Критическая термодинамика двумерных систем в пятипетлевом ренорм-групповом приближении

© Е.В. Орлов, А.И. Соколов

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет (ЛЭТИ),
197376 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: ais@sokol.usr.etu.spb.ru

(Поступила в Редакцию 21 марта 2000 г.)

Цель работы состоит в вычислении ренорм-групповых (РГ) функций $O(n)$-симметричной двумерной модели типа $\lambda\varphi^4$ в пятипетлевом приближении и анализе критического поведения систем, описываемых этой моделью. Пятипетлевые разложения для β-функции и критических индексов найдены в массивной теории. Они пересуммированы с помощью методов Паде–Бореля и Паде–Бореля–Леруа, позволяющих оптимизировать пересуммировочную процедуру и оценить точность получаемых чисел. Показано, что как в изинговском ($n = 1$), так и в других случаях учет пятипетлевого вклада в β-функцию лишь незначительно сдвигает координату вильсоновской фиксированной точки, оставляя ее за пределами интервала, который образуют результаты расчетов на решетках; не происходит даже перекрытия "вилок" погрешностей ренорм-групповой и решеточных оценок. Это расхождение отнесено на счет влияния неаналитической составляющей β-функции, которая, как известно, не может быть найдена в рамках теории возмущений. Расчет критических индексов показал, что хотя учет пятипетлевых членов в соответствующих РГ разложениях несколько улучшает согласие с точными результатами, неаналитические вклады, по-видимому, существенны и в этом случае.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования Российской Федерации (грант № 97-14.2-16), Международного научного фонда (А.И.С., грант № p99-943) и Администрации Санкт-Петербурга (Е.В.О., грант АСП 298496).

Метод ренормализационной группы (РГ) представляет собой один из наиболее мощных аналитических инструментов, применяемых сегодня для теоретического изучения критических явлений. Применительно к трехмерным системам он доказал свою исключительную эффективность как в плане нахождения количественных характеристик критического поведения, так и при анализе качественных черт фазовых переходов. Вычисление многопетлевых РГ разложений для $O(n)$-симметричной модели типа $\lambda\varphi^4$ и их обработка с помощью различных методов пересуммирования позволили получить высокоточные значения критических индексов, отношений критических амплитуд и ренормированных констант связи [1–9], которые используются как эталонные при сравнении предсказаний теории с результатами физических и машинных экспериментов.

С другой стороны, успех метода РГ в теории фазовых переходов, который как факт вряд ли можно подвергать сомнению, не имеет под собой достаточных общетеоретических оснований. Действительно, все наблюдаемые величины представляются здесь в виде расходящихся рядов по степеням безразмерных ренормированных констант связи, которые в критической области не малы. Построение на базе расходящихся РГ разложений разнообразных итерационных процедур, лучшие из которых обладают быстрой сходимостью и ведут к численным результатам, очень хорошо согласующимся друг с другом, смягчает указанную проблему, но, конечно, не решает ее. В такой ситуации особую ценность приобретают альтернативные способы проверки надежности и эффективности метода РГ и, в первую очередь, его тестирование на тех или иных точно решаемых моделях.

Широко известным примером точно решаемой модели фазового перехода является двумерная модель Изинга, которая описывает критические явления в ряде реальных физических объектов. Считается очевидным, что в критической области эта модель термодинамически эквивалентна двумерной скалярной теории типа $\lambda\varphi^4$ и, следовательно, ее критическое поведение может быть изучено в рамках метода РГ аналогичному тому, как это делается с трехмерными системами. Сравнительно недавно точные значения асимптотических критических индексов были найдены также для целого семейства двумерных моделей, отвечающих конформно-инвариантным теориям [10–12]. Эти модели характеризуются n-компонентными параметрами порядка с нецелыми значениями n, образующими бесконечную последовательность, сходящуюся в точке $n = 2$. Они представляют собой естественную базу для дальнейшей апробации метода РГ в теории фазовых переходов.

Другое обстоятельство, побуждающее нас к изучению двумерных моделей с помощью техники РГ состоит в том, что не все универсальные параметры, характеризующие их критическое поведение, известны или могут быть определены на основе найденных точных решений. Дело в том, что эти решения справедливы либо в отсутствие внешнего поля, либо только в критической точке, так что по ним нельзя найти, скажем, критический индекс поправок к скейлингу ω или ренормированные безразмерные константы связи g_{2n}, входящие в уравнение состояния (подробное обсуждение связанного с этой проблематикой круга вопросов можно найти, например, в работах [13,14]). В то же время выполненный недавно ренорм-групповой расчет универсального значения вершины g_6 для двумерной модели Изинга [15] и сравнение полученного результата с его решеточными аналогами [16,17] показали, что метод РГ может быть достаточно эффективным в подобных случаях.

Необходимо отметить, что впервые метод теоретико-полевой РГ в пространстве физической размерности был применен к двумерной модели Изинга более 20 лет назад. В классической работе [1] ренорм-групповые функции двумерной модели типа $\lambda\varphi^4$ с $n = 1$ были вычислены в четырехпетлевом приближении. Пересуммирование найденных РГ разложений методом Паде–Бореля–Леруа привело к оценкам "больших" критических индексов γ и ν, которые оказались в достаточно хорошем согласии с онсагеровскими значениями. Однако для "малых" индексов α, η и β были получены числа 0.16, 0.08 и 0.06, существенно отличающиеся от точных (0, 1/4 и 1/8). Кроме того, сравнительно малая длина РГ рядов и их более сильная чем в трехмерном случае расходимость негативно повлияли на точность численных результатов: величины соответствующих "вилок" оказались лежащими между ± 0.2 и ± 0.6 [1]. Применение более сложных методов суммирования [2], основанных на преобразовании Бореля–Леруа и технике конформных отображений, несколько улучшило ситуацию — для малых индексов были получены оценки $\alpha = 0.06 \pm 0.24$, $\eta = 0.13 \pm 0.07$, $\beta = 0.08 \pm 0.26$, но их отличия от точных значений все же остались слишком большими, а точность — весьма низкой.

Цель настоящей работы — вычисление РГ функций двумерной $O(n)$-симметричной модели типа $\lambda\varphi^4$ в пятипетлевом приближении. Эти функции будут найдены при произвольном n. Пересуммирование РГ разложений позволит определить координату нетривиальной фиксированной точки и критические индексы для физически интересных случаев $n = 1$ и 0, отвечающих слоистым изинговским ферромагнетикам и полимерам, а также для точно решаемой модели с $n = -1$. Статья построена следующим образом. Раздел 2 посвящен нахождению РГ разложений для β-функции и критических индексов. В разделе 3 путем суммирования разложения β-функции методом Паде–Бореля–Леруа вычисляется координата нетривиальной (вильсоновской) фиксированной точки g_4^* и индекс поправок к скейлингу ω. При этом используются аппроксимации Паде нескольких различных типов и проводится оптимизация пересуммировочной процедуры. Раздел 4 содержит расчет асимптотических критических индексов для указанных выше значений n, сопоставление численных результатов с точными и сданными расчетов на решетках, а также обсуждение эффективности метода теоретико-полевой РГ в задачах рассматриваемого типа.

1. Пятипетлевые РГ разложения для β-функции и критических индексов

Итак, гамильтониан рассматриваемой модели имеет вид

$$H = \int d^2x \left[\frac{1}{2}\left(m_0^2\varphi_\alpha^2 + (\nabla\varphi_\alpha)^2\right) + \frac{\lambda}{24}(\varphi_\alpha^2)^2\right], \qquad (1)$$

где φ_α — вещественное n-компонентное векторное поле, квадрат "голой массы" m_0^2 пропорционален $T - T_c^{(0)}$, а $T_c^{(0)}$ — температура фазового перехода в пренебрежении флуктуациями параметра порядка.

Будем вычислять β-функцию и критические индексы в рамках массивной теории. Функция Грина, вершинная часть и полная треххвостка предполагаются нормированными на нулевых внешних импульсах согласно обычному рецепту

$$G_R^{-1}(0, m, g_4) = m^2, \qquad \left.\frac{\partial G_R^{-1}(p, m, g_4)}{\partial p^2}\right|_{p^2=0} = 1,$$

$$\Gamma_R(0,0,0,m,g) = m^2 g_4, \quad \Gamma_R^{(1,2)}(0,0,m,g_4) = 1. \qquad (2)$$

Поскольку четырехпетлевые разложения для β-функции и критических индексов при $n = 1$ известны [1], нам предстоит получить соответствующие ряды для произвольных n и затем вычислить пятипетлевые вклады. Решение первой из этих задач не сопряжено с какими-либо трудностями, ибо комбинаторные факторы, тензорные свертки и численные значения интегралов всех одно-, двух-, трех- и четырехпетлевых диаграмм Фейнмана были найдены ранее [18]. Напротив, интегралы, отвечающие пятипетлевым вершинным и массовым диаграммам, для двумерного случая не вычислялись, и их расчет впервые проведен в настоящей работе. Не излагая его в деталях, отметим наиболее существенные моменты.

Пятипетлевой вклад в полную четыреххвостку дается суммой 124 топологически различных диаграмм; их перечень приведен в отчете [18]. 27 графиков имеют тривиальную структуру в том смысле, что их интегралы представляют собой произведения интегралов диаграмм более низких порядков. Нескольким десяткам диаграмм отвечают интегралы, машинное вычисление которых сегодня не представляет труда — они сводятся к одно- или двухкратным. Однако расчет трехкратных и более сложных интегралов уже не может быть осуществлен с помощью стандартных пакетов и требует использования соответствующих программ, которые были для этой цели специально разработаны. Наиболее трудоемким оказалось вычисление 31 пятикратного и 3 семикратных интегралов; последние были найдены с точностью в четыре десятичных разряда. Поскольку относительный суммарный вклад этих трех диаграмм в пятипетлевое слагаемое составил около 2.5%, а остальные графики удалось вычислить с погрешностями, на несколько порядков меньшими, точность окончательного результата превысила пять разрядов. На самом деле, эта точность оказалась еще более высокой, ибо, как показал опыт работы с нашими программами, реально они дают погрешность примерно на порядок меньшую, чем та, которая декларируется соответствующей опцией. Поэтому далее приводится пятипетлевой вклад в β-функцию с точностью в шесть десятичных разрядов.

Итак, найденное разложение β-функции модели (1) имеет вид

$$\frac{\beta(g)}{2} = -g + g^2 - \frac{g^3}{(n+8)^2}(10.33501055n + 47.67505273)$$

$$+ \frac{g^4}{(n+8)^3}(5.000275928n^2 + 149.1518586n + 524.3766023)$$

$$- \frac{g^5}{(n+8)^4}(0.088842906n^3 + 179.6975910n^2$$

$$+ 2611.154798n + 7591.108694)$$

$$+ \frac{g^6}{(n+8)^5}(-0.00407946n^4 + 80.3096n^3$$

$$+ 5253.56n^2 + 53218.6n + 133972). \qquad (3)$$

Расчет пятипетлевых РГ разложений для критических индексов также потребовал вычисления целого семейства многократных интегралов, которое здесь оказалось менее сложным, чем в случае β-функции. Окончательно для индексов γ и η были получены следующие выражения:

$$\gamma^{-1} = 1 - \frac{n+2}{n+8}g + \frac{g^2}{(n+8)^2}(n+2)\,3.375628955$$

$$- \frac{g^3}{(n+8)^3}(4.661884772n^2 + 34.41848329n + 50.18942749)$$

$$+ \frac{g^4}{(n+8)^4}(0.318993036n^3 + 71.70330240n^2$$

$$+ 429.4244948n + 574.5877236)$$

$$- \frac{g^5}{(n+8)^5}(0.0938051n^4 + 85.4975n^3$$

$$+ 1812.19n^2 + 8453.70n + 10341.1). \qquad (4)$$

$$\eta = \frac{g^2}{(n+8)^2}(n+2)\,0.9170859698$$

$$- \frac{g^3}{(n+8)^2}(n+2)\,0.05460897758$$

$$+ \frac{g^4}{(n+8)^4}(-0.0926844583n^3 + 4.05641051n^2$$

$$+ 29.2511668n + 41.5352155)$$

$$- \frac{g^5}{(n+8)^5}(0.0709196n^4 + 1.05240n^3$$

$$+ 57.7615n^2 + 325.329n + 426.896). \qquad (5)$$

Здесь, как и в предыдущих работах [1–3], в качестве аргумента взята не ренормированная константа связи g_4, а пропорциональный ей безразмерный инвариантный заряд

$$g = \frac{n+8}{24\pi}\,g_4, \qquad (6)$$

который в отличие от g_4 не стремится при $n \to \infty$ к нулю, а выходит на конечное значение, равное единице.

2. Координата вильсоновской фиксированной точки в пятипетлевом приближении

Как известно, значения индексов и других универсальных параметров, характеризующих фазовый переход, определяются координатой вильсоновской фиксированной точки g^*, которая представляет собой нетривиальное решение уравнения $\beta(g) = 0$. Полученное нами разложение для $\beta(g)$, как и в другие ряды перенормированной теории возмущений, является асимптотическим, и для того чтобы найти g^*, ряд (3) необходимо свести к сходящемуся, т.е. подвергнуть процедуре пересуммирования. Это обычно делают, используя преобразование Бореля–Леруа

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = \int_0^{\infty} e^{-t} t^b F(xt)\,dt,$$

$$F(y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i}{(i+b)!} y^i. \qquad (7)$$

Чтобы вычислить интеграл в (7), борелевский образ $F(y)$ искомой функции следует аналитически продолжить за пределы круга сходимости. Для этого можно использовать аппроксиманты Паде $[L/M]$, представляющие собой отношения полиномов $P_L(y)$ и $Q_M(y)$ порядков L и M, коэффициенты которых определяются однозначно, если $L + M + 1$ совпадает с числом известных членов ряда и $Q_M(0) = 1$. Установлено, что наилучшими аппроксимирующими свойствами обладают диагональные аппроксиманты Паде, для которых $L = M$, или близкие к ним (см., например, [19]). Однако с ростом степени знаменателя M растет и число его корней, т.е. число полюсов аппроксиманты в комплексной плоскости. Если хотя бы некоторые из этих полюсов оказываются расположенными вблизи вещественной полуоси $y > 0$ или, что еще хуже, попадают на нее, то соответствующая аппроксиманта становится непригодной для суммирования ряда. На практике это довольно сильно ограничивает степень знаменателя сверху и сужает выбор приемлемых аппроксимант. С другой стороны, наличие свободного параметра b в преобразовании Бореля–Леруа позволяет оптимизировать процедуру пересуммирования путем достижения максимально быстрой сходимости итерационного процесса.

Имея в виду сказанное выше, первоначально мы выбрали для вычисления координаты нетривиальной фиксированной точки g^* следующую тактику [6]. Для каждого n нетривиальный корень уравнения $\beta(g) = 0$ находился в четырех последовательных приближениях — двух-, трех-, четырех- и пятипетлевом, а аналитическое продолжение борелевских образов β-функции осуществлялось с помощью симметричных или близких к ним аппроксимант Паде: $[1/1]$, $[2/1]$, $[2/2]$ и $[3/2]$. Значения параметра b варьировались в широких пределах и выбирались такими, чтобы численные результаты, даваемые старшими приближениями — четырех- и пятипетлевым — свопадали, т.е. обеспечивалась скорейшая сходимость итерационной процедуры. К сожалению, оптимальные значения b, отвечающие наиболее быстрой сходимости, оказались весьма близки к пороговым, т.е. к тем, за которыми у рабочих аппроксимант появляются полюса при положительных y. Это обстоятельство на практике ощутимо влияет на точность получаемых результатов.

Чтобы не сталкиваться с проблемой полюсов, мы отказались от варьирования b и остановились (для небольших значений n) на фиксированном значении этого параметра, равном нулю, что отвечает методу суммирования Паде-Бореля. В этом случае все перечисленные выше аппроксиманты Паде свободны от "опасных" полюсов, а сама итерационная процедура достаточно быстро сходится. Хорошо иллюстрируют ситуацию результаты расчетов для $n = 1$, 0 и -1 (точно решаемые модели), приведенные в табл. 1. Как видно, использование аппроксимант $[1/1]$, $[2/1]$, $[2/2]$ и $[3/2]$ для аналитического продолжения борелевского образа дает для g^* оценки, быстро приближающиеся к асимптотическим значениям, причем выход на асимптотику носит характер затухающих осцилляций. Наличие осцилляций представляется вполне естественным, поскольку ряд для β-функции является знакопеременным, а их затухание отражает борелевскую суммируемость РГ разложения. Исходя из этого, можно заключить, что асимптотическое значение g^* должно лежать между четырех- и пятипетлевой оценками, и в качестве окончательного результата естественно взять их полусумму. Так, получив для двумерной модели Изинга в четырех- и пятипетлевом приближениях $g^* = 1.8453$ и 1.8286 соответственно, за наиболее вероятную величину координаты вильсоновской фиксированной точки мы принимаем $g^* = 1.837$. Найденные таким путем оценки g^* для других n приведены в последней колонке табл. 1 и в верхней строке табл. 2.

Таблица 1. Координата вильсоновской фиксированной точки для моделей с $n = 1$, 0 и -1 в четырех последовательных РГ приближениях и результирующие пятипетлевые оценки $g^*(n)$

n	$[1/1]$	$[2/1]$	$[2/2]$	$[3/2]$	g^*, 5-loop
1	2.4246	1.7508	1.8453	1.8286	1.837 ± 0.03
0	2.5431	1.7587	1.8743	1.8402	1.86 ± 0.04
-1	2.6178	1.7353	1.8758	1.8278	1.85 ± 0.05

Точность определения координаты вильсоновской фиксированной точки оценивалась следующим образом. Мы варьировали параметр b от 0 до 10, т.е. в достаточно широких пределах, и смотрели, насколько сильно меняется при этом величина g^*, полученная усреднением четырех- и пятипетлевого результатов. Диапазон изменения этого среднего и принимался за погрешность определения численного значения g^*. Получаемая таким способом оценка погрешности является весьма консервативной, так как существенно (не менее чем в 2 раза) превосходит разность между усредненным и пятипетлевым значениями g^*. Это позволяет рассматривать ее как вполне реалистическую.

Прежде чем использовать найденные числа для определения критических индексов, интересно сравнить их со значениями g^*, полученными ранее в других работах. Координата фиксированной точки для двумерной модели Изинга определялась методом РГ в пространстве физической размерности [1,2,20], путем анализа высокотемпературных разложений [16,21–23], с помощью техники ϵ-разложения [23], методом Монте-Карло [25] и в рамках метода сильной связи [24,26]. Из результатов расчета на решетках численное значение g^* извлекалось с помощью соотношения

$$\chi_4 = \frac{\partial^3 M}{\partial H^3}\bigg|_{H=0} = -\chi^2 m^{-2} g_4, \tag{8}$$

связывающего ренормированную константу связи $g_4 = (8\pi/3)g$ с нелинейной χ_4 и обычной χ восприимчивостями системы в критической области. Пересуммирование четырехпетлевых РГ разложений методами Паде–Бореля (аппроксиманта $[3/1]$), Паде–Бореля–Леруа и с использованием техники конформных отображений привело к оценкам $g^* = 1.88$ [20], 1.8 ± 0.3 [1] и 1.85 ± 0.1 [2] соответственно. Обработка высокотемпературных разложений и разложений сильной связи позволила получить весьма близкие друг к другу значения, характеризующиеся высокой ожидаемой точностью: $g^* = 1.751$ [21], 1.7547 ± 0.002 [16], 1.7538 ± 0.0005 [22] и 1.746 ± 0.008 [24]. Пересуммирование ϵ-разложения для ренормированной константы связи при $\epsilon = 2$ с использованием информации о точных значениях g^* для моделей низких размерностей ($D = 1$ и 0) привело к оценкам $g^* = 1.79 \pm 0.05$ и 1.75 ± 0.05 [23]. Наконец, метод Монте-Карло и прямое

Таблица 2. Координата вильсоновской фиксированной точки g^* и критический индекс ω для $-1 \geq n \geq 32$ в пятипетлевом ренорм-групповом приближении

n	-1	0	1	2	3	4	8	16	32
					g^*				
RG, 5-loop	1.85 (5)	1.86 (4)	1.837 (30)	1.80 (3)	1.75 (2)	1.70 (2) ($b = 1$)	1.52 (1) ($b = 1$)	1.313 (3) ([4/1], [3/1])	1.170 (2) ([4/1], [3/1])
HT exp [22,23]		1.679 (3)	1.754 (1)	1.81 (1)	1.724 (9)	1.655 (16)			
MC [25,29]			1.71 (12)	1.76 (3)	1.73 (3)				
SC [24]	1.473 (8)	1.673 (8)	1.746 (8)	1.81 (2)	1.73 (4)				
ϵ-exp [23]		1.69 (7)	1.75 (5)	1.79 (3)	1.72 (2)	1.64 (2)	1.45 (2)	1.28 (1)	1.16 (1)
$1/n$-exp [23]					1.758	1.698	1.479	1.283	1.154
					ω				
RG, 5-loop	1.32 (4)	1.31 (3)	1.31 (3)	1.32 (3)	1.33 (2)	1.37 (3)	1.50 (2)	1.70 (1)	1.85 (2)

Примечание. Для сравнения приведены значения g^*, извлеченные из высокотемпературных разложений (HT), и разложений сильной связи (SC), найденные методом Монте-Карло (MC), полученные обработкой ϵ-разложения для g^* (ϵ-exp) и даваемые соответствующим $1/n$-разложением ($1/n$-exp).

суммирование разложения сильной связи для β-функции дали $g^* = 1.71 \pm 0.12$ [25] и 1.76 [26].

Сопоставление этих чисел друг с другом и с нашим результатом $g^* = 1.837 \pm 0.03$ позволяет сделать важные выводы. Во-первых, решеточные оценки g^*, группирующиеся вокруг значения $g^* = 1.75$, ощутимо отличаются от своих аналогов, полученных методом РГ в четырехпетлевом приближении. И во-вторых, учет пятипетлевого вклада в β-функцию, существенно улучшающий ожидаемую точность определения g^*, ведет лишь к незначительному сдвигу самой координаты фиксированной точки, оставляя ее за пределами интервала, в котором лежат результаты расчетов на решетках. Более того, в пятипетлевом приближении не происходит даже перекрытия "вилок" погрешностей ренорм-групповой и решеточной оценок. Причинами указанного расхождения могут быть, с одной стороны, недостаточная длина имеющихся РГ разложений и более медленная, чем при $D = 3$, сходимость итераций, а с другой — наличие неаналитических вкладов в РГ функции, которые, как известно, не могут быть найдены с помощью теории возмущений.

Первая причина представляется нам маловероятной. Дело в том, что ряд для β-функции является знакопеременным, вследствие чего зависимость g^* от порядка приближения носит осциллирующий характер. Это значит, что учет шестипетлевого члена в разложении $\beta(g)$ приведет к росту g^*, т. е. к еще большему удалению РГ результата от его решеточных аналогов. Пертурбативные вклады более высоких порядков несколько уменьшат шестипетлевую оценку, но, ввиду сходимости итерационной процедуры, значение g^* во всяком случае останется большим, чем то, которое мы получили в пятипетлевом приближении. Следовательно, в рамках теории возмущений обсуждаемое расхождение устранить невозможно.

Естественно отнести его на счет влияния неаналитической составляющей β-функции. Известно, что в точке $g = 0$, вблизи которой строятся разложения слабой связи, теоретико-полевые функции должны иметь особенности [27] (теорема Дайсона). В теории типа $\lambda\varphi^4$ сингулярной для β-функции может быть и сама вильсоновская фиксированная точка [23,28]. Как показывают многочисленные расчеты, проведенные в последние десятилетия, неаналитичность РГ функций практически не влияет на точность определения критических индексов и других универсальных величин, характеризующих критическое поведение трехмерных систем. Однако по мере уменьшения размерности роль сингулярных членов должна расти. Полученные результаты можно рассматривать как убедительную демонстрацию того, что для двумерных объектов влияние неаналитических членов уже не является пренебрежимо малым.

Это заключение справедливо не только для модели Изинга. При $n \neq 1$ метод теоретико-полевой РГ также ведет к оценкам g^*, заметно отличающимся от чисел, полученных с помощью расчетов на решетках. Так, для $n = 0$ техника высокотемпературных разложений и РГ анализ в пятипетлевом приближении дают $g^* = 1.679 \pm 0.003$ [24] и 1.86 ± 0.04 (табл. 1) соответственно. С ростом n расхождение между решеточными и ренорм-групповыми оценками константы связи уменьшается, оставаясь, однако, сравнимым с погрешностями определения g^* или превосходя их. Это хорошо иллюстрируте табл. 2, где помимо пятипетлевых РГ оценок собраны значения g^* для различных n, извлеченные из высокотемпературных разложений [22,23] (строка 2) и разложений сильной связи [24] (строка 4), найденные методом Монте-Карло [25,29] (строка 3), а также те, которые дают ϵ-разложение, пересуммированное с учетом известных точных величин g^* при $D = 1$ и 0 (строка 5), и $1/n$-разложение (строка 6); последние взяты из работы [23]. (Во избежание недоразумений заметим, что модели с $n > 1$ здесь рассматриваются исключительно как полигон для тестирования метода РГ, а не с целью описать термодинамику реальных двумерных вырожденных систем, ферромагнитные переходы в

Таблица 3. Критические индексы для моделей с $n = 1$, 0 и -1, найденные суммированием по Паде–Борелю пятипетлевых РГ разложений

n	Метод	g^*	γ	η	ν	α	β
1	RG	1.837	1.790	0.146	0.966	0.068	0.071
		1.754 (HT)	1.739	0.131	0.931	0.139	0.061
	exact		7/4	1/4	1	0	1/8
			(1.75)	(0.25)			(0.125)
0	RG	1.86	1.449	0.128	0.774	0.452	0.049
		1.679 (HT)	1.402	0.101	0.738	0.524	0.037
	exact		43/32	5/24	3/4	1/2	5/64
			(1.34375)	(0.20833)	(0.75)	(0.5)	(0.078125)
-1	RG	1.85	1.184	0.082	0.617	0.765	0.025
		1.473 (SC)	1.155	0.049	0.592	0.816	0.014
	exact		37/32	3/20	5/8	3/4	3/64
			(1.15625)	(0.15)	(0.625)	(0.75)	(0.046875)

Примечание. Для сравнения приведены также точные значения этих индексов.

которых, как известно, отсутствуют). Для определения g^* при $n = 16$ и 32 использовались аппроксиманты Паде [4/1] и [3/1], так как полученные с их помощью значения константы связи очень слабо зависят от параметра b, а аппроксиманты [3/2] и [2/2] при больших n теряют работоспособность из-за появления "опасных" полюсов. Как видно из табл. 2, лишь при $n = 2$ и 3 ренорм-групповые и решеточные оценки g^* оказываются достаточно близкими друг к другу. Эта близость, однако, носит случайный характер и не меняет заключения о систематическом расхождении теоретико-полевых и решеточных оценок координаты фиксированной точки.

Помимо численных значений координаты вильсоновской фиксированной точки, табл. 2 содержит также полученные нами оценки критического индекса $\omega = d\beta(g^*)/dg$, определяющего температурные зависимости поправок к скейлингу. Индекс ω находился путем численного дифференцирования функции $\beta(g)$, даваемой пересуммированным по Паде–Борелю (аппроксиманты [3/2] и [2/2]) РГ разложением, а в качестве погрешности была взята полуразность между пятипетлевой и четырехпетлевой оценками этого индекса. Поскольку, как уже отмечалось, с ростом n у диагональных и близких к ним аппроксимант появляются "опасные" полюса при $b = 0$, для определения индекса ω при $n = 4$ и 8 параметр сдвига был взят равным 1, а для $n = 16$ и 32 использовались аппроксиманты [4/1] и [3/1] (при $b = 0$).

3. Критические индексы. Обсуждение результатов

Перейдем далее к определению численных значений критических индексов. Как известно, РГ разложения для разных индексов довольно сильно отличаются друг от друга по своей структуре. Например, ряд (4) для γ^{-1} знакопеременен и характеризуется регулярным поведением коэффициентов, чем нельзя сказать о РГ разложениях γ и ν. С тем чтобы обеспечить наиболее быструю сходимость итерационной процедуры, мы подвергли суммированию по Паде–Борелю–Леруа ряды для γ^{-1} и η, а остальные критические индексы нашли с помощью хорошо известных соотношений скейлинга. С целью проверки полученных численных результатов на самосогласованность и оценки их точности мы вычисляли также индексы

$$\eta^{(2)} = \frac{1}{\nu} + \eta - 2, \qquad \eta^{(4)} = \frac{1}{\nu} - 2, \tag{9}$$

РГ разложения которых имеют регулярную структуру. Поскольку, как было показано выше, метод РГ дает координату вильсоновской фиксированной точки, заметно отличающуюся от результатов расчетов на решетках, критические индесы находились с использованием как ренорм-групповых, так и решеточных значений g^*. Это позволило определить, какие значения g^* обеспечивают бóльшую близость РГ оценок критических индексов к точным значениям и насколько эти оценки чувствительны к величине g^*. При обработке РГ разложения для γ^{-1} использовалась аппроксиманта [3/2], в то время как ряды для $\eta^{(i)}$ и η, начинающиеся соответственно с членов первого и второго порядков по g, суммировались (после вынесения за скобки общих множителей) с помощью аппроксимант [2/2] и [2/1]. Найденные таким образом значения критических индексов оказались очень слабо зависящими от параметра b, что, очевидно, объясняется высокой симметрией используемых аппроксимант.

Численные результаты, полученные для моделей с $n = 1$, 0 и -1 при $b = 0$, представлены в табл. 3. Хотя значения критических индексов приведены в этой таблице с точностью до трех знаков после запятой, реальная точность РГ оценок значительно ниже. Представление о ее величине можно получить, рассчитывая индекс η двумя разными способами — суммируя непосредственно ряд (5) для этого индекса и находя η как разность пересуммированных рядов для $\eta^{(2)}$ и $\eta^{(4)}$. В изинговском случае найденное вторым способом значение η

равно 0.093, т.е. отличается от прямой оценки на 0.053, при $n = 1$ это расхождение составляет 0.028. Будучи весьма невысокой, достигнутая точность позволяет тем не менее вполне определенно охарактеризовать сложившуюся ситуацию. Как видно, учет пятипетлевых членов в РГ разложениях приводит к некоторому сближению ренорм-групповых оценок и точных значений критических индексов. В то же время этот учет не решает проблемы малых индексов, для которых расхождения между предсказаниями метода РГ и точными ответами остаются порядка самих индексов. Этот вывод не зависит от того, какие значения g^* используются для определения критических индексов — полученные методом РГ или найденные из высокотемпературных разложений $(n = 1, 0)$ и разложений сильной связи $(n = -1)$.

Изменит ли положение дел учет следующих членов в РГ разложениях критических индексов? Скорее всего, нет. Действительно, ряды для γ^{-1} и η, а также для индексов $\eta^{(2)}$ и $\eta^{(4)}$, являются знакопеременными, что ведет к осцилляционным зависимостям численных значений индексов от порядка приближения. Поскольку пятипетлевые оценки критических индексов ближе к точным значениям, чем четырехпетлевые, добавление шестипетлевых вкладов должно хотя бы незначительно ухудшить качество РГ оценок. Это значит, что в рамках теории возмущений устранить обсуждаемое расхождение невозможно. Остается предположить, что его источником являются неаналитические вклады в индексы. Для двумерных моделей они, как мы видим, не малы.

В заключение обсудим результаты, относящиеся к критическому индексу ω. Как известно, вопрос о том, какова истинная величина индекса поправок к скейлингу для двумерной модели Изинга, до сих пор является дискуссионным. Первые ренорм-групповые расчеты в двух измерениях (четырехпетлевое приближение) дали значения ω, близкие к 1.3 [1,2]. Пересуммирование ϵ-разложения при $\epsilon = 2$ привело к оценке $\omega = 1.6 \pm 0.2$ [30]. Эти числа довольно хорошо согласуются с предсказаниями конформной теории, согласно которой для двумерной модели Изинга $\omega = 4/3$ [31], и с тем, что дал анализ высокотемпературных разложений: $\omega = 1.35 \pm 0.25$ [32]. С другой стороны, все приведенные значения находятся в противоречии с результатами точного расчета главных сингулярных и первых поправочных членов для восприимчивости плоской модели Изинга, из которых следует, что $\omega = 1$ [33]. Кроме того, недавно были приведены аргументы в пользу того, что двумерная модель Изинга, принадлежащая к ряду конформных теорий, для которых $\omega = 4/m$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, занимает особое место в этом ряду: для нее индекс ω должен быть равен 2 [34], а не $4/3$ (модели Изинга отвечает $m = 3$). Единственная пертурбативная оценка, близкая к $\omega = 2$, была получена путем анализа разложения сильной связи для β-функции, который дал $\omega = 1.88$ [26]. Напротив, результаты наших вычислений, как видно из табл. 2, подтверждают вывод о близости индекса ω двумерной модели Изинга к $4/3$. Учет пятипетлевого члена в $\beta(g)$ позволил существенно поднять точность оценки ω по сравнению с четырехпетлевым приближением и соответственно сделать этот вывод более определенным.

Мы благодарны Б.Н. Шалаеву за многочисленные обсуждения критической термодинамики двумерных систем и полезные советы.

Список литературы

[1] G.A. Baker, B.G. Nickel, D.I. Meiron. Phys. Rev. **B17**, *3*, 1365 (1978).
[2] J.C. Le Guillou, J. Zinn-Justin. Phys. Rev. **B21**, *9*, 3976 (1980).
[3] S.A. Antonenko, A.I. Sokolov. Phys. Rev. **E51**, *3*, 1894 (1995).
[4] R. Guida, J. Zinn-Justin. Nucl. Phys. Rev. **B489**, *3*, 626 (1997).
[5] H. Kleinert. Phys. Rev. **D57**, *4*, 2264 (1998).
[6] А.И. Соколов. ФТТ **40**, *7*, 1284 (1998).
[7] R. Guida, J. Zinn-Justin. J. Phys. **A31**, *40*, 8103 (1998).
[8] H. Kleinert. Phys. Rev. **D60**, 08 5001 (1999).
[9] A.I. Sokolov, E.V. Orlov, V.A. Ul'kov, S.S. Kashtanov. Phys. Rev. **E60**, *2*, 1344 (1999).
[10] B. Nienhuis. Phys. Rev. Lett. **49**, *15*, 1062 (1982).
[11] B. Nienhuis. J. Stat. Phys. **34**, 731 (1984).
[12] D. Friedan, Z. Qiu, S. Shenker. Phys. Rev. Lett. **52**, *18*, 1575 (1984).
[13] J. Salas, A. Sokal. J. Stat. Phys. **98**, *3/4* (2000) in press; препринт cond-mat/9904038 (1999).
[14] M. Caselle, M. Hasenbusch, A. Pelissetto, E. Vicari. Препринт hep-th/0003049 (2000).
[15] A.I. Sokolov, E.V. Orlov. Phys. Rev. **B58**, *5*, 2395 (1998).
[16] S.Y. Zinn, S.N. Lai, M.E. Fisher. Phys. Rev. **E54**, *2*, 1176 (1996).
[17] A. Pelissetto, E. Vicari. Nucl. Phys. **B522**, *3*, 605 (1998).
[18] B.G. Nickel, D.I. Meiron, G.A. Baker, jr. Compilation of 2-pt and 4-pt graphs for continuous spin model. University of Guelph Report (1977).
[19] Дж. Бейкер, П. Грейвс-Моррис. Аппроксимация Паде. Мир, М. (1986).
[20] I.O. Mayer. J. Phys. **A22**, *14*, 2815 (1989).
[21] G.A. Baker, jr. Phys. Rev. **B15**, 1552 (1977).
[22] P. Butera, M. Comi. Phys. Rev. **B54**, *22*, 15 828 (1996).
[23] A. Pelissetto, E. Vicari. Nucl. Phys. **B519**, *3*, 626 (1998).
[24] M. Campostrini, A. Pelissetto, P. Rossi, E. Vicari. Nucl. Phys. **B459**, *1*, 207 (1996).
[25] J.K. Kim, A. Patrascioiu. Phys. Rev. **D47**, 2588 (1993).
[26] G. Jug, B.N. Shalaev. J. Phys. **A32**, *42*, 7249 (1999).
[27] J. Zinn-Justin. Quantum Field Theory and Critical Phenomena. Clarendon Press, Oxford (1996).
[28] B.G. Nickel. Physica **A117**, 189 (1981).
[29] J. Kim. Phys. Lett. **B345**, 469 (1995).
[30] J.C. Le Guillou, J. Zinn-Justin. J. Physique Lett. (Paris) **46**, L137 (1985); J. Physique (Paris) **48**, 19 (1987); **50**, 1365 (1989).
[31] B. Nienhus. J. Phys. **A15**, 199 (1982).
[32] M. Barma, M.E. Fisher. Phys. Rev. Lett. **53**, *20*, 1935 (1984).
[33] E. Barouch, B.M. McCoy, T.T. Wu. Phys. Rev. Lett. **31**, *23*, 1409 (1973).
[34] M. Henkel. Conformal Invariance and Critical Phenomena. Springer Verlag, N.Y. (1999).