

Тонкая структура экситонных уровней в нанокристаллах CdSe

© С.В. Гупалов, Е.Л. Ивченко

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук,
194021 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: goupalov@coherent.ioffe.rssi.ru

(Поступила в Редакцию 13 апреля 2000 г.)

Рассчитана тонкая структура основного уровня экситона в сферическом нанокристалле полупроводника со структурой цинковой обманки и вюрцита с учетом короткодействующей и дальнедействующей (неаналитической) составляющих обменного взаимодействия. Найдена зависимость от зонных параметров для вклада дальнедействующего обменного взаимодействия в спиновый гамильтониан, описывающий расщепление основного экситонного уровня. Исследовано влияние на тонкую структуру экситонного уровня различия фоновых диэлектрических проницаемостей нанокристалла и диэлектрической матрицы, в которой он синтезирован.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 98-02-18267).

С начала 80-х годов, когда было показано, что в полупроводниковых нанокристаллах, диспергированных в широкозонной стеклянной матрице, происходит трехмерное пространственное ограничение носителей заряда [1–3], стекла, активированные нанокристаллами, стали широко использоваться в качестве модельных объектов для изучения квантоворазмерных эффектов в полупроводниковых квазиуменьшенных системах.

В последнее время появилось большое число работ, посвященных обменному взаимодействию электрона и дырки в нанокристаллах с размерами, малыми по сравнению с боровским радиусом экситона a_B в объемном полупроводнике [4–11]. Такой интерес вызван тем, что благодаря сильному трехмерному пространственному сжатию волновых функций электрона и дырки, обменные расщепления экситонных уровней становятся очень большими по сравнению с их значениями в объемных полупроводниках (оставаясь при этом малыми по сравнению с характерными энергиями размерного квантования) и возрастают как R^{-3} с уменьшением радиуса нанокристалла R , в то время как энергия уровней размерного квантования возрастает как R^{-2} . Такая зависимость обменного расщепления основного экситонного уровня наблюдалась экспериментально в нанокристаллах CdSe [5–10] и была приписана влиянию лишь аналитической (короткодействующей) части обменного взаимодействия. В кратких сообщениях авторов [12,13] было показано, что дальнедействующая, или, как ее иногда называют, неаналитическая, часть обменного взаимодействия приводит к такой же зависимости обменного расщепления от радиуса и что ее вклад в это расщепление имеет тот же порядок величины, что и вклад аналитической части. Цель настоящей работы — изложение последовательной теории обменного взаимодействия электрона и дырки в сферической квантовой точке полупроводника с решеткой цинковой обманки или вюрцита и ее обобщение с учетом различия фоновых диэлектрических проницаемостей нанокристалла и матрицы.

1. Обменное взаимодействие электрона и дырки в экситоне

Последовательная теория электрон-дырочного обменного взаимодействия в полупроводниках была разработана Пикусом, Биром [14–16], Денисовым и Макаровым [17]. В приближении эффективной массы оператор кулоновского взаимодействия между электроном и дыркой в полупроводниковом кристалле включает три вклада, описывающих соответственно прямое кулоновское взаимодействие (\mathcal{H}^C) и обменное взаимодействие, дальнедействующее ($\mathcal{H}^{\text{long}}$) и короткодействующее ($\mathcal{H}^{\text{short}}$). Введем двухчастичные возбужденные состояния кристалла $|m, \mathbf{k}_e; n, \mathbf{k}_h\rangle$, где $\mathbf{k}_{e,h}$ — волновой вектор электрона или дырки, индексы m и n нумеруют вырожденные состояния электрона в зоне проводимости (представление Γ_c) и дырки в валентной зоне (представление Γ_v) в точке экстремума $k_{e,h} = 0$ (Γ -точка). Вначале рассмотрим полупроводник кубической симметрии со структурой цинковой обманки; случай кристалла с решеткой вюрцита обсуждается в разделе 6. Тогда матричные элементы операторов \mathcal{H}^C и $\mathcal{H}^{\text{long}}$ между указанными двухчастичными состояниями можно привести к виду [14–16,18]

$$\mathcal{H}_{m'n',mn}^C(\mathbf{k}'_e, \mathbf{k}'_h, \mathbf{k}_e, \mathbf{k}_h) = -\frac{1}{V} \frac{4\pi e^2}{\varepsilon_0 |\mathbf{k}_e - \mathbf{k}'_e|^2} \times \delta_{m'm} \delta_{n'n} \delta_{\mathbf{k}_e + \mathbf{k}_h, \mathbf{k}'_e + \mathbf{k}'_h}, \quad (1)$$

$$\mathcal{H}_{m'n',mn}^{\text{long}}(\mathbf{k}'_e, \mathbf{k}'_h, \mathbf{k}_e, \mathbf{k}_h) = \frac{1}{V} \frac{4\pi e^2 \hbar^2}{\varepsilon_b m_0^2 E_g^2} \frac{(\mathbf{Kp}_{m'n'}) (\mathbf{Kp}_{mn})^*}{K^2} \times \delta_{\mathbf{k}_e + \mathbf{k}_h, \mathbf{k}'_e + \mathbf{k}'_h}. \quad (2)$$

Здесь \mathbf{K} — суммарный волновой вектор $\mathbf{k}_e + \mathbf{k}_h = \mathbf{k}'_e + \mathbf{k}'_h$, m_0 — масса свободного электрона, E_g — ширина запрещенной зоны, $\mathbf{p}_{m\bar{n}} = \langle m|\mathbf{p}|\bar{n}\rangle$ — матричный элемент оператора импульса, рассчитанный между электронными блоховскими функциями $|m, \mathbf{k} = 0\rangle$ и $|\bar{n}, \mathbf{k} = 0\rangle$ (дырочное состояние n, \mathbf{k} и электронное состояние $\bar{n}, -\mathbf{k}$ связаны между собой операцией инверсии времени),

\varkappa_0 и \varkappa_b — низкочастотная и высокочастотная (на частоте электронно-дырочного возбуждения) диэлектрические проницаемости, e — заряд электрона, V — объем кристалла. Отметим, что дальнедействующее обменное взаимодействие иногда называют неаналитическим обменным взаимодействием, поскольку предел матричного элемента (2) при $\mathbf{K} \rightarrow 0$ зависит от способа стремления \mathbf{K} к нулю.

Обменное взаимодействие (2) затрагивает лишь состояния электронно-дырочной пары, оптически активные в дипольном приближении. Такие состояния можно характеризовать полным угловым моментом пары $I = 1$, а оператор дальнедействующего обменного взаимодействия (2) записывать в инвариантном виде [13]

$$\mathcal{H}^{\text{long}}(\mathbf{k}'_e, \mathbf{k}'_h, \mathbf{k}_e, \mathbf{k}_h) = \frac{4\pi\hbar^2 e^2 P_0^2}{\varkappa_b m_0^2 E_g^2} \left[1 - \frac{(\mathbf{K}\hat{\mathbf{I}})^2}{K^2} \right] \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{K}}, \quad (3)$$

где

$$P_0^2 = \sum_{m,n} |P_{m\bar{n}}^\alpha|^2, \quad (4)$$

а матрицы \hat{I}_α ($\alpha = x, y, z$) размерности 3×3 — матрицы проекций углового момента $I = 1$.

В координатном представлении матричный элемент оператора дальнедействующего обменного взаимодействия имеет вид [14–16]

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{m'n',mn}^{\text{long}}(\mathbf{r}'_e, \mathbf{r}'_h, \mathbf{r}_e, \mathbf{r}_h) &= -\delta(\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_h) \delta(\mathbf{r}'_e - \mathbf{r}'_h) \frac{\hbar^2 e^2}{\varkappa_b m_0^2 E_g^2} \\ &\times \sum_{\alpha\beta} P_{m'\bar{n}'}^\alpha P_{m\bar{n}}^{\beta*} \frac{\partial^2}{\partial r_{e\alpha} \partial r_{e\beta}} \frac{1}{|\mathbf{r}_e - \mathbf{r}'_e|}, \quad (5) \end{aligned}$$

где индексы α и β пробегает значения x, y, z . Отметим, что, поскольку

$$(\mathbf{a}\nabla)(\mathbf{b}\nabla) \frac{1}{r} = \frac{1}{r^3} \left[3 \frac{(\mathbf{a}\mathbf{r})(\mathbf{b}\mathbf{r})}{r^2} - \mathbf{a}\mathbf{b} \right] - \frac{4\pi}{3} \mathbf{a}\mathbf{b}\delta(\mathbf{r}), \quad (6)$$

где \mathbf{a}, \mathbf{b} — произвольные векторы, матричный элемент оператора дальнедействующего обменного взаимодействия (5) содержит контактную часть

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{H}_{m'n',mn}^{\text{long}}(\mathbf{r}'_e, \mathbf{r}'_h, \mathbf{r}_e, \mathbf{r}_h) &= \delta(\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_h) \delta(\mathbf{r}'_e - \mathbf{r}'_h) \delta(\mathbf{r}_e - \mathbf{r}'_e) \\ &\times \frac{4\pi}{3} \frac{\hbar^2 e^2}{\varkappa_b m_0^2 E_g^2} \sum_{\alpha} P_{m'\bar{n}'}^\alpha P_{m\bar{n}}^{\alpha*}. \quad (7) \end{aligned}$$

Вклад в короткодействующее (аналитическое) взаимодействие вносят Фурье-компоненты кулоновского потенциала с волновыми векторами $\mathbf{b} + \mathbf{k}'_e - \mathbf{k}_e$, где \mathbf{b} — отличные от нуля векторы обратной решетки. При достаточно малых значениях k_e и k_h , удовлетворяющих критерию применимости метода эффективной массы, оператор $\mathcal{H}^{\text{short}}$ имеет характер контактного взаимодействия и его

можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{m'n',mn}^{\text{short}}(\mathbf{r}'_e, \mathbf{r}'_h, \mathbf{r}_e, \mathbf{r}_h) &= \Delta_{m'n',mn}^{\text{short}} a_0^3 \delta(\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_h) \\ &\times \delta(\mathbf{r}_e - \mathbf{r}'_e) \delta(\mathbf{r}_h - \mathbf{r}'_h), \quad (8) \end{aligned}$$

где a_0 — постоянная решетки и множитель a_0^3 выделен, чтобы коэффициенты $\Delta_{m'n',mn}^{\text{short}}$ имели размерность энергии. Зависимость этих коэффициентов от зонных индексов находится из соображений симметрии, а их абсолютные значения — из сравнения теории с экспериментом по изучению тонкой структуры экситонных уровней (см., например, [19]). Число линейно независимых коэффициентов совпадает с числом неприводимых представлений, содержащихся в прямом произведении $\Gamma_c \times \Gamma_v$.

Отметим, что иногда [4,20] короткодействующая часть обменного взаимодействия определяется как сумма аналитического обменного взаимодействия (8) и контактной части неаналитического обменного взаимодействия (7). Таким образом определенное короткодействующее обменное взаимодействие записывается в форме выражения (8), но с перенормированной константой

$$\Delta_{m'n',mn}^{\text{short}} a_0^3 = \Delta_{m'n',mn}^{\text{short}} a_0^3 + \frac{4\pi}{3} \frac{\hbar^2 e^2}{\varkappa_b m_0^2 E_g^2} \sum_{\alpha} P_{m'\bar{n}'}^\alpha P_{m\bar{n}}^{\alpha*}. \quad (9)$$

2. Квантование экситонов в сферических нанокристаллах

В случае сильного квантования ($R \ll a_B$) волновая функция электрон-дырочной пары определяется в основном отражениями электрона и дырки от стенок квантовой точки, а кулоновское взаимодействие между ними является слабым возмущением. Тогда в нулевом приближении огибающая двухчастичной волновой функции экситона записывается как произведение

$$\Psi^{\text{exc}}(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_h) = \psi^{(e)}(\mathbf{r}_e) \psi^{(h)}(\mathbf{r}_h), \quad (10)$$

где $\psi^{(e)}(\mathbf{r}_e)$ и $\psi^{(h)}(\mathbf{r}_h)$ — одночастичные волновые функции электрона и дырки, локализованных в квантовой точке.

Состояния электрона в сферической квантовой яме характеризуются значениями орбитального углового момента электрона l_e . Низшей энергии соответствует состояние электрона, описываемое сферической волной с орбитальным угловым моментом $l_e = 0$. Его волновая функция при бесконечно высоком барьере имеет вид

$$\psi_m^{(e)}(\mathbf{r}_e) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \frac{\sin(\pi r_e/R)}{r_e} |m\rangle, \quad (11)$$

где спиновый индекс m принимает значения $\pm 1/2$.

Огибающая волновой функции основного состояния размерно-квантованной дырки в спин-орбитально отщепленной зоне Γ_7 в кубических полупроводниках кристаллического класса T_d совпадает с огибающей в (11).

Состояние размерно-квантованной дырки в четырехкратно вырожденной по спину зоне Γ_8 (спин дырки $J_h = 3/2$, его проекция $n = \pm 3/2, \pm 1/2$) не характеризуется определенным значением орбитального момента l_h . В пренебрежении гофрированностью поверхностей постоянной энергии (сферическое приближение) хорошим квантовым числом является полный момент дырки $\mathbf{F}_h = \mathbf{J}_h + \mathbf{I}_h$ [21]. Такое состояние $(2F_h + 1)$ -кратно вырождено по проекции F_z углового момента \mathbf{F}_h на ось z . Основному уровню соответствует $F_h = 3/2$, $F_z = \pm 3/2, \pm 1/2$. Волновая функция дырки в этом состоянии имеет вид [22]

$$\psi_{F_z}^{(h)}(\mathbf{r}_h) = \sum_n \mathcal{R}_{n, F_z}(\mathbf{r}_h) |n\rangle, \quad (12)$$

где компоненты матрицы $\hat{\mathcal{R}}(\mathbf{r})$ могут быть выражены через $3jm$ -символы Вигнера

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{n, F_z}(\mathbf{r}) &= R^{-3/2} \sum_{l_h=0.2} f_{l_h} \left(\frac{r}{R} \right) (-1)^{3/2-l_h+F_z} \\ &\times 2 \sum_{\mu} \begin{pmatrix} 3/2 & l_h & 3/2 \\ n & \mu & -F_z \end{pmatrix} Y_{l_h \mu} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

где $Y_{l_h \mu}$ — нормированные шаровые функции,

$$\begin{aligned} f_{l_h}(x) &= C \left[j_{l_h}(\varphi^{(h)} x) + (-1)^{l_h/2} \frac{j_2(\varphi^{(h)})}{j_2(\sqrt{\beta} \varphi^{(h)})} \right. \\ &\left. \times j_{l_h}(\sqrt{\beta} \varphi^{(h)} x) \right], \end{aligned} \quad (14)$$

j_{l_h} — сферические функции Бесселя, $\beta = (\gamma_1 - 2\gamma)/(\gamma_1 + 2\gamma)$ — отношение масс легкой и тяжелой дырок, γ_1, γ — параметры Латтинжера в сферическом приближении, $\varphi^{(h)}$ — первый корень уравнения

$$j_0(x)j_2(\sqrt{\beta}x) + j_2(x)j_0(\sqrt{\beta}x) = 0, \quad (15)$$

а C находится из условия нормировки

$$\int_0^1 [f_0^2(x) + f_2^2(x)] x^2 dx = 1.$$

Поскольку в основном состоянии $F_h = J_h$, функции $\psi_{F_z}^{(h)}(\mathbf{r}_h)$ и $|n\rangle$ преобразуются по одному и тому же представлению группы вращений. Поэтому матрица $\hat{\mathcal{R}}(\mathbf{r})$ должна быть сферическим инвариантом. В инвариантной форме ее можно записать как [12,13]

$$\hat{\mathcal{R}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi R^{3/2}}} \left\{ f_0 \left(\frac{r}{R} \right) - f_2 \left(\frac{r}{R} \right) \left[\left(\frac{\hat{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{r}}{r} \right)^2 - \frac{5}{4} \right] \right\}, \quad (16)$$

где \hat{J}_α — 4×4 матрицы проекций углового момента $J_h = 3/2$ ($\alpha = x, y, z$).

При $\beta \rightarrow 1$ подзоны легких и тяжелых дырок в объемном полупроводнике сливаются в одну вырожденную зону. Как следует из (14), (16), в этом пределе огибающая волновой функции размерно-квантованной дырки в основном состоянии не зависит от спиновых индексов и совпадает с огибающей функции (11).

3. Обменное взаимодействие электрона и дырки в нанокристалле полупроводника с простой зонной структурой

Для того чтобы провести сравнительную оценку короткодействующего и дальнедействующего обменных вкладов в расщепление экситонных уровней, рассмотрим сначала оптические переходы между простой зоной проводимости Γ_6 и простой валентной зоной Γ_7 в полупроводниках с решеткой цинковой обманки (кристаллический класс T_d). В этом случае $1s$ экситонный уровень четырехкратно вырожден с учетом спинового вырождения электрона и дырки. Поскольку прямое произведение $\Gamma_6 \times \Gamma_7$ разлагается на неприводимые представления Γ_5 и Γ_2 [23], удобно вместо базиса $|m, n\rangle$ ($m, n = \pm 1/2$), в котором записаны матричные элементы (2), (5), (8), использовать базис состояний $|\Gamma_5, \nu\rangle$ ($\nu = x, y, z$) и $|\Gamma_2\rangle$. Состояние $|\Gamma_5, \nu\rangle$ оптически активно для света, линейно поляризованного в направлении ν , а состояние $|\Gamma_2\rangle$ неактивно. Если энергию отсчитывать от уровня Γ_2 , то в новом базисе ненулевые компоненты короткодействующего и дальнедействующего обменных членов имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\nu'\nu}^{\text{short}}(\mathbf{k}'_e, \mathbf{k}'_h, \mathbf{k}_e, \mathbf{k}_h) &= \Delta_{ST}^{\text{bulk}} \pi a_B^3 \delta_{\nu\nu'} \delta_{\mathbf{K}\mathbf{K}'}, \\ \mathcal{H}_{\nu'\nu}^{\text{long}}(\mathbf{k}'_e, \mathbf{k}'_h, \mathbf{k}_e, \mathbf{k}_h) &= \hbar\omega_{LT} \pi a_B^3 \frac{K_\nu K_{\nu'}}{K^2} \delta_{\mathbf{K}\mathbf{K}'}, \end{aligned} \quad (17)$$

где a_B — боровский радиус экситона в объемном полупроводнике, $\Delta_{ST}^{\text{bulk}}$ — величина расщепления экситонного уровня на синглет и триплет, $\hbar\omega_{LT}$ — продольно-поперечное расщепление экситона. Поскольку обменное расщепление экситонных уровней мало по сравнению с расстояниями между уровнями размерного квантования, обменное взаимодействие электрона и дырки в нанокристалле можно учитывать по теории возмущений. Из (17) следует, что для экситона в сферическом нанокристалле радиуса $R \ll a_B$ расщепление на синглет и триплет дается выражением [12]

$$\Delta_{ST}^{OD}(R) = \pi C \left(\Delta_{ST}^{\text{bulk}} + \frac{1}{3} \hbar\omega_{LT} \right) \left(\frac{a_B}{R} \right)^3, \quad (18)$$

где

$$C = \int_0^\pi \frac{\sin^4 x}{x^2} dx \approx 0.672. \quad (19)$$

При выводе (18) потенциальный барьер на границе нанокристалла предполагался бесконечно высоким. В этом случае огибающие волновых функций как электрона,

так и дырки совпадают с огибающей функции (11) и обращаются в нуль на границе нанокристалла. Полагая для оценки $\Delta_{ST}^{\text{bulk}} \sim 0.1 \text{ meV}$, $\hbar\omega_{LT} \sim 1 \text{ meV}$, получаем, что из двух членов в уравнении (18) дальнедействующий вклад в расщепление Δ_{ST}^{QD} превалирует.

Отметим, что в случае экситона $\Gamma_6 \times \Gamma_7$ вклад в обменное расщепление (18) вносит только контактная часть (7) дальнедействующего обменного взаимодействия. Это следует из того, что имеющая характер диполь-дипольного взаимодействия неконтактная часть дальнедействующего обменного взаимодействия преобразуется по представлению группы T_d , не содержащему тождественного представления.

4. Обменное взаимодействие электрона и дырки в нанокристалле полупроводника со сложной структурой валентной зоны

Рассмотрим теперь экситон $\Gamma_6 \times \Gamma_8$ в нанокристалле радиуса $R \ll a_B$. Волновые функции электрона и дырки даются в этом случае выражениями (11) и (12) соответственно. Короткодействующее обменное взаимодействие имеет вид [7]

$$\hat{\mathcal{H}}^{\text{short}}(\mathbf{k}'_e, \mathbf{k}'_h, \mathbf{k}_e, \mathbf{k}_h) = -\frac{2}{3}\varepsilon_{\text{exch}}a_0^3(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{J})\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad (20)$$

где $\varepsilon_{\text{exch}}$ — константа обменного взаимодействия, σ_α — действующие на электронный спин матрицы Паули. Для дальнедействующей части (2) получаем

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}^{\text{long}}(\mathbf{k}'_e, \mathbf{k}'_h, \mathbf{k}_e, \mathbf{k}_h) &= \frac{4\pi}{\varkappa_b} \left(\frac{\hbar e p_{cv}}{m_0 E_g} \right)^2 \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \frac{1}{K^2} \\ &\times \left\{ \frac{3}{8}K^2 - \frac{1}{6}(\mathbf{JK})^2 - \frac{1}{9}K^2(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{J}) \right. \\ &+ \frac{1}{6} \left[(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{J}) \left((\mathbf{JK})^2 - \frac{5}{4}K^2 \right) + \left((\mathbf{JK})^2 - \frac{5}{4}K^2 \right) (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{J}) \right] \\ &\left. - \frac{1}{3} \left[(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{K})(\mathbf{JK}) - \frac{1}{3}K^2(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{J}) \right] \right\}, \quad (21) \end{aligned}$$

где $p_{cv} = i\langle S|\hat{p}_x|X\rangle$ — междузонный матричный элемент оператора импульса.

Гамильтониан обменного взаимодействия электрона и дырки в квантовой точке радиуса $R \ll a_B$ имеет вид

$$\hat{H}_{\text{exch}} = -\bar{\eta}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{J}). \quad (22)$$

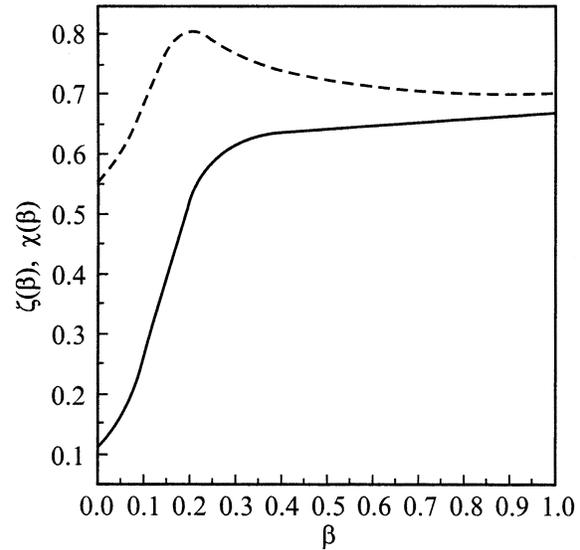


Рис. 1. Зависимости $\zeta(\beta)$ (сплошная кривая) и $\chi(\beta)$ (штриховая кривая).

Здесь

$$\bar{\eta} = \left(\frac{a_B}{R} \right)^3 \left(\chi(\beta)\hbar\omega_{TF} + \frac{\pi}{9}\zeta(\beta)\hbar\omega_{LT} \right), \quad (23)$$

$$\hbar\omega_{TF} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{a_0}{a_B} \right)^3 \varepsilon_{\text{exch}},$$

$$\hbar\omega_{LT} = \frac{4}{\varkappa_b a_B^3} \left(\frac{e\hbar p_{cv}}{m_0 E_g} \right)^2;$$

$$\chi(\beta) = \frac{1}{6} \int_0^1 dx \sin^2(\pi x) \left(f_0^2(x) + \frac{1}{5}f_2^2(x) \right); \quad (24)$$

$$\zeta(\beta) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dy y^2 [I_0(y) + I_2(y)]^2, \quad (25)$$

$$I_l(y) = 2\sqrt{2\pi}(-1)^{l/2} \int_0^1 dx x f_l(x) \sin(\pi x) j_l(xy).$$

Выражение (24) для короткодействующего вклада в параметр $\bar{\eta}$ было получено в работе [7]. Выражение (25) для параметра $\zeta(\beta)$, определяющего дальнедействующий вклад, можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \zeta(\beta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^1 dx \sin^2(\pi x) [f_0^2(x) + f_2^2(x)] \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dy y^2 2I_0(y)I_2(y). \quad (26) \end{aligned}$$

Зависимости $\chi(\beta)$ и $\zeta(\beta)$ представлены на рис. 1.

Отметим, что в отличие от экситона $\Gamma_6 \times \Gamma_7$ вклад в дальнедействующий член вносит не только контактная, но и неконтактная часть неаналитического обменного взаимодействия. Вклад в расщепление контактной части равен

$$-\frac{\hbar\omega_{LT}}{3} \left(\frac{a_B}{R}\right)^3 \chi(\beta)(\sigma\mathbf{J}).$$

В пределе $\beta \rightarrow 1$ неконтактная часть исчезает, и мы имеем

$$\zeta(\beta \rightarrow 1) = \chi(\beta \rightarrow 1)3/\pi = C,$$

где C определяется выражением (19). Из сравнения зависимостей $\chi(\beta)$ и $\zeta(\beta)$ видно, что при $\beta < 1$ вклад неконтактной части в обменное расщепление противоположен по знаку вкладу контактной части; неконтактная часть, таким образом, уменьшает общий вклад дальнедействующего обменного взаимодействия в расщепление экситонного уровня.

5. Учет различия фоновых диэлектрических проницаемостей нанокристалла и матрицы

Для того чтобы рассчитать вклад дальнедействующего обменного взаимодействия в расщепление основного уровня экситона в нанокристалле с учетом различия фоновых диэлектрических проницаемостей нанокристалла и матрицы, воспользуемся подходом, развитым в работах [14–16]. Этот подход базируется на рассмотрении задачи о взаимодействии двух электронов, находящихся в состояниях вблизи Γ -точки в валентной зоне и в зоне проводимости соответственно. При этом кулоновский потенциал взаимодействия этих электронов имеет вид

$$V_{\text{bulk}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^2}{\varkappa_1 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

где \varkappa_1 — диэлектрическая проницаемость на частоте экситонного резонанса.

В полупроводниковом сферическом нанокристалле, синтезированном в матрице материала со значением фоновой диэлектрической проницаемости \varkappa_2 , потенциал кулоновского взаимодействия между двумя точечными зарядами имеет дополнительный член, обусловленный индуцированным на сфере поверхностным зарядом [24,25]

$$V_{QD}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^2}{\varkappa_1 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \delta V_{QD}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (27)$$

где

$$\delta V_{QD}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = e^2 \frac{\varkappa_1 - \varkappa_2}{\varkappa_1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{l+1}{\varkappa_1 l + \varkappa_2(l+1)} \frac{r^l r'^l}{R^{2l+1}} \times \sum_{l_z=-l}^l Y_{ll_z}^* \left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) Y_{ll_z} \left(\frac{\mathbf{r}'}{r'}\right). \quad (28)$$

Согласно (5), этот член приводит к дополнительному слагаемому в операторе дальнедействующего обменного взаимодействия электрона и дырки

$$\delta \mathcal{H}_{m'n',mn}^{\text{long}}(\mathbf{r}'_e, \mathbf{r}'_h, \mathbf{r}_e, \mathbf{r}_h) = -\delta(\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_h) \delta(\mathbf{r}'_e - \mathbf{r}'_h) \frac{\hbar^2}{m_0^2 E_g^2} \times \sum_{\alpha\beta} p_{m'n'}^\alpha p_{mn}^{\beta*} \frac{\partial^2}{\partial r_{e\alpha} \partial r_{e\beta}} \delta V_{QD}(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}'_e), \quad (29)$$

которое вносит соответствующий вклад в обменное расщепление экситонного уровня

$$\Delta H_{m'F'_z, mF_z}(\varkappa_1, \varkappa_2) = \sum_{n', n} \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \int d\mathbf{r}'_1 \int d\mathbf{r}'_2 C_{F'_z, n'}(\mathbf{r}'_1) \times \delta \mathcal{H}_{m'n',mn}^{\text{long}}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) C_{n, F_z}(\mathbf{r}_1). \quad (30)$$

Для основного состояния экситона $\Gamma_6 \times \Gamma_7$ матрица $\hat{C}(\mathbf{r})$ пропорциональна единичной матрице и имеет вид

$$\hat{C}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi R} \frac{\sin^2(\pi r/R)}{r^2}, \quad (31)$$

а для основного состояния экситона $\Gamma_6 \times \Gamma_8$ матрица $\hat{C}(\mathbf{r})$ равна произведению скалярной огибающей из (11) на матрицу (16)

$$C_{n, F_z}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \frac{\sin(\pi r/R)}{r} \mathcal{R}_{n, F_z}(\mathbf{r}). \quad (32)$$

Выражение (30) можно преобразовать к виду

$$\Delta H_{m'F'_z, mF_z}(\varkappa_1, \varkappa_2) = \frac{\hbar^2 e^2 (\varkappa_1 - \varkappa_2)}{m_0^2 E_g^2 \varkappa_1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \times \frac{l+1}{\varkappa_1 l + \varkappa_2(l+1)} \frac{1}{R^{2l+1}} \sum_{l_z=-l}^l I_{m'F'_z, mF_z}^{(l, l_z)*}, \quad (33)$$

где

$$I_{mF_z}^{(l, l_z)} = \sum_n \int d\mathbf{r} C_{F_z, n}(\mathbf{r}) (\mathbf{p}_{m\bar{n}} \nabla) \left[r^l Y_{ll_z} \left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) \right]. \quad (34)$$

Величины $I_{mF_z}^{(l, l_z)}$ можно упростить с учетом того, что матричный элемент ковариантной циклической компоненты p_σ ($\sigma = \pm 1, 0$) оператора импульса, вычисленный на блоховских функциях зоны проводимости и валентной зоны, выражается через $3jm$ -символ Вигнера

$$\langle m | p_\sigma | \bar{n} \rangle = \sqrt{3} P_0 (-1)^{3/2 + J_h - \sigma} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & J_h & 1 \\ m & n & -\sigma \end{pmatrix}, \quad (35)$$

где $J_h = 1/2$ для экситона $\Gamma_6 \times \Gamma_7$, $J_h = 3/2$ для экситона $\Gamma_6 \times \Gamma_8$, постоянная P_0 определена согласно (4) и использован канонический базис блоховских функций

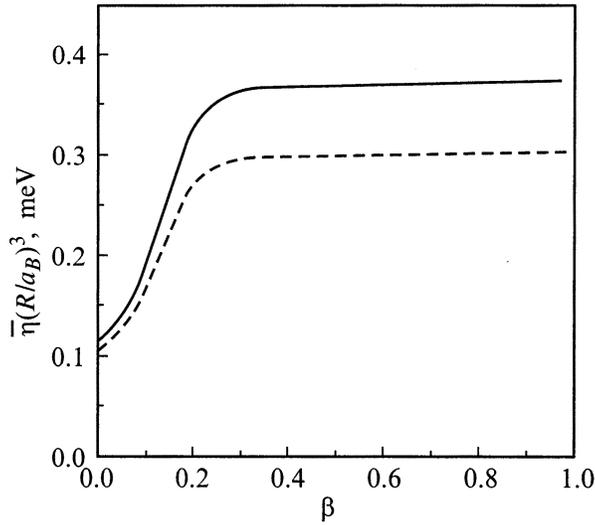


Рис. 2. Зависимость величины $\bar{\eta}(R/a_B)^3$ от параметра β с учетом (сплошная кривая) и без учета (штриховая кривая) различия фоновых диэлектрических проницаемостей нанокристалла и матрицы.

$|m\rangle$, $|n\rangle$ [23]. Тогда для экситона $\Gamma_6 \times \Gamma_7$ после ряда преобразований получим

$$I_{mF_z}^{(l,l_z)} = \frac{(-1)^{l+1} \sqrt{3} p_{cv} \delta_{l1}}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ F_z & m & -l_z \end{pmatrix}, \quad (36)$$

и выражение (18) для триплет-синглетного расщепления основного состояния экситона $\Gamma_6 \times \Gamma_7$ переписывается в виде [12]

$$\Delta_{ST}^{OD}(R) = \left(\pi C \Delta_{ST}^{\text{bulk}} + \frac{1}{3} \pi C \hbar \omega_{LT} + \frac{1}{2} \hbar \omega_{LT} \right) \times \frac{\varkappa_1 - \varkappa_2}{\varkappa_1 + 2\varkappa_2} \left(\frac{a_B}{R} \right)^3. \quad (37)$$

Для экситона $\Gamma_6 \times \Gamma_8$ с учетом (13), (32) получаем

$$I_{mF_z}^{(l,l_z)} = \frac{(-1)^{l+1} \sqrt{6} p_{cv} \delta_{l1}}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ F_z & m & -l_z \end{pmatrix} \times \int_0^1 f_0(x) \sin(\pi x) x dx. \quad (38)$$

Отметим, что

$$I_{mF_z}^{(3,l_z)} \propto \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\ F_z & m & -l_z \end{pmatrix} = 0,$$

поскольку тройка $(3/2, 1/2, 3)$ не удовлетворяет правилу треугольника. В результате с учетом различия фоновых диэлектрических проницаемостей нанокристалла и

матрицы выражение (23) переписывается в виде

$$\bar{\eta} = \left(\frac{a_B}{R} \right)^3 \left(\chi(\beta) \hbar \omega_{TF} + \frac{\pi}{9} \zeta(\beta) \hbar \omega_{LT} + \frac{1}{3} \hbar \omega_{LT} \frac{\varkappa_1 - \varkappa_2}{\varkappa_1 + 2\varkappa_2} \left[\int_0^1 f_0(x) \sin(\pi x) x dx \right]^2 \right). \quad (39)$$

При $\beta \rightarrow 1$ квадрат интеграла, стоящего в квадратных скобках, стремится к значению $1/2$, а огибающие волновых функций электрона и дырки совпадают. При $\beta < 1$ перекрытие между ними уменьшается, и интеграл, стоящий в квадратных скобках в выражении (39), убывает.

На рис. 2 показана зависимость величины $\bar{\eta}(R/a_B)^3$ от параметра β с учетом (сплошная кривая) и без учета (штриховая кривая) различия фоновых диэлектрических проницаемостей нанокристалла и матрицы. В качестве \varkappa_2 взято типичное значение квадрата показателя преломления света в стекле $\varkappa_2 = 2.25$, а значения всех остальных параметров соответствуют нанокристаллам CdSe ($\varkappa_1 = 8.4$). Видно, что учет различия фоновых диэлектрических проницаемостей нанокристалла и матрицы ведет к увеличению величины $\bar{\eta}$.

6. Тонкая структура основного экситонного уровня в нанокристаллах с решеткой вюрцита

В случае гексагональных кристаллов с решеткой вюрцита к гамильтониану Латтинжера, описывающему состояние вблизи вершины валентной зоны объемного кубического полупроводника, следует добавить член, ответственный за кристаллическое расщепление [22],

$$\hat{H}_{cr} = -\frac{\Delta_{cr}}{2} \left(J_z^2 - \frac{5}{4} \right).$$

Поэтому тонкая структура основного экситонного уровня в нанокристалле с решеткой вюрцита с учетом кристаллического и обменного расщеплений описывается спиновым гамильтонианом

$$\Delta H = -\frac{\Delta}{2} \left(J_z^2 - \frac{5}{4} \right) - \bar{\eta}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}), \quad (40)$$

где $\Delta = \Delta_{cr} v(\beta)$,

$$v(\beta) = \int_0^1 dx x^2 \left(f_0^2(x) - \frac{3}{5} f_2^2(x) \right). \quad (41)$$

Выражение (41) было получено в работе [22]. Отметим, что параметры $\hbar \omega_{TF}$ и $\hbar \omega_{LT}$, введенные в (23), в объемном гексагональном кристалле имеют простой физический смысл: $\hbar \omega_{TF}$ есть вызванное короткодействующим

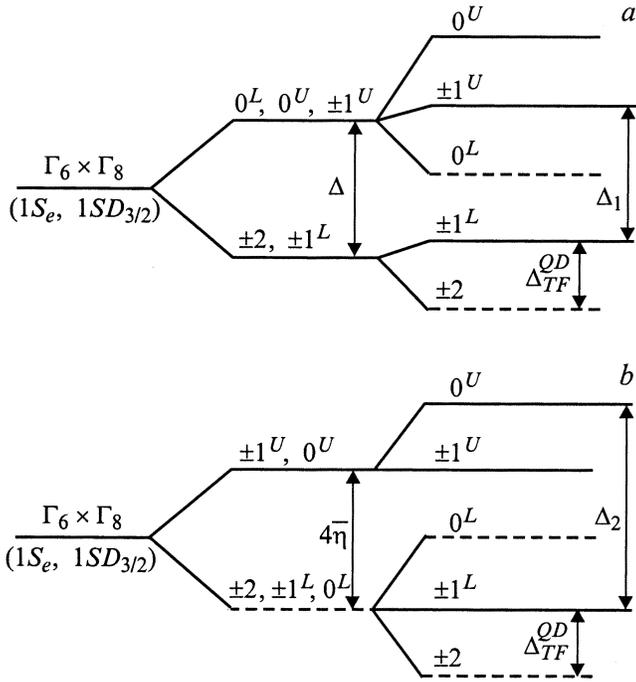


Рис. 3. Схема расщепления уровней экситона в гексагональном нанокристалле на пять подуровней. Для удобства показана также тонкая структура в пренебрежении обменном взаимодействием (a) или кристаллическим расщеплением (b).

обменным взаимодействием расщепление $1s$ экситонного уровня A (представление $\Gamma_7 \times \Gamma_9$ группы C_{6v}) между состояниями с проекциями ± 2 и ± 1 углового момента на ось C_6 , а $\hbar\omega_{LT}$ есть продольно-поперечное расщепление для экситона, распространяющегося в плоскости, перпендикулярной к оси C_6 . В работах [5–10] изучалась тонкая структура экситонных уровней в нанокристаллах CdSe. При описании обменных расщеплений в этих работах учитывался только первый член в выражении (23). Согласно [19], $\hbar\omega_{TF} \approx 0.12$ meV, $\hbar\omega_{LT} \approx 0.95$ meV, откуда следует, что при $\beta = 0.3$ отношение второго (дальнодействующего) члена к первому (короткодействующему) примерно равно 3.

Схемы экситонных уровней, описываемые гамильтонианом (40) и отдельно каждым из его членов, представлены на рис. 3. Экситонные подуровни обозначаются в соответствии со значением проекции на ось C_6 полного углового момента электрон-дырочной пары $F_z + m$. Если учесть лишь кристаллическое расщепление и пренебречь обменным, то основной экситонный уровень расщепится на два состояния, отличающиеся модулем проекции полного углового момента дырки (рис. 3, a). Верхнему состоянию соответствует проекция полного углового момента дырки $F_z = \pm 1/2$, а нижнему — проекция $F_z = \pm 3/2$. Если, наоборот, пренебречь кристаллическим расщеплением и учесть лишь обменный вклад, то основной экситонный уровень расщепится на два подуровня, отвечающих различным значениям

полного углового момента F_{ex} электрон-дырочной пары (рис. 3, b). Верхнему (оптически активному) подуровню отвечает значение $F_{ex} = 1$, а нижнему (неактивному) — $F_{ex} = 2$. Учет обоих членов в гамильтониане (40) приводит к расщеплению основного экситонного уровня на пять подуровней (рис. 3, a, b). Относительные силы осцилляторов для соответствующих переходов рассчитывались в работе [7]. Состояния $\pm 1^U$, $\pm 1^L$ и 0^U оптически активны в дипольном приближении, а переходы в состояния ± 2 и 0^L в том же приближении запрещены. Вместе с тем "темновое" состояние ± 2 оказывается самым низкоэнергетическим, и при низкой температуре фотолюминесценция обусловлена излучательной рекомбинацией из этого состояния. Поэтому расщепление между уровнями $\pm 1^L$ и ± 2 оказывается возможным измерить экспериментально по стоксовому сдвигу люминесценции [5–10]. По спектрам возбуждения люминесценции можно измерить расщепления между уровнями $\pm 1^U$ и ± 2 и между уровнями 0^U и ± 2 , однако состояния $\pm 1^U$ и 0^U при таких измерениях разрешить не удастся [6,9].

Расщепление $\Delta_{TF}^{QD}(\bar{\eta})$ между состояниями ± 2 и $\pm 1^L$ дается выражением

$$\Delta_{TF}^{QD}(\bar{\eta}) = 2\bar{\eta} + \frac{\Delta}{2} - \sqrt{4\bar{\eta}^2 + \frac{\Delta^2}{4} - \bar{\eta}\Delta}. \quad (42)$$

При больших радиусах, когда $\bar{\eta} \ll \Delta$, величина Δ_{TF}^{QD} приближенно равна $3\bar{\eta}$. В частности, при $\Delta \rightarrow \infty$, $\beta \rightarrow 1$, $\hbar\omega_{TF} = \Delta_{ST}^{bulk}$ выражение (42) переходит в (18). При малых радиусах, когда $\bar{\eta} \gg \Delta$, имеем $\Delta_{TF}^{QD} \approx 3\Delta/4$. Если пренебречь дальнодействующим обменным вкладом, то параметр $\bar{\eta}$ в (42) заменяется на параметр

$$\eta = \left(\frac{a_B}{R}\right)^3 \chi(\beta) \hbar\omega_{TF},$$

который для $\beta = 0.3$ меньше $\bar{\eta}$ примерно в 4 раза. На рис. 4 представлены результаты расчета зависимости расщепления Δ_{TF}^{QD} от радиуса нанокристалла. Сплошная и штриховая кривые рассчитаны соответственно с учетом и без учета различия фоновых диэлектрических проницаемостей нанокристалла и матрицы. Пунктирной кривой соответствует расчет по формуле (42), в которой параметр $\bar{\eta}$ заменен на η . Темными [8] и светлыми [6] кружками отмечены экспериментальные точки. При расчете использовались следующие значения параметров Латтинжера [26]: $\gamma_1 = 2.04$, $\gamma = 0.58$, при которых $\beta = 0.275$. Треугольниками показаны значения расщепления Δ_{TF}^{QD} , рассчитанные в методе псевдопотенциала [11].

Величины расщеплений Δ_1 и Δ_2 между подуровнями $\pm 1^U$ и $\pm 1^L$ и между подуровнями $\pm 0^U$ и $\pm 1^L$ соответственно даются выражениями

$$\Delta_1(\bar{\eta}) = 2\sqrt{4\bar{\eta}^2 + \frac{\Delta^2}{4} - \bar{\eta}\Delta}, \quad (43)$$

$$\Delta_2(\bar{\eta}) = 2\bar{\eta} + \frac{\Delta}{2} + \sqrt{4\bar{\eta}^2 + \frac{\Delta^2}{4} - \bar{\eta}\Delta}. \quad (44)$$

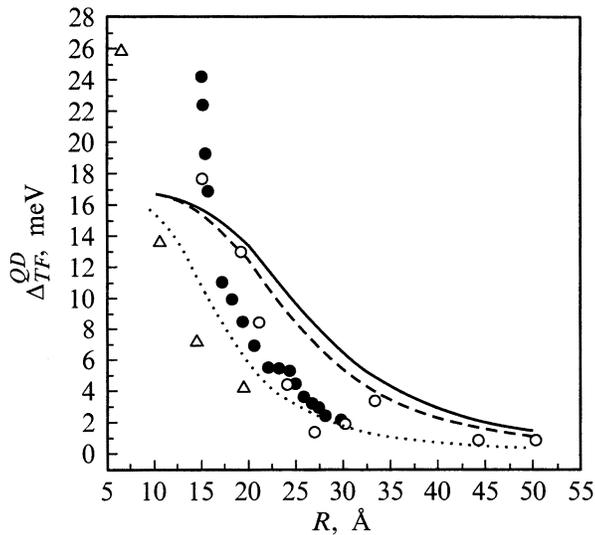


Рис. 4. Зависимость расщепления Δ_{TF}^{OD} от радиуса нанокристалла, рассчитанная при $\varkappa_1 = 8.4$, $\varkappa_2 = 2.25$ (сплошная кривая) и $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 8.4$ (штриховая кривая) с учетом как короткодействующего, так и дальнегодействующего обменных вкладов. Пунктирная кривая — расчет в пренебрежении дальнегодействующим обменным взаимодействием. Темными [8] и светлыми [6] кружками показаны экспериментальные значения расщепления, треугольники — значения расщепления Δ_{TF}^{OD} , рассчитанные в методе псевдопотенциала [11].

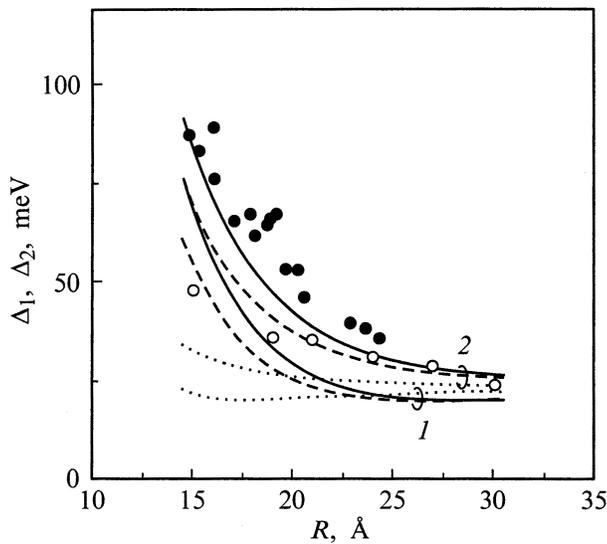


Рис. 5. Зависимости расщеплений Δ_1 (1) и Δ_2 (2) от радиуса нанокристалла, рассчитанные при $\varkappa_1 = 8.4$, $\varkappa_2 = 2.25$ (сплошные кривые) и $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 8.4$ (штриховые кривые) с учетом как короткодействующего, так и дальнегодействующего обменных вкладов. Пунктирные кривые — расчет в пренебрежении дальнегодействующим обменным взаимодействием. Экспериментальные значения расщепления показаны темными [9] и светлыми [6] кружками.

Для больших радиусов ($\bar{\eta} \ll \Delta$) $\Delta_1 \approx \Delta - 2\bar{\eta}$, $\Delta_2 \approx \Delta + \bar{\eta}$. Для малых радиусов ($\bar{\eta} \gg \Delta$) $\Delta_1 \approx 4\bar{\eta} - \Delta/2$, $\Delta_2 \approx 4\bar{\eta} + \Delta/4$. На рис. 5 представлены результаты расчета зависимостей расщеплений Δ_1 и Δ_2 от радиуса нанокристалла. Пара сплошных (штриховых) кривых соответствует расчету с учетом (без учета) различия фоновых диэлектрических проницаемостей нанокристалла и матрицы. Верхняя кривая в каждой паре описывает зависимость $\Delta_2(R)$, а нижняя — $\Delta_1(R)$. Пунктирные кривые рассчитаны по формулам (43), (44), в которых параметр $\bar{\eta}$ заменен на η . Темными [9] и светлыми [6] кружками отмечены экспериментальные точки.

7. Обсуждение результатов

Как видно из рис. 4, 5, теоретические кривые, полученные с учетом дальнегодействующего обменного взаимодействия, хорошо описывают экспериментальные данные для расщеплений Δ_1 и Δ_2 , тогда как для расщепления Δ_{TF}^{OD} имеется существенное несоответствие теории и эксперимента для нанокристаллов малого радиуса. Однако именно это расщепление особо чувствительно к форме нанокристаллов. В самом деле, как отмечалось выше, при малых радиусах $\Delta_{TF}^{OD} \approx 3\Delta/4$. С другой стороны, слабое отклонение формы нанокристалла от сферической обычно описывается введением сохраняющей объем однородной одноосной деформации вдоль гексагональной кристаллической оси C_6 , в результате чего нанокристалл приобретает форму вытянутого или сплюснутого эллипсоида вращения [5–7]. Учет этой деформации приводит к перенормировке величины Δ , которая получает добавку, пропорциональную R^{-2} [27]. Поскольку именно для нанокристаллов малых размеров отклонение формы от сферической наиболее вероятно, то неудивительно, что развитая нами теория в этом случае неадекватно описывает эксперимент. В то же время расщепления Δ_1 и Δ_2 менее чувствительны к несферичности квантовых точек. Из рис. 5 видно, что экспериментальные точки из работы [9] лучше описываются сплошной кривой ($\varkappa_1 \neq \varkappa_2$), а из работы [6] — штриховой ($\varkappa_1 = \varkappa_2$). Это объясняется тем, что в работе [9] исследовались нанокристаллы, полученные в результате термически активируемого фазового распада пересыщенного твердого раствора полупроводника в стеклянной матрице [28]. В этом случае фоновая диэлектрическая проницаемость окружения нанокристаллов должна полагаться равной квадрату показателя преломления света в стекле. В работе [6] исследовались химически синтезированные нанокристаллы, диэлектрическое окружение которых было иным.

Список литературы

- [1] А.И. Екимов, А.А. Онущенко. Письма ЖЭТФ **34**, 6, 363 (1981).
- [2] А.И. Екимов, А.А. Онущенко. ФТП **16**, 7, 1215 (1982).
- [3] Ал.Л. Эфрос, А.Л. Эфрос. ФТП **16**, 7, 1209 (1982).
- [4] T. Takagahara. Phys. Rev. **B47**, 15, 4569 (1993).
- [5] M. Nirmal, D.J. Norris, M. Kuno, M.G. Bawendi, A.L. Efros, M. Rosen. Phys. Rev. Lett. **75**, 20, 3728 (1995).
- [6] D.J. Norris, A.L. Efros, M. Rosen, M.G. Bawendi. Phys. Rev. **B53**, 24, 16 347 (1996).
- [7] A.L. Efros, M. Rosen, M. Kuno, M. Nirmal, D.J. Norris, M.G. Bawendi. Phys. Rev. **B54**, 7, 4843 (1996).
- [8] M. Chamarro, C. Gourdon, P. Lavallard, O. Lublinskaya, A.I. Ekimov. Phys. Rev. **B53**, 3, 1336 (1996).
- [9] M. Chamarro, M. Dib, C. Gourdon, P. Lavallard, O. Lublinskaya, A.I. Ekimov. Proceedings of Mat. Res. Soc. Symp. Boston (1996). P. 396.
- [10] U. Woggon, F. Gindele, O. Wind, C. Klingshirn. Phys. Rev. **B54**, 3, 1506 (1996).
- [11] A. Franceschetti, L.W. Wang, H. Fu, A. Zunger. Phys. Rev. **B58**, 20, 13 367 (1998).
- [12] S.V. Goupalov, E.L. Ivchenko. J. Cryst. Growth **184/185**, 393 (1998).
- [13] S.V. Goupalov, E.L. Ivchenko. Acta Physica Polonica **A94**, 2, 341 (1998).
- [14] Г.Е. Пикус, Г.Л. Бир. ЖЭТФ **60**, 1, 195 (1971).
- [15] Г.Е. Пикус, Г.Л. Бир. ЖЭТФ **62**, 1, 324 (1972).
- [16] Г.Л. Бир, Г.Е. Пикус. Симметрия и деформационные эффекты в полупроводниках. Наука, М. (1972).
- [17] M.M. Denisov, V.P. Makarov. Phys. Stat. Sol. (b) **56**, 1, 9 (1973).
- [18] С.В. Гупалов, Е.Л. Ивченко, А.В. Кавокин. ЖЭТФ **113**, 2, 703 (1998).
- [19] V.A. Kiselev, B.S. Razbirin, I.N. Uraltsev. Phys. Stat. Sol. (b) **72**, 1, 161 (1975).
- [20] K. Cho. Phys. Rev. **B14**, 10, 4463 (1976).
- [21] D. Schechter. J. Phys. Chem. Solids **23**, 237 (1962).
- [22] A.L. Efros. Phys. Rev. **B46**, 15, 7448 (1992).
- [23] E.L. Ivchenko, G.E. Pikus. Superlattices and Other Heterostructures. Symmetry and Optical Phenomena. Springer, Berlin–Heidelberg (1997). 370 p.
- [24] В.В. Батыгин, И.Н. Топтыгин. Сборник задач по электродинамике. Наука, М. (1970). Задача 158.
- [25] H. Haug, S.W. Koch. Quantum Theory of the Optical and Electronic Properties of Semiconductors. World Scientific, Singapore (1993).
- [26] D.J. Norris, M.G. Bawendi. Phys. Rev. **B53**, 24, 16 338 (1996).
- [27] A.L. Efros, A.V. Rodina. Phys. Rev. **B47**, 15, 10 005 (1993).
- [28] A.I. Ekimov. J. Luminescence **70**, 1 (1996).