

01;08;09

Строгие и приближенные методы моделирования рассеяния волн на локализованном возмущении идеально проводящей поверхности

© В.В. Залипаев¹, А.В. Костин²¹ Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН, 191011 Санкт-Петербург, Россия² Санкт-Петербургский государственный институт точной механики и оптики (Технический университет), 197101 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 17 июля 1998 г.)

Рассматриваются строгие и приближенные методы решения задачи рассеяния гармонической плоской волны на плоской поверхности, возмущенной произвольным образом вдоль измерения на участке конечной ширины. Применительно к этой задаче описывается метод интегральных уравнений Фредгольма второго рода, а также приближения Кирхгофа и Рэлея. Приводится сравнение метода интегральных уравнений и приближения Рэлея в расчетах рассеяния на резонансных поверхностях при произвольном падении плоской волны. Обсуждаются результаты расчетов по методу интегральных уравнений и приближению Кирхгофа в случае рассеяния на крупномасштабных поверхностях. Особое внимание уделяется падению под малыми углами скольжения.

Введение

К настоящему времени проведены обширные исследования, посвященные рассеянию электромагнитных и акустических волн на неровной поверхности (см., например, библиографию в [1–4]). К наиболее известным методам моделирования рассеяния волн на крупномасштабной или резонансной неровной поверхности относятся приближения Кирхгофа и Рэлея, а также строгий подход, основанный на методе интегральных уравнений. Известно, что при рассеянии под малыми углами падения на крупных (в масштабе длины волны падающего излучения) неровностях оказывается эффективным приближение Кирхгофа. Однако при малых углах скольжения падающей волны, что является весьма характерной ситуацией в многих задачах радиолокации, приближение Кирхгофа недопустимо вследствие появления затененных участков на отражающей границе и многократных переотражений между ее элементами. Приближение Рэлея приводит к точным расчетам отраженного поля при резонансном рассеянии, т.е. в том случае, когда длина падающей волны совпадает по порядку величины с характерным размером шероховатостей отражающей поверхности. При этом сама поверхность должна быть полой. Метод интегральных уравнений, не имеющий в рамках классической электродинамики ограничений на область применимости, весьма эффективен при рассмотрении резонансного рассеяния и встечает определенные трудности вычислительного характера в случае его применения в коротковолновом диапазоне.

Основной целью данной работы является описание (на основе анализа результатов численных расчетов) границ применимости указанных выше методов в задаче рассеяния плоской волны на идеально проводящей плоской поверхности, возмущенной произвольным образом вдоль одного измерения на участке конечной ширины. Обсуждаются ограничения на высоту и крутизну неровностей в случае использования метода интегральных уравнений и приближения Рэлея. Особое внимание уделяется рассмотрению случая рассеяния плоской волны под малыми углами скольжения.

Рассмотрим двумерную задачу рассеяния на неровной поверхности Σ плоской волны $u_i(P) = \exp(i\alpha_0 x - i\beta_0 y)$, где $\alpha_0 = k \sin \Theta_0$, $\beta_0 = k \cos \Theta_0$, Θ_0 — угол падения, k — волновое число, $P = (x, y)$ — точка наблюдения. Предполагается, что временная зависимость имеет вид $\exp(-i\omega t)$. Поверхность Σ описывается гладкой функцией $y = f(x)$ (рис. 1). Возмущенный произвольным образом участок поверхности сосредоточен на промежутке $x \in (-a, a)$, $a > 0$, т.е. $f(x) \equiv 0$ при $|x| > a$. Полное волновое поле $u(P)$, представляющее электрическую или магнитную z -компоненту линейно поляризованной электромагнитной волны, является решением уравнения

Постановка задачи

Рассмотрим двумерную задачу рассеяния на неровной поверхности Σ плоской волны $u_i(P) = \exp(i\alpha_0 x - i\beta_0 y)$, где $\alpha_0 = k \sin \Theta_0$, $\beta_0 = k \cos \Theta_0$, Θ_0 — угол падения, k — волновое число, $P = (x, y)$ — точка наблюдения. Предполагается, что временная зависимость имеет вид $\exp(-i\omega t)$. Поверхность Σ описывается гладкой функцией $y = f(x)$ (рис. 1). Возмущенный произвольным образом участок поверхности сосредоточен на промежутке $x \in (-a, a)$, $a > 0$, т.е. $f(x) \equiv 0$ при $|x| > a$. Полное волновое поле $u(P)$, представляющее электрическую или магнитную z -компоненту линейно поляризованной электромагнитной волны, является решением уравнения

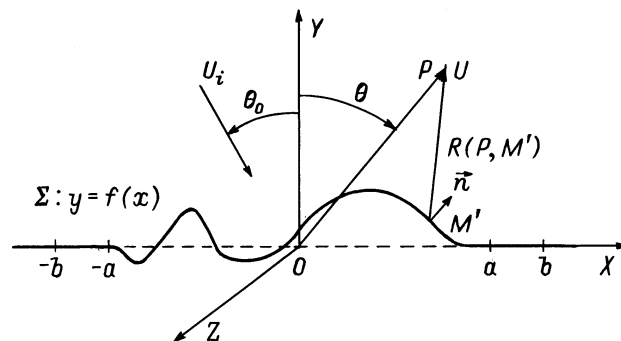


Рис. 1. Геометрия рассеивающей поверхности и используемые обозначения.

Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad (1)$$

и удовлетворяет граничному условию Дирихле

$$u|_{\Sigma} = 0 \quad (2)$$

либо Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = 0 \quad (3)$$

в случае электрической либо магнитной поляризации соответственно. Представим полное поле u в виде

$$u = u_i + u_{rm} + u_s, \quad (4)$$

где $u_{rm} = \varepsilon \exp(i\alpha_0 x + i\beta_0 y)$ — зеркально отраженная по отношению к плоскости $y = 0$ плоская волна, $\varepsilon = -1$ и $\varepsilon = 1$ в случаях граничных условий (2) и (3) соответственно, u_s — рассеянная компонента полного поля.

Метод интегральных уравнений

В случае электрической поляризации будем отыскивать компоненту $u_s(P)$ в виде потенциала двойного слоя с неизвестной плотностью $\nu(M')$

$$u_s(P) = \int_{\Sigma} \nu(M') \frac{\partial}{\partial n'} H_0^{(1)}(kR(P, M')) ds, \quad (5)$$

удовлетворяющему граничному условию

$$u_s|_{\Sigma} = 2i \exp(i\alpha_0 x) \sin(\beta_0 f(x)), \quad (6)$$

а для магнитной поляризации — в виде потенциала простого слоя с плотностью $\mu(M')$

$$u_s(P) = \int_{\Sigma} \mu(M') H_0^{(1)}(kR(P, M')) ds, \quad (7)$$

удовлетворяющему граничному условию

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_s}{\partial n} \Big|_{\Sigma} &= \frac{-2 \exp(i\alpha_0 x) \{ \beta_0 \sin(\beta_0 f(x)) + \alpha_0 i f'(x) \cos(\beta_0 f(x)) \}}{\sqrt{1 + f'(x)^2}}. \end{aligned} \quad (8)$$

В формулах (5) и (7) $M' = (x', y')$ — точка интегрирования на отражающей границе Σ , $\partial/\partial n'$ — нормальная производная в точке M' , $H_0^{(1)}(x)$ — функции Ханкеля первого рода нулевого порядка, $R(P, M') = \sqrt{(x-x')^2 + (y-f(x'))^2}$ — расстояние между точками P и M' , ds — дифференциал длины дуги. Используя известное свойство для предельного значения потенциала двойного слоя и нормальной производной

потенциала простого слоя при $P \rightarrow M \in \Sigma$ (см., например, [5]), мы получаем для неизвестных функций $\nu(M)$, $\mu(M)$ следующие интегральные уравнения второго рода:

$$\nu(M) = \nu_0(M) + \frac{1}{2i} \int_{\Sigma} \nu(M') \frac{\partial}{\partial n'} H_0^{(1)}(kR(M, M')) ds, \quad (9)$$

$$\mu(M) = \mu_0(M) - \frac{1}{2i} \int_{\Sigma} \mu(M') \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(1)}(kR(M, M')) ds, \quad (10)$$

где интегралы понимаются в смысле главного значения, а неоднородные члены определяются по формулам

$$\begin{aligned} \nu_0(M) &= -\exp(i\alpha_0 x) \sin(\beta_0 f(x)), \\ \mu_0(M) &= \frac{i \exp(i\alpha_0 x) \{ \beta_0 \sin(\beta_0 f(x)) + i\alpha_0 f'(x) \cos(\beta_0 f(x)) \}}{\sqrt{1 + f'(x)^2}}. \end{aligned}$$

Для дальнейшего анализа удобно переписать интегральные уравнения (9), (10) в таком виде, когда все функции зависят от горизонтальной координаты. В результате вычисления нормальной производной в (9) и (10) получим следующие интегральные уравнения для электрической и магнитной поляризации:

$$\nu(x) = \nu_0(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} K_D(x, x') \nu(x') dx', \quad (11)$$

$$\mu(x) = \mu_0(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} K_N(x, x') \mu(x') dx', \quad (12)$$

с ядрами

$$\begin{aligned} K_D(x, x') &= \frac{kH_1^{(1)}(kR(x, x'))}{2iR(x, x')} \\ &\times [f(x) - f(x') - f'(x')(x - x')], \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} K_N(x, x') &= \frac{kH_1^{(1)}(kR(x, x'))}{2iR(x, x')} \\ &\times [f(x) - f(x') - f'(x)(x - x')], \end{aligned} \quad (14)$$

где $R(x, x') = \sqrt{(x-x')^2 + (f(x) - f(x'))^2}$, $H_1^{(1)}(x)$ — функция Ханкеля первого рода первого порядка.

При этом мы воспользовались тем, что $ds = \sqrt{1 + f'(x')^2} dx'$. Нетрудно убедиться в том, что ядра (13), (14) уравнений (11), (12) являются непрерывными функциями. Интегральные уравнения (11), (12) не допускают решения в явном виде. Применение численных методов нахождения решения сталкивается с очевидной проблемой, связанной

с неограниченностью области интегрирования в уравнениях (11), (12). Для преодоления этой трудности следует учесть, что рассеянное поле u_s обусловлено возмущением горизонтальной плоскости $y = 0$, локализованным на промежутке $x \in (-a, a)$. Благодаря этому, как показано в работе [6], можно получить интегральные уравнения Фредгольма второго рода на отрезке $x, x' \in (-b, b), b > a$

$$\nu(x) = \nu_0(x) + \int_{-b}^b \left[K_D(x, x') - \int_{-b}^b K_D(x, x'') K_D(x'', x') dx'' \right] \nu(x') dx', \quad (15)$$

$$\mu(x) = \mu_0(x) + \int_{-b}^b \left[K_N(x, x') - \int_{-b}^b K_N(x, x'') K_N(x'', x') dx'' \right] \mu(x') dx'. \quad (16)$$

Эти уравнения с помощью дискретизации по x и x' приводятся к системе линейных алгебраических уравнений, которая затем численно решается на компьютере. Плотность потенциала для $|x| > b$ можно вычислить по формулам

$$\nu(x) = - \int_{-a}^a K_D(x, x') \nu(x') dx',$$

$$\mu(x) = - \int_{-a}^a K_N(x, x') \mu(x') dx'.$$

Следует отметить, что в некоторых работах, посвященных рассматриваемой задаче, например в [7], применялось сингулярное интегральное уравнение первого рода. Однако, как было показано в работе [6], такой подход встречает определенные трудности при расчетах полей, рассеянных на крутых неровностях и в особенности при скользящем падении. С другой стороны, метод, основанный на интегральных уравнениях Фредгольма второго рода (15) и (16), свободен от этих недостатков.

Используя интегральное представление для функции Фанкеля

$$H_0^{(1)}(k\sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i\alpha x + i\beta|y|] \frac{d\alpha}{\beta},$$

где $\beta = \sqrt{k^2 - \alpha^2}$, $\text{Im}\alpha \geq 0$ для рассеянного поля в точках наблюдения, расположенных выше поверхности Σ ,

из (5) и (7) получаем представление рассеянного поля в виде интеграла по плоским волнам

$$u_s(P) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\alpha) \exp[i\alpha x + i\beta y] \frac{d\alpha}{\beta}, \quad (17)$$

где амплитудный спектр $A(\alpha)$ в подынтегральной функции определяется по формуле

$$A(\alpha) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(x) [\alpha f'(x) - \beta] \exp[-i\alpha x - i\beta f(x)] dx \quad (18)$$

для электрической поляризации и

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} \exp[-i\alpha x - i\beta f(x)] dx \quad (19)$$

для магнитной поляризации. Если плотности потенциалов $\nu(x)$, $\mu(x)$ найдены в результате численного решения интегральных уравнений (15), (16), то амплитудный спектр $A(\alpha)$ может быть вычислен по формулам (18), (19).

На практике интерес представляют однородные плоские волны, которые определяются условием $-k < \alpha < k$. Неоднородные волны дают заметный вклад в рассеянное поле $u_s(P)$ лишь в непосредственной близости от поверхности Σ . С учетом только однородных волн представление (17) преобразуется к виду

$$u_s(x, y) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} A(\Theta) \exp[ik(x \sin \Theta + y \cos \Theta)] d\Theta, \quad (20)$$

где амплитудный спектр $A(\Theta)$ определяется по формуле

$$A(\Theta) = \frac{ik}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(x) [f'(x) \sin \Theta - \cos \Theta] \times \exp[-ik(x \sin \Theta + \cos \Theta f(x))] dx \quad (21)$$

для электрической поляризации и

$$A(\Theta) = \frac{k}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} \times \exp[-ik(x \sin \Theta + \cos \Theta f(x))] dx \quad (22)$$

для магнитной поляризации. В этих формулах угол Θ задается следующими соотношениями: $\alpha = k \sin \Theta$, $\beta = k \cos \Theta$, $-\pi/2 < \Theta < \pi/2$.

Для рассеянного поля можно получить другое представление, которое весьма эффективно в случае, когда точка наблюдения $P(x, y)$ расположена на больших расстояниях от возмущенной области. Если воспользоваться для

формул (5) и (7) асимптотикой функции Ханкеля $H_0^{(1)}(x)$ при больших значениях аргумента

$$H_0^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp[ix - i\pi/4](1 + O(x^{-1})),$$

а также асимптотической формулой для расстояния

$$R(P, M') = r - (x' \sin \Theta + f(x') \cos \Theta) + O(r^{-1}), \quad r \rightarrow \infty,$$

где $x = r \cos \Theta$, $y = r \sin \Theta$, то в старшем порядке рассеянное поле $u_s(x, y)$ может быть представлено в виде цилиндрической волны

$$u_s(P) = \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} \exp[ikr - i\pi/4]A(\Theta) + o((kr)^{-1/2}). \quad (23)$$

Из последней формулы следует, что диаграмма рассеяния $S(\Theta)$, пропорциональная интенсивности рассеянного поля, определяется простой формулой

$$S(\Theta) = |A(\Theta)|^2.$$

Таким образом, значения амплитудного спектра $A(\Theta)$, полученные на основе численного решения интегральных уравнений (15), (16), определяют диаграмму рассеяния — физическую величину, представляющую практический интерес.

В теории рассеяния известно соотношение, называемое оптической теоремой (см., например, [7]), которому удовлетворяет амплитудный спектр при любом профиле неровности и любом угле падения Θ_0

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |A(\Theta)|^2 d\Theta = -2\varepsilon \operatorname{Re} A(\Theta_0). \quad (24)$$

Для контроля счета это тождество удобно использовать в виде

$$\Delta E(\Theta_0) \stackrel{\text{def}}{=} \left| 1 + \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |A(\Theta)|^2 d\Theta}{2\varepsilon \operatorname{Re} A(\Theta_0)} \right| \equiv 0. \quad (25)$$

Выражение (25) называют критерием энергетического баланса (КЭБ). Степень отклонения $\Delta E(\Theta_0)$ от нуля позволяет судить о точности расчетов. Заметим, что условие $\Delta E(\Theta_0) \equiv 0$ является необходимым, но, строго говоря, недостаточным условием правильности вычислений амплитудного спектра.

Приближенный метод Рэлея

В теории рассеяния волн хорошо известна так называемая гипотеза Рэлея, которая заключается в том, что представление рассеянного поля интегралом по плоским волнам

$$u_s(P) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha) \exp(i\alpha x + i\beta y) d\alpha$$

предполагается справедливым вплоть до отражающей границы Σ . Тогда, как показано в [8], можно получить интегральное уравнение Фредгольма второго рода с непрерывными ядрами для амплитудного спектра $A(\alpha, \alpha_0)$ однородных волн. Для электрической поляризации такое уравнение имеет вид

$$A(\alpha, \alpha_0) = A_D^{(0)}(\alpha, \alpha_0) + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R_D(\alpha, \alpha') A(\alpha', \alpha_0) d\alpha', \quad (26)$$

где неоднородный член и ядро равны

$$A_D^{(0)}(\alpha, \alpha_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \sin(\beta_0 f(x)) \times [i\beta \cos(\beta f(x)) - \alpha f'(x) \sin(\beta f(x))] \exp[i(\alpha_0 - \alpha)x] dx,$$

$$R_D(\alpha, \alpha') = \frac{i}{2\pi} \int_{-a}^a \sin(\beta f(x)) [\alpha' f'(x) - \beta'] \times \exp[i(\alpha' - \alpha)x + i\beta' f(x)] dx, \quad \beta' = \sqrt{k^2 - \alpha'^2}. \quad (27)$$

Аналогично для магнитной поляризации получаем

$$A(\alpha, \alpha_0) = A_N^{(0)}(\alpha, \alpha_0) + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R_N(\alpha, \alpha') A(\alpha', \alpha_0) d\alpha', \quad (28)$$

где

$$A_N^{(0)}(\alpha, \alpha_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \cos(\beta f(x)) [\alpha_0 f'(x) \cos(\beta_0 f(x)) - i\beta_0 \sin(\beta_0 f(x))] \exp[i(\alpha_0 - \alpha)x] dx,$$

$$R_N(\alpha, \alpha') = -\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a [\alpha f'(x) \cos(\beta f(x)) + i\beta' \sin(\beta f(x))] \exp[i(\alpha' - \alpha)x + i\beta' f(x)] dx. \quad (29)$$

Приближение Кирхгофа

Приближение Кирхгофа является наиболее простым и распространенным методом исследования рассеяния на крупномасштабных неровностях. В этом приближении поле в каждой точке отражающей границы предполагается таким, каким оно было бы, если в данной точке заменить поверхность соответствующей касательной плоскостью. Так, в случае электрической поляризации для нормальной производной полного поля имеем следующее выражение:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 2 \frac{\partial u_i}{\partial n} = -\frac{2i(\alpha_0 f'(x) + \beta_0)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \exp[i\alpha_0 x - i\beta_0 f(x)].$$

Теперь, если воспользоваться формулой Грина, для амплитудного спектра рассеянного поля получается явное представление в виде интеграла [9]

$$A(\Theta, \Theta_0) = \varepsilon \frac{k[1 + \cos(\Theta + \Theta_0)]}{2\pi(\cos \Theta + \cos \Theta_0)} \times \int_{-a}^a \exp[i(\alpha_0 - \alpha)x] \{ \exp[-i(\beta + \beta_0)f(x)] - 1 \} dx. \quad (30)$$

Отметим, что абсолютная величина амплитудного спектра, а значит и диаграмма рассеянного поля, в этом приближении не зависит от поляризации падающей волны.

Численная реализация и результаты расчетов

Принципиальных проблем при решении полученных выше интегральных уравнений не возникает. С другой стороны, на практике численное решение интегральных уравнений задач рассеяния сопряжено с определенными трудностями технического характера. Проблема состоит в том, что как ядра, так и правые части интегральных уравнений (15), (16) являются быстро осциллирующими функциями. Из численных экспериментов выясняется, что дискретизация интегральных уравнений (15), (16) должна вестись исходя из условия $N \geq 8(2b/\lambda)$, где N — число точек дискретизации. Таким образом, даже для расчета рассеяния на неровности шириной $2a \approx 100\lambda$ приходится решать систему линейных алгебраических уравнений с размерностью комплексной матрицы системы $10^3 \times 10^3$. При решении такой системы методом Гаусса выполняется $\approx 10^9$ операций с комплексными числами, а для хранения такой матрицы в оперативной памяти компьютера необходимо приблизительно 8 мегабайтов. В конкретных же инженерных задачах зачастую требуется проводить расчеты рассеяния на поверхностях с шириной неровной зоны (области засветки) порядка $10^4\lambda$. Для хранения матрицы такой задачи требуется как минимум 95 гигабайтов оперативной памяти, а для ее решения — порядка 10^{15} операций с комплексными числами, что является очень сложной задачей для современных компьютеров. Кроме того, необходимо иметь в виду, что постановка многих задач рассеяния носит сугубо статистический характер, т.е. требуется проводить моделирование рассеяния на ансамбле поверхностей, а затем вычислять интересующие моменты рассеянного излучения. С другой стороны, очевидный прогресс в области вычислительной техники позволяет надеяться, что упомянутые трудности могут быть до известной степени устранены в обозримом будущем.

Интегральные уравнения гипотезы Рэлея в вычислительном плане представляются менее сложными, чем в строгом методе. При выборе шага дискретизации интегральных уравнений (26), (28) приближения Рэлея

следует прежде всего исходить из требуемого разрешения рассчитываемой диаграммы рассеяния. При этом нужно учитывать, что время расчета одного элемента соответствующей матрицы пропорционально $2a$. Оказывается, что при не слишком больших N самой трудоемкой операцией при численной реализации приближения Рэлея является именно расчет матриц, соответствующих интегральным уравнениям. Следует также отметить, что обычно наблюдается тенденция возрастания частоты вариаций амплитудного спектра при увеличении ширины освещаемой зоны. Поэтому для расчета интегральными уравнениями гипотезы Рэлея амплитудного спектра на все более и более широких поверхностях возникает необходимость в увеличении N , даже если в таком высоком разрешении нет практической потребности.

Описанные выше методы расчета диаграммы рассеянного поля на основе численного решения строгих интегральных уравнений (9) и (10), прямой расчет диаграммы рассеяния в рамках гипотезы Рэлея по уравнениям (26), (28), а также в приближении Кирхгофа (30) были реализованы в виде компьютерных программ платформы IBM PC/AT. Мы приводим результаты расчетов для двух характерных ситуаций с целью прояснения областей применимости обсуждаемых методов расчета, что является весьма важной информацией для будущих численных экспериментов по моделированию реальных задач рассеяния.

Ниже приводятся результаты расчетов для цилиндрической поверхности, описываемой функцией

$$f(x) = A_0 \cos(2\pi x/d)V(x), \quad (31)$$

где $V(x)$ — срезающая функция, определяемая формулами

$$V(x) = \begin{cases} \frac{a+x}{a-c} - \frac{1}{2\pi} \sin\left(2\pi \frac{a+x}{a-c}\right), & \text{если } x \in (-a, -c), \\ 0, & \text{если } 0 \leq c < a; \\ 1, & \text{если } x \in (-c, -c); \\ \frac{a-x}{a-c} - \frac{1}{2\pi} \sin\left(2\pi \frac{a-x}{a-c}\right), & \text{если } x \in (c, a); \\ 0, & \text{если } x \notin (-a, a). \end{cases}$$

Соответствующие значения величины $\Delta E(\Theta_0)$, связанные с относительной точностью расчетов (степень выполнения критерия энергетического баланса), указываются в подписях к рисункам. Для величины $\Delta E(\Theta_0)$ в случае TE - или TM -поляризации применяются обозначения ΔE_D или ΔE_N соответственно. Все геометрические параметры задачи приводятся в длинах волн.

В первой серии расчетов исследовалась область применимости интегральных уравнений (26), (28), полученных в приближении Рэлея. Как известно, условие применимости приближения Рэлея для бесконечной периодической поверхности $f(x) = A_0 \cos(2\pi x/d)$ имеет вид $2\pi A_0/d < 0.448$ [10]. Как следует из данных наших расчетов, это условие является лишь необходимым.

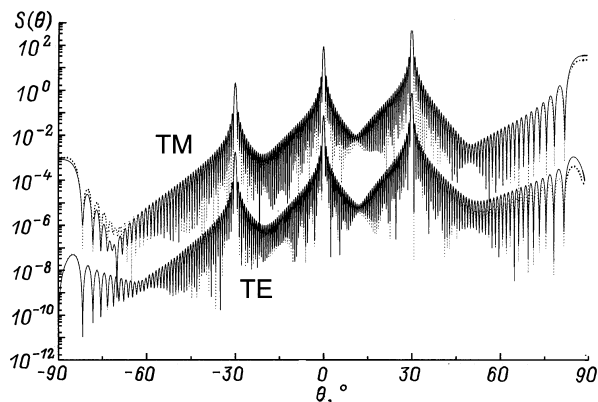


Рис. 2. Диаграмма рассеяния плоской волны на профиле (31) с параметрами $a = 50$, $c = 45$, $A_0 = 0.1$, $d = 2$ под углом падения $\Theta_0 = 89^\circ$. Сплошные кривые — расчет по интегральным уравнениям (26), (28) приближения Рэлея; пунктир — строгий метод интегральных уравнений (15), (16). КЭБ: $\Delta E_D = 4.9 \cdot 10^{-2}$, $\Delta E_N = 4.0 \cdot 10^{-2}$ (приближение Рэлея), $\Delta E_D = 1.1 \cdot 10^{-4}$, $\Delta E_N = 1.1 \cdot 10^{-5}$ (строгий метод интегральных уравнений).

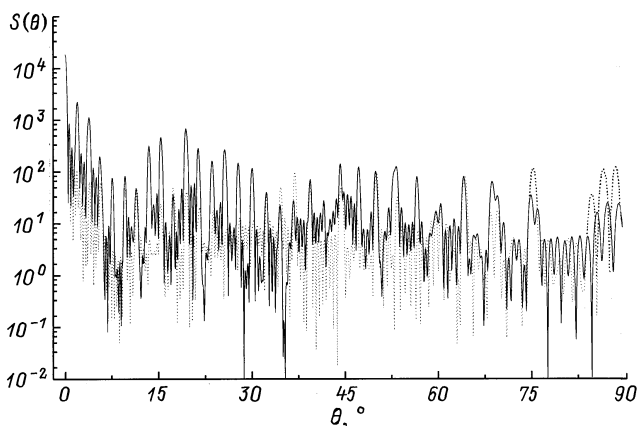


Рис. 3. Диаграмма рассеяния плоской волны на профиле (31) с параметрами $a = 70$, $b = 75$, $c = 65$, $A_0 = 15$, $d = 30$ под углом падения $\Theta_0 = 0$. Сплошная кривая — TE -поляризация, расчет по строгому интегральному уравнению (15); пунктир — приближение Кирхгофа (30), КЭБ: $\Delta E_D = 3 \cdot 10^{-6}$ (строгий метод интегральных уравнений), $\Delta E = 0.39$ (приближение Кирхгофа).

Если установить максимально допустимую погрешность выполнения КЭБ $\Delta E \leq 0.05$, то в формуле (31) A_0 не должно превышать 0.2. В качестве примера на рис. 2 представлена диаграмма рассеяния для профиля (31) с параметрами $a = 50$, $c = 45$, $A_0 = 0.1$, $d = 2$ и углом падения $\Theta_0 = 89^\circ$, вычисленная для обеих поляризаций по интегральным уравнениям (26), (28) гипотезы Рэлея и строгому методу интегральных уравнений (15), (16). Наблюдается хорошее совпадение результатов обоих методов. Отметим, что различие между поляризациями в

этом случае рассеяния под малыми углами скольжения заключается в разных масштабных коэффициентах, но не в форме самих диаграмм. Приближение Кирхгофа в такой геометрии, конечно, неприменимо.

Таким образом, интегральные уравнения (26), (28) гипотезы Рэлея могут применяться в качестве более простой в вычислительном плане альтернативы строгому методу интегральных уравнений в расчетах рассеяния на невысоких, достаточно пологих резонансных неровностях, в том числе и при малых углах скольжения.

Во второй серии расчетов изучалась возможность применения строгого метода интегральных уравнений для расчетов рассеяния на крупномасштабных поверхностях. Как уже отмечалось выше, основная трудность таких расчетов заключается в быстром — как $(2a)^3$ — росте вычислительной сложности решения интеграль-

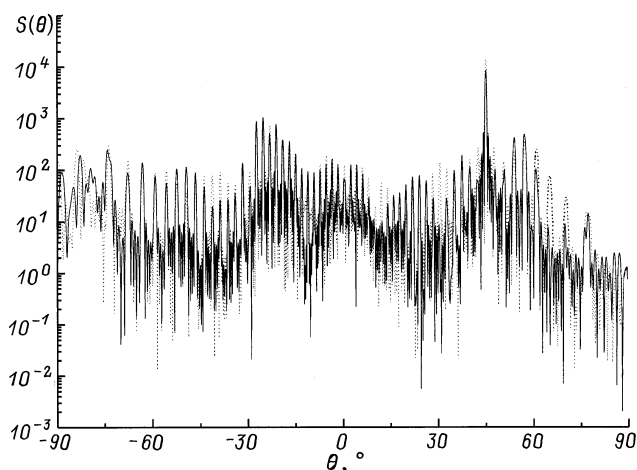


Рис. 4. То же, что на рис. 3, для угла падения $\Theta_0 = 45^\circ$. Сплошная кривая — TE -поляризация, пунктир — TM -поляризация. Расчет по строгим интегральным уравнениям (15), (16). КЭБ: $\Delta E_D = 4.5 \cdot 10^{-4}$, $\Delta E_N = 2.5 \cdot 10^{-4}$.

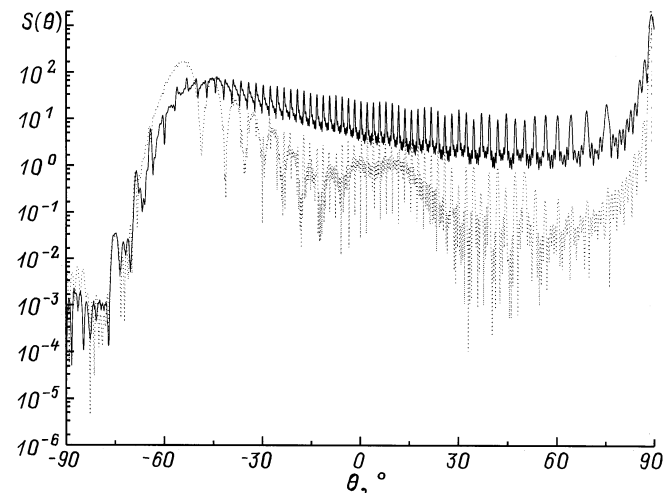


Рис. 5. То же, что на рис. 3, для угла падения $\Theta_0 = 89^\circ$. КЭБ: $\Delta E_D = 2.6 \cdot 10^{-4}$, $\Delta E_N = 2.5 \cdot 10^{-4}$.

ных уравнений. Кроме того, плотность сетки дискретизации интегральных уравнений должна увеличиваться по мере роста характерной крутизны рассеивающей поверхности. Однако эти недостатки строгого метода интегральных уравнений искупаются высокой точностью и степенью достоверности обеспечиваемых им результатов. На рис. 3–5 приведены диаграммы рассеяния на крутой крупномасштабной поверхности, определяемой параметрами $a = 70$, $b = 75$, $c = 65$, $A_0 = 15$, $d = 30$. На рис. 3 представлена диаграмма рассеяния для угла падения $\Theta_0 = 0^\circ$, вычисленная строгим методом интегральных уравнений для TE -поляризации и в приближении Кирхгофа. В силу симметрии рассматриваемой геометрии рассеяния при нормальном падении диаграмма рассеяния является четной функцией угла рассеяния Θ и поэтому приводится на рисунке только в диапазоне $0 \leq \Theta \leq 90^\circ$. Видно, что даже в случае нормального падения приближение Кирхгофа обеспечивает достаточно точные данные только в малой окрестности направления зеркального отражения. Этот факт нетрудно объяснить наличием переотражений между элементами поверхности, которые в приближении Кирхгофа не учитываются. На рис. 4 и 5 показаны соответствующие диаграммы TE - и TM -поляризации для углов падения $\Theta_0 = 45$ и 89° . Точность этих вычислений остается очень высокой, в том числе и для скользящего падения, когда при $x > a$ образуется длинная тень. Ее корректный учет в расчетах диаграммы рассеяния оказывается возможным благодаря строгой процедуре редукции исходных интегральных уравнений (11) и (12) в бесконечных пределах к интегральным уравнениям (15) и (16) в конечных пределах, учитывающих влияние возмущенного промежутка поверхности $(-a, a)$ на плоский участок $|x| > b$.

Заключение

Как видно из результатов численных расчетов, приближение Рэлея эффективно для описания рассеяния волн на пологих и небольших по высоте неровностях. Оказывается, что точность расчетов остается достаточно высокой и для малых углов скольжения падающей плоской волны. Однако с увеличением высоты неровностей, а именно при $A_0 > 0.2$, погрешность расчетов начинает расти лавинообразно и приближение Рэлея становится более неприменимым.

Из сравнения результатов численных расчетов по интегральным уравнениям (9), (10) теории потенциала и приближению Кирхгофа следует, что для крупных, но пологих неровностей и углов падения, далеких от скольжения, приближение Кирхгофа достаточно хорошо описывает рассеянное поле вблизи направления зеркального отражения. Из результатов расчетов видно, что для крутых высоких неровностей, а также при скользящих углах падения приближения Кирхгофа не может использоваться даже для качественного описания рассеянного

поля. С другой стороны, строгий подход, основанный на интегральных уравнениях Фредгольма второго рода, является единственным из опробованных методов, который справляется с этой сложной задачей, обеспечивая высокую точность расчетов во всем диапазоне углов падения и рассеяния.

Список литературы

- [1] Soto-Crespo J.M., Nieto-Vesperinas M. // J. Opt. Soc. Am. 1989. Vol. A6. N 3. P. 367–384.
- [2] Sánchez-Gil J.A., Nieto-Vesperinas M., Morino F., Gonzalez F. // J. Opt. Soc. Am. 1993. Vol. A10. N 12. P. 2628–2636.
- [3] Ngo H.D., Rino C.L. // Radio. Sci. 1994. Vol. 29. N 6. P. 1365–1379.
- [4] Barrick D.E. // Radio. Sci. 1995. Vol. 30. N 3. P. 563–580.
- [5] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
- [6] Baloshin Yu.A., Kostin A. // Int. Meth. Sci. and Eng. Vol. 1. Analytic Methods. London: Addison Welsley Longman, 1997. P. 32–37.
- [7] Maystre D. // IEEE Trans. On Antennas and Propagation. 1983. Vol. Ap-31. N 6. P. 885–895.
- [8] Балашин Ю.А., Залипаев В.В., Костин А.В., Смирнов С.А. // Опт. журн. 1996. № 12. С. 24–26.
- [9] Maystre D., Mata Mendes O., Roger A. // Optica Acta. 1983. Vol. 30. N 12. P. 1707–1723.
- [10] Millar R.F. // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1969. Vol. 65. Pt. 3. P. 773–791.