейном приближении по параметру вырождения в рамках трехпараметрического приближения при описании неравновесности фононной системы, выполняются. Заметим, что соотношения Онзагера являются следствием законов термодинамики необратимых процессов, и они обязаны выполняться всегда. Однако при решении системы кинетических уравнений и при вычислении кинетических коэффициентов делается ряд приближений, которые могут приводить к нарушению этих соотношений. Соотношения Онзагера являются необходимым (но не достаточным) условием правильности приближенных расчетов. Выполнение этих соотношений для вычисленных нами кинетических коэффициентов означает, что мы корректно учли как влияние неравновесности электронов на электроны через подсистему фононов, так и влияние неравновесности фононов на фононы через электроны проводимости.

Электронная теплопроводность обычно находится при условии $\mathbf{j} = 0$. В этом случае выражение для нее имеет вид

$$\begin{aligned} \varkappa_e &= \varkappa_{xx}^e - T \beta_{xx} \alpha = L_0 \sigma_0 T \left\{ 1 + D_{\Phi} \gamma C_2 + 2 \tilde{A}_{ph}(\zeta) \right. \\ &\times \left. (D_A - D_j) - \frac{3}{\pi^2} (\tilde{A}_{ph}(\zeta))^2 \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_0} \right\}. \end{aligned} \quad (38)$$

Заметим, что для полной теплопроводности $\varkappa = \varkappa_{ph} + \varkappa_e$ вклад электрон-фононного увлечения, пропорциональный $(A_{ph})^2$, из-за условия $\mathbf{j} = 0$ взаимно сокращается

$$\varkappa = \varkappa_{ph}^{(1)} + L_0 \sigma_0 T \left\{ 1 + C_2 \Gamma D_{\Phi} + 2 \tilde{A}_{ph}(\zeta) (D_A - D_j) \right\}. \quad (39)$$

Как видно из сравнения выражений (26) и (39), соотношение Видемана–Франца не выполняется. Это связано с неупругостью электрон-фононного рассеяния, приводящего к эффекту увлечения электронов фононами $A_{ph}(\zeta)$ и их взаимному увлечению Γ . Пренебрегая членами, пропорциональными параметру вырождения, для эффективного Лоренц-фактора $L^* = L/L_0$ получим

$$L^* = \frac{\kappa_c}{L_0 T \sigma_{xx}} = \left\{ 1 - \Gamma - K_u - \frac{3}{\pi^2} (\tilde{A}_{ph}(\zeta))^2 \right\}. \quad (40)$$

Очевидно, что увлечение электронов фононами, их взаимное увлечение, а также вклад нормальных процессов фонон-фононного рассеяния могут приводить к значительному уменьшению Лоренц-фактора L^* и должны учитываться при интерпретации экспериментальных данных.

Итак, в данной работе решена система кинетических уравнений для электронной и фононной функций распределения с учетом влияния нормальных процессов фонон-фононного рассеяния для проводников с вырожденной статистикой носителей тока. Вычислены кинетические коэффициенты в линейном приближении по параметру вырождения. Проанализирована роль взаимного увлечения электронов и фононов, а также нормальных процессов рассеяния фононов в электросопротивлении, термоэдс, теплопроводности вырожденных проводников. Описание неравновесности фононной системы в рамках трехпараметрического приближения позволило более корректно рассмотреть кинетические эффекты. Показано, что в условиях, когда частота релаксации фононов в N-процессах порядка или превосходит резистивную частоту, дрейф фононной системы, обусловленный N-процессами, приводит к усилению эффекта взаимного увлечения в электропроводности и к значительному увлечению фононной компоненты термоэдс. В этом случае необходимо пользоваться полученными в нашей работе формулами при интерпретации экспериментальных данных по электропроводности термоэдс и теплопроводности проводников с вырожденной статистикой носителей тока. В качестве перспективы дальнейших исследований электрон-фононного увлечения в вырожденных проводниках представляется целесообразным включить в рассмотрение нормальные процессы электрон-электронного рассеяния, которые, как и фононные N-процессы, не вносят вклада в релаксацию импульса электронов, а приводят к дрейфу электронной системы. Описание неравновесности как электронов, так и фононов в рамках трехпараметрического приближения позволило бы более адекватно рассмотреть электрон-фононное увлечение и кинетические эффекты в проводниках с вырожденной статистикой носителей тока.

Список литературы

- [1] Л.Э. Гуревич. ЖЭТФ **16**, 3, 193 (1946); **16**, 5, 416 (1946).
- [2] И.М. Цидильковский. Термомагнитные явления в полупроводниках. Наука, М. (1960). 296 с.
- [3] В.М. Аскеров. Электронные явления переноса в полупроводниках. Наука, М. (1985). 318 с.
- [4] Ф.Дж. Блат, П.А. Шредер, К.А. Фоилс, Д. Грейг. Термоэлектродвижущая сила металлов. Металлургия, М. (1980). 248 с.
- [5] П.С. Зырянов, М.И. Клиндер. Квантовая теория явлений электронного переноса в кристаллических полупроводниках. Наука, М. (1976). 480 с.
- [6] П.С. Зырянов, Г.И. Гусева. УФН **95**, 4, 565 (1968); R.T. Delves. Rept. Progr. Phys. **28**, 2, 249 (1965).
- [7] J.E. Parrott. Proc. Phys. Soc. **B70**, 6, 590 (1957).
- [8] J. Appel. Zs. Naturforsch. **12a**, 5, 410 (1957); **13a**, 5, 386 (1958).
- [9] I.I. Hanna, E.H. Sondheimer. Proc. Roy. Soc. **A239**, 1217, 247 (1957).
- [10] Л.Э. Гуревич, И.Я. Коренблит. ФТТ **6**, 3, 856 (1964).
- [11] И.Г. Ланг, С.Т. Павлов. ЖЭТФ **63**, 4(10), 1495 (1972).
- [12] И.Г. Кулеев. ФММ **87**, 6, 5 (1999).
- [13] И.Г. Кулеев. ФТТ **41**, 10, 1753 (1999).
- [14] J. Callaway. Phys. Rev. **113**, 4, 1046 (1959).
- [15] Р. Берман. Теплопроводность твердых тел. Мир, М. (1962). 288 с.
- [16] Дж. Займан. Электроны и фононы. ИЛ, М. (1962). 488 с.
- [17] Б.М. Могилевский, А.Ф. Чудновский. Теплопроводность полупроводников. Наука, (1972). 536 с.
- [18] В.С. Оскотский, И.А. Смирнов. Дефекты в кристаллах и теплопроводность. Наука, Л. (1972). 160 с.
- [19] C. Herring. Phys. Rev. **95**, 2, 954 (1954).
- [20] S. Simons. Proc. Phys. Soc. **82**, 2 401 (1963); **83**, 3, 799 (1963).
- [21] И.И. Ляпилин, Х.М. Биккин. ФТП **33**, 3, 701 (1999); Х.М. Биккин, А.Т. Лончаков, И.И. Ляпилин. ФТТ **42**, 2, 202 (2000).
- [22] A.H. Wilson. The Theory of Metals. Cambridge (1954). 346 p.
- [23] И.Г. Кулеев. ФТТ **42**, 6, 979 (2000).