01;08

К теории малых колебаний произвольно искривленных мембран

© Г.Ф. Глинский

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет,
197376 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 23 сентября 1998 г.)

Выводится уравнение, описывающее малые колебания произвольно искривленной мембраны, поверхность которой рассматривается как двумерное риманово пространство. В основе вывода лежит вариационный принцип, из которого следуют уравнение движения и закон сохранения в форме, инвариантной относительно произвольных преобразований координат на поверхности мембраны. Показано, что волновое уравнение наряду с двумерным оператором Лапласа–Бельтрами содержит дополнительный член, пропорциональный скалярной кривизне поверхности мембраны. В качестве примера рассматриваются уравнения для мембраны сферической формы и мембраны, имеющей форму минимальной поверхности вращения — катеноида.

Введение

Задача определения собственных и вынужденных колебаний искривленных мембран возникает при анализе ряда вопросов прикладной акустики, гидроакустики, аэро- и гидродинамики. Однако сама постановка подобной задачи и ее решение выходят далеко за рамки чисто практических вопросов и имеют самостоятельный научный интерес.

Поверхность произвольно искривленной мембраны можно рассматривать как двумерное риманово пространство, вложенное в обычное трехмерное эвклидово пространство. Параметрическое задание этой поверхности однозначно определяет в двумерном римановом пространстве некоторую криволинейную систему координат и компоненты метрического тензора. Если нас интересуют малые отклонения искривленной мембраны от положения своего равновесия, то задача должна сводиться к решению волнового уравнения в рассматриваемом кривом двумерном пространстве. Под равновесной формой искривленной мембраны мы будем понимать форму, которую она приобретает в результате задания граничных условий и внешних статических сил. Например, мембрана может быть натянута на жесткий контур, представляющий собой некоторую кривую в трехмерном пространстве, что эквивалентно заданию соответствующих граничных условий. Если внешние силы отсутствуют, то равновесной форме мембраны должен соответствовать минимум ее поверхностной энергии. Для рассматриваемых в настоящей работе идеальных однородных мембран, не обладающих изгибной жесткостью, это соответствует минимуму их площади. Таким образом, в отсутствие внешних сил идеальная мембрана должна принимать форму минимальной поверхности. Так как площадь мембраны и другие ее интегральные характеристики не зависят от способа параметризации ее поверхности, то все получаемые уравнения должны быть инвариантны относительно произвольных преобразований координат (параметров), т.е. иметь общековариантный вид. Последнее может быть достигнуто посредством использования техники ковариантного или абсолютного дифференцирования.

В настоящей работе развивается единый инвариантный подход к решению задачи о малых колебаниях произвольно искривленной мембраны. В основе подхода лежит вариационный принцип, из которого следуют уравнение движения и закон сохранения непосредственно в общековариантной форме. В качестве степеней свободы, характеризующих малые отклонения мембраны от положения равновесия, рассматриваются смещения мембраны вдоль нормали к поверхности в каждой ее точке. Относительно произвольных преобразований координат на поверхности мембраны такая величина ведет себя как псевдоскаляр. В работе показано, что уравнение колебаний наряду с оператором Лапласа–Бельтрами содержит дополнительный член, пропорциональный скалярной кривизне поверхности мембраны. В качестве примера рассматриваются уравнения для мембраны сферической формы и мембраны, имеющей форму минимальной поверхности вращения — катеноида. Полученные в работе результаты могут быть использованы для расчета собственных и вынужденных колебаний мембран произвольной формы, а также при анализе вопросов устойчивости систем с границами раздела.

Поверхность искривленной мембраны как двумерное риманово пространство

Рассмотрим искривленную мембрану в плоском трехмерном пространстве. Пусть $\mathbf{x}$ — радиус-вектор произвольной точки этого пространства. Поверхность мембраны можно задать параметрически с помощью следующего векторного уравнения

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi^1, \xi^2), \tag{1}$$

где $\xi^\alpha (\alpha = 1, 2)$ — произвольные независимые параметры.

Если в рассматриваемом трехмерном пространстве выбрана декартова система координат, то это уравнение эквивалентно трем уравнениям для проекций радиус-вектора на соответствующие координатные оси $x^i = x^i(\xi^1, \xi^2)$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$.[1] Параметры ξ^α в этих уравнениях играют роль криволинейных координат на поверхности мембраны, а семейства кривых $\xi^1 = \mathrm{const}$ и $\xi^2 = \mathrm{const}$ определяют соответствующую им координатную сетку. Таким образом, поверхность мембраны можно рассматривать как двумерное риманово пространство, в котором задана некоторая криволинейная система координат ξ^α.

Рассмотрим две бесконечно близкие точки на поверхности мембраны $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$. Согласно (1),

$$d\mathbf{x} = \frac{d\mathbf{x}}{d\xi^\alpha} d\xi^\alpha = \mathbf{a}_\alpha d\xi^\alpha,$$

где $\mathbf{a}_\alpha = d\mathbf{x}/d\xi^\alpha$ — два вектора $(\alpha = 1, 2)$, лежащие в плоскости, касательной к поверхности мембраны в точке $\mathbf{x}$, и образующие в этой точке некоторый, в общем случае неортогональный локальный базис. Квадрат расстояния между двумя этими точками определяется выражением

$$dl^2 = d\mathbf{x}^2 = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta d\xi^\alpha d\xi^\beta = G_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta. \qquad (2)$$

Отсюда следует, что симметричные по перестановке индексов величины

$$G_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta = \frac{dx^i}{d\xi^\alpha}\frac{dx^i}{d\xi^\beta} \qquad (3)$$

являются компонентами метрического тензора рассматриваемого риманова пространства [1]. Их называют также коэффициентами первой квадратичной формы поверхности. Если метрика поверхности известна, то площадь мембраны определяется интегралом

$$\sigma = \int \sqrt{G}\, d\xi^1 d\xi^2, \qquad (4)$$

где $G = \det\|G_{\alpha\beta}\|$.

При произвольных преобразованиях криволинейных координат ξ^α $\mathbf{a}_\alpha$ преобразуются как компоненты вектора. Однако обычные их производные не являются компонентами какого-либо тензора и только ковариантные (абсолютные) производные, которые мы будем обозначать символом ∇_α, преобразуются как компоненты тензора. Так, ковариантная производная от $\mathbf{a}_\beta$ по ξ^α определяется выражением

$$\nabla_\alpha \mathbf{a}_\beta = \frac{\partial \mathbf{a}_\beta}{\partial \xi^\alpha} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\mathbf{a}_\gamma, \qquad (5)$$

где $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = (1/2)\, G^{\gamma\sigma}(\partial G_{\sigma\alpha}/\partial\xi^\beta + \partial G_{\sigma\beta}/\partial\xi^\alpha - \partial G_{\alpha\beta}/\partial\xi^\sigma)$ — коэффициенты связности или символы Кристоффеля [1].

[1] Здесь и далее латинские индексы i, k, l ... пробегают значения 1, 2, 3; греческие α, β, γ ... — значения 1, 2, а по дважды повторяющимся индексам, если специально не оговорено, производится суммирование от 1 до 3 и от 1 до 2 соответственно. Так как метрика трехмерного пространства эвклидова, мы не будем делать различий между ковариантными и контрвариантными компонентами 3-тензоров и все латинские индексы будем писать сверху.

Наряду с базисными векторами $\mathbf{a}_\alpha$ в каждой точке поверхности мембраны можно определить перпендикулярный им единичный вектор нормали

$$\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2]}{\sqrt{G}}. \qquad (6)$$

Нетрудно проверить, что он удовлетворяет следующим условиям:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}_\alpha = 0\,(\alpha = 1, 2); \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1. \qquad (7), (8)$$

При произвольных преобразованиях координат ξ^α $\mathbf{n}$ умножается на ± 1 в зависимости от знака якобиана преобразования, т. е. в рассматриваемом двумерном римановом пространстве он является псевдоскаляром. Это становится очевидным, если его компоненты записать в виде

$$n^i = \frac{1}{2} e^{ikl} a^k_\alpha a^l_\beta \frac{\varepsilon^{\alpha\beta}}{\sqrt{G}},$$

где e^{ikl} и $\varepsilon^{\alpha\beta}$ — соответственно трехмерные и двумерные символы Леви–Чивита ($e^{123} = 1$, $\varepsilon^{12} = 1$).

Так как для скаляров и псевдоскаляров ковариантная и обычная производные совпадают, то справедливо соотношение

$$\nabla_\alpha \mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi^\alpha}. \qquad (9)$$

Наряду с коэффициентами первой квадратной формы $G_{\alpha\beta}$ важную роль в теории поверхностей играют коэффициенты второй квадратичной формы $b_{\alpha\beta}$, являющиеся компонентами симметричного псевдотензора. Они входят в так называемые деривационные формулы Гаусса и Вейнгартена [1]

$$\nabla_\alpha \mathbf{a}_\beta = b_{\alpha\beta}\mathbf{n}, \quad \nabla_\alpha \mathbf{n} = -G^{\beta\gamma} b_{\alpha\beta}\mathbf{a}_\gamma. \qquad (10), (11)$$

Для определения $b_{\alpha\beta}$ воспользуемся формулой (10). Умножая левую и правую части этого равенства скалярно на $\mathbf{n}$, будем иметь

$$b_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{d\xi^\alpha \partial \xi^\beta}\mathbf{n}, \qquad (12)$$

где мы использовали соотношения (5), (7), (8) и учли, что $\partial \mathbf{a}_\beta/\partial\xi^\alpha = \partial^2 \mathbf{x}/\partial\xi^\alpha\partial\xi^\beta$.

Эта формула позволяет вычислить в явном виде коэффициенты $b_{\alpha\beta}$, если поверхность задана параметрически (формула (1)). Ее можно представить в форме, более удобной для практических расчетов, если учесть, что в правой части (12), согласно (6), стоит смешанное произведение векторов, которое можно записать в виде определителя

$$b_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{G}} \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial^2 x^1}{\partial\xi^\alpha\partial\xi^\beta} & \dfrac{\partial^2 x^2}{\partial\xi^\alpha\partial\xi^\beta} & \dfrac{\partial^2 x^3}{\partial\xi^\alpha\partial\xi^\beta} \\ \dfrac{\partial x^1}{\partial\xi^1} & \dfrac{\partial x^2}{\partial\xi^1} & \dfrac{\partial x^3}{\partial\xi^1} \\ \dfrac{\partial x^1}{\partial\xi^2} & \dfrac{\partial x^2}{\partial\xi^2} & \dfrac{\partial x^3}{\partial\xi^2} \end{Vmatrix}. \qquad (13)$$

Коэффициенты второй квадратичной формы позволяют рассчитать тензор кривизны Римана–Кристоффеля

$$R_{\alpha\beta\gamma\sigma} = b_{\alpha\gamma}b_{\beta\sigma} - b_{\alpha\sigma}b_{\beta\gamma}.$$

и скалярную кривизну

$$R = G^{\alpha\gamma}G^{\beta\sigma}R_{\alpha\beta\gamma\sigma}. \quad (14)$$

Здесь $G^{\alpha\beta}$ — контрвариантные компоненты метрического тензора $G^{\alpha\beta}G_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}$, δ^{α}_{γ} — компоненты единичного тензора. Обычно используемые в теории поверхностностей средняя H и гауссова K кривизны определяются соотношениями

$$H = \frac{1}{2}G^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta}, \qquad K = \frac{b}{G} = \frac{1}{2}R, \quad (15),(16)$$

где $b = \det\|b_{\alpha\beta}\|$.

Они связаны с главными радиусами кривизны поверхности R_1 и R_2 известными формулами

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \qquad K = \frac{1}{R_1R_2}.$$

Относительно произвольных преобразований координат в двумерном римановом пространстве H ведет себя как псевдоскаляр, а K является скаляром.

Вариационный принцип и равновесная форма мембраны

При расчете равновесной формы мембраны будем исходить из принципа, согласно которому в отсутствие внешних сил мембрана принимает форму, при которой ее поверхностная энергия U_0 минимальна. Для идеальных мембран эта энергия пропорциональна площади мембраны (формула (4))

$$U_0 = T\int\sqrt{G}\,d\xi^1d\xi^2. \quad (17)$$

Здесь T — поверхностное натяжение мембраны, а интегрирование ведется по области, ограниченной жестким контуром, на который мембрана натянута. Минимуму энергии соответствует условие, при котором первая вариация функционала (17) по $\mathbf{x}(\xi^1,\xi^2)$ обращается в нуль

$$\delta U_0 = T\int\delta\sqrt{G}\,d\xi^1d\xi^2$$
$$= T\int\sqrt{G}\,G^{\alpha\beta}\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\xi^\beta}\left(\frac{\partial}{\partial\xi^\alpha}\delta\mathbf{x}\right)d\xi^1d\xi^2$$
$$= -T\int\frac{\partial}{\partial\xi^\alpha}\left(\sqrt{G}\,G^{\alpha\beta}\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\xi^\beta}\right)\delta\mathbf{x}\,d\xi^1d\xi^2 = 0. \quad (18)$$

Здесь мы воспользовались формулой $\delta G = GG^{\alpha\beta}\delta G_{\alpha\beta}$, а при интегрировании по частям, т.е. применяя теорему Грина, учли, что для жестко закрепленной мембраны вариация на границе интегрирования $\delta\mathbf{x}(\xi^1,\xi^2) = 0$. Ввиду произвольности $\delta\mathbf{x}(\xi^1,\xi^2)$ из (18) следует нелинейное уравнение, определяющее равновесную форму мембраны, — уравнение минимальной поверхности

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial\xi^\alpha}\left(\sqrt{G}\,G^{\alpha\beta}\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\xi^\beta}\right) = 0. \quad (19)$$

При наличии внешних сил, обусловленных, например, разностью давлений по обе стороны мембраны Δp_0, изменение поверхностной энергии δU_0 следует приравнять работе, которую совершают эти силы, смещая мембрану на $\delta\mathbf{x}(\xi^1,\xi^2)$ [2]

$$\delta U_0 = -\int\Delta p_0\mathbf{n}\delta\mathbf{x}\sqrt{G}\,d\xi^1d\xi^2. \quad (20)$$

В этом случае равновесная форма мембраны определяется из решения уравнения с правой частью

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial\xi^\alpha}\left(\sqrt{G}\,G^{\alpha\beta}\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\xi^\beta}\right) = \frac{\Delta p_0}{T}\mathbf{n}. \quad (21)$$

Последнее можно записать покомпонентно в виде

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial\xi^\alpha}\left(\sqrt{G}\,G^{\alpha\beta}\frac{\partial x^i}{\partial\xi^\beta}\right) = \frac{\Delta p_0}{T}n^i \quad (i=1,2,3). \quad (22)$$

Покажем, что из трех уравнений системы (22) только одно является независимым. Например, если $x^3(\xi^1,\xi^2)$ удовлетворяет уравнению (22), то два других уравнения для $x^1(\xi^1,\xi^2)$ и $x^2(\xi^1,\xi^2)$ выполняются тождественно. Для этого умножим левую и правую части уравнения (10) на $G^{\alpha\beta}$

$$\nabla_\alpha G^{\alpha\beta}\mathbf{a}_\beta = G^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta}\mathbf{n}.$$

Здесь мы учли, что компоненты метрического тензора можно вносить под знак ковариантного дифференцирования. С учетом (5) это уравнение можно представить также в виде

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial\xi^\alpha}\left(\sqrt{G}\,G^{\alpha\beta}\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\xi^\beta}\right) = G^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta}\mathbf{n}. \quad (23)$$

Из него, в частности, следует, что средняя кривизна минимальной поверхности $H = 0$. Умножая обе части (23) скалярно на $\partial\mathbf{x}/\partial\xi^\gamma$ и учитывая условие ортогональности (7), приходим к тождеству

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial\xi^\alpha}\left(\sqrt{G}\,G^{\alpha\beta}\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\xi^\beta}\right)\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\xi^\gamma} = 0.$$

Полагая, что $x^3(\xi^1,\xi^2)$ удовлетворяет уравнению (21), запишем это тождество в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial\xi^\alpha}\left(\sqrt{G}G^{\alpha\beta}\frac{\partial x^i}{\partial\xi^\beta}\right)\frac{\partial x^i}{\partial\xi^\gamma} + \frac{\Delta p_0}{T}n^3\frac{\partial x^3}{\partial\xi^\gamma} = 0.$$

Согласно условию ортогональности (7),

$$n^3\frac{\partial x^3}{\partial\xi^\gamma} = -\sum_{i=1}^{2}n^i\frac{\partial x^i}{\partial\xi^\gamma}.$$

В результате будем иметь

$$\sum_{i=1}^{2}\left[\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial\xi^\alpha}\left(\sqrt{G}G^{\alpha\beta}\frac{\partial x^i}{\partial\xi^\beta}\right)-\frac{\Delta p_0}{T}n^i\right]\frac{\partial x^i}{\partial\xi^\gamma}=0. \quad (24)$$

Так как предполагается, что $\det\|\partial x^i/\partial\xi^\gamma\| \neq 0$ ($i=1,2$; $\gamma=1,2$), то единственным решением системы двух однородных уравнений (24) относительно величин, стоящих в квадратных скобках, будут нулевые решения. Это условие эквивалентно тождественному выполнению уравнения (22) для $i=1,2$.

Уравнение малых колебаний искривленных мембран

В качестве динамических переменных, характеризующих малые отклонения искривленной мембраны от положения своего равновесия, будем рассматривать зависящие от времени смещения мембраны вдоль нормали к ее поверхности $u(\xi^1,\xi^2,t)$. Будем считать, что в условиях равновесия ($u=0$) поверхность мембраны задана параметрически функцией $\mathbf{x}=(\xi^1,\xi^2)$, удовлетворяющей в общем случае уравнению (21). Пусть $\mathbf{x}(\xi^1,\xi^2)$ — координата произвольной точки на поверхности мембраны, находящейся в состоянии равновесия. Тогда в результате деформации мембраны (малого смещения вдоль нормали) эта точка приобретает координату $\mathbf{x}'=\mathbf{x}+u\mathbf{n}$. Радиус-вектор, соединяющий две бесконечно близкие точки на поверхности деформированной мембраны, определяется выражением $d\mathbf{x}'=d\mathbf{x}+ud\mathbf{n}+\mathbf{n}du$, а квадрат расстояния между ними

$$dl'^2=d\mathbf{x}'^2=d\mathbf{x}^2+2ud\mathbf{x}d\mathbf{n}+u^2d\mathbf{n}^2+du^2. \quad (25)$$

Здесь мы воспользовались соотношениями (7) и (8), из которых, в частности, следует, что $\mathbf{n}d\mathbf{x}=0$ и $\mathbf{n}d\mathbf{n}=0$. Согласно уравнениям (9), (11),

$$\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial\xi^\alpha}=-b_{\alpha\beta}G^{\beta\gamma}\mathbf{a}_\gamma$$

и, следовательно,

$$d\mathbf{x}d\mathbf{n}=-b_{\alpha\beta}d\xi^\alpha d\xi^\beta, \quad d\mathbf{n}^2=b_{\alpha\gamma}b_{\beta\sigma}G^{\gamma\sigma}d\xi^\alpha d\xi^\beta.$$

Эти соотношения позволяют определить метрику поверхности деформированной мембраны $\tilde{G}_{\alpha\beta}$. Их подстановка в (25) с учетом (2) приводит к следующему результату

$$dl'^2=\tilde{G}_{\alpha\beta}d\xi^\alpha d\xi^\beta,$$

где

$$\tilde{G}_{\alpha\beta}=G_{\alpha\beta}-2b_{\alpha\beta}u+b_{\alpha\gamma}b_{\beta\sigma}G^{\gamma\sigma}u^2+\frac{\partial u}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial u}{\partial\xi^\beta}.$$

Здесь $G_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ — коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности недеформированной, т.е. находящейся в равновесии, мембраны. Поверхностная энергия деформированной мембраны определяется выражением

$$U=T\int\sqrt{\tilde{G}}\,d\xi^1d\xi^2,$$

где $\tilde{G}=\det\|\tilde{G}_{\alpha\beta}\|$.

Считая u малым, разложим $\sqrt{\tilde{G}}$ в ряд по степеням u и ограничимся членами квадратичными по смещению. В результате будем иметь

$$U\approx T\int\sqrt{G}d\xi^1d\xi^2 + \frac{1}{2}T\int\left(G^{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial u}{\partial\xi^\beta}-4Hu+Ru^2\right)\sqrt{G}d\xi^1d\xi^2.$$

Первый член в правой части этого выражения определяет энергию недеформированной мембраны U_0 (формула (17)), второй — энергию, обусловленную ее деформацией; H и R — соответственно средняя и скалярная кривизны недеформированной мембраны (формулы (15), (14) и (16)). В отсутствие внешних статических сил, когда мембрана принимает форму минимальной поверхности, средняя кривизна которой $H=0$, это выражение не содержит линейного по u члена.

Таким образом, в результате деформации поверхностная энергия мембраны изменяется на величину

$$\Delta U=U-U_0 = \frac{1}{2}T\int\left(G^{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial u}{\partial\xi^\beta}-4Hu+Ru^2\right)\sqrt{G}d\xi^1d\xi^2.$$

Если в состоянии равновесия имеет место разность давлений по обе стороны мембраны Δp_0, то при деформации мембрана совершает работу

$$\Delta W=\int\Delta p_0u\sqrt{G}\,d\xi^1d\xi^2.$$

Здесь мы воспользовались формулой (20), в которой положили $\delta\mathbf{x}=\mathbf{n}u$. Согласно (21) и (23), средняя кривизна мембраны H и разность давлений Δp_0 связаны соотношением (формула Лапласа [2])

$$\Delta p_0=2TH.$$

Следовательно, полное изменение энергии мембраны, вызванное ее деформацией, будет

$$\Delta E=\Delta U+\Delta W = \frac{1}{2}T\int\left(G^{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial u}{\partial\xi^\beta}+Ru^2\right)\sqrt{G}\,d\xi^1d\xi^2. \quad (26)$$

Отсутствие линейного по u члена в этом выражении не случайно и отражает тот факт, что даже при наличии внешних статических сил минимуму энергии ΔE должна соответствовать равновесная форма мембраны, когда $u=0$.

При выводе уравнения, описывающего малые колебания искривленной мембраны, будем исходить из принципа наименьшего действия. в качестве действия рассмотрим функционал

$$S = \iint_{t_1}^{t_2} \mathfrak{L}\sqrt{G}\, d\xi^1 d\xi^2 dt, \tag{27}$$

где лагранжиан

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}T\left(G^{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial u}{\partial \xi^\beta} + Ru^2\right) - \Delta p u. \tag{28}$$

Первый член в правой части этого выражения определяет плотность кинетической энергии мембраны (ρ — поверхностная плотность мембраны), второй — плотность ее потенциальной энергии (формула (26)), третий член учитывает влияние внешних сил, обусловленных избыточной Δp по отношению к равновесной Δp_0 разностью давлений по обе стороны мембраны. Варьируя (27) по u и полагая $\delta S = 0$, приходим к следующему уравнению Эйлера–Лагранжа, описывающему малые колебания искривленной мембраны:

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}\left(\sqrt{G}G^{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial \xi^\beta}\right) - Ru - \frac{1}{\nu^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\Delta p}{T}. \tag{29}$$

Здесь мы ввели обозначение $\nu^2 = T/\rho$, а при выводе самого уравнения учли, что на границах интегрирования $\delta u = 0$. Уравнение (29) обобщает известное уравнение малых колебаний плоской мембраны на случай мембраны произвольной формы. Компоненты метрического тензора $G_{\alpha\beta}$ и скалярная кривизна R в этом уравнении определяются равновесной формой мембраны (формулы (3), (13), (16)). Инвариантность уравнения (29) относительно произвольных преобразований параметров ξ^α очевидна, так как R является скаляром, а стоящий слева оператор Лапласа–Бельтрами можно записать в явно ковариантной форме

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}\left(\sqrt{G}\,G^{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial \xi^\beta}\right) = \nabla_\alpha \nabla^\alpha u.$$

Следует отметить, что характер решения полученного волнового уравнения зависит от знака R и, следовательно, различен для мембран, поверхность которых имеет положительную (например, сфера) или отрицательную (псевдосфера) кривизну.

Плотность энергии и плотность потока энергии поля смещения. Закон сохранения

В отсутствие внешних динамических сил ($\Delta p = 0$) полная энергия колеблющейся мембраны, т.е. энергия поля смещений $u(\xi^1, \xi^2, t)$, не должна изменяться со временем. В теории поля закон сохранения энергии непосредственно вытекает из дифференциального закона сохранения (уравнения непрерывности), связывающего изменение во времени плотности энергии поля W с изменением в пространстве плотности потока этой энергии S^α. Этот закон в свою очередь является следствием инвариантности действия относительно бесконечно малых сдвигов во времени [3]. Для рассматриваемого нами поля $u(\xi^1, \xi^2, t)$, заданного на поверхности искривленной мембраны, т.е. в двумерном римановом пространстве, его следует записать в общековариантной форме

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla_\alpha S^\alpha = 0$$

или, раскрывая ковариантную производную,

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}\left(\sqrt{G}\,S^\alpha\right) = 0. \tag{30}$$

Если лагранжиан поля задан, то плотность энергии и плотность потока энергии можно определить, используя известные соотношения [3]

$$W = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial u/\partial t)}\frac{\partial u}{\partial t} - \mathfrak{L}, \quad S^\alpha = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial u/\partial \xi^\alpha)}\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Подстановка в эти выражения лагранжиана (28), в котором $\Delta p = 0$, приводит к следующему результату:

$$W = \frac{1}{2}\left[\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + T\left(G^{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial u}{\partial \xi^\beta} + Ru^2\right)\right],$$

$$S^\alpha = -TG^{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial \xi^\beta}\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что полученные W и S^α удовлетворяют закону сохранения (30) при условии, что $u(\xi^1, \xi^1, t)$ является решением уравнения поля (29) с нулевой правой частью.

Мембрана сферической формы

Рассмотрим мембрану сферической формы с центром сферы, расположенным в начале координат, и радиусом кривизны R_0. В качестве независимых параметров ξ^1 и ξ^2, определяющих положением любой точки на поверхности этой мембраны, удобно использовать сферические углы Θ и φ ($\xi^1 = \Theta$, $\xi^2 = \varphi$). В этом случае поверхность мембраны задается следующими параметрическими уравнениями:

$$x^1 = R_0 \cos\varphi \sin\Theta,\ x^2 = R_0 \sin\varphi \sin\Theta,\ x^3 = R_0 \cos\Theta.$$

Соотношения (3) и (13) позволяют определить коэффициенты первой $G_{\alpha\beta}$ и второй $b_{\alpha\beta}$ квадратичных форм этой поверхности. Непосредственные вычисления приводят к следующим результатам:

$$G_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} R_0^2 & 0 \\ 0 & R_0^2\sin^2\Theta \end{bmatrix}, \quad b_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -R_0 & 0 \\ 0 & -R_0\sin^2\Theta \end{bmatrix}.$$

Из этих соотношений и формулы (16) следует, что скалярная кривизна сферической поверхности $R = 2/R_0^2$. В соответствии с этими данными уравнение (29), описывающее малые колебания сферической мембраны, принимает вид

$$\frac{1}{\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\frac{\partial u}{\partial\Theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\Theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} - 2u - \frac{R_0^2}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = R_0^2\frac{\Delta p}{T}.$$

Как видно, это уравнение допускает решения, соответствующие чисто радиальным колебаниям, если граничные условия по Θ и φ отсутствуют, а мембрана представляет собой сферу.

Мембрана, имеющая форму катеноида

Рассмотрим мембрану, имеющую форму минимальной поверхности вращения — катеноида с осью, направленной вдоль оси x^3. Наличие оси вращения позволяет использовать цилиндрические координаты ρ и φ в качестве параметров, характеризующих положение точек на поверхности мембраны ($\xi^1 = \rho$, $\xi^2 = \varphi$). Поверхность мембраны в этом случае задается параметрическими уравнениями

$$x^1 = \rho\cos\varphi, \quad x^2 = \rho\sin\varphi, \quad x^3 = a\mathrm{Arch}\frac{\rho}{a} + b,$$

которые являются решениями уравнений минимальной поверхности (19). Постоянные a и b определяются из граничных условий, фиксирующих положение и равновесную форму мембраны. Для коэффициентов первой и второй квадратичных форм поверхности катеноида соответственно будем иметь

$$G_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \dfrac{\rho^2}{\rho^2 - a^2} & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{bmatrix}, \quad b_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -\dfrac{a}{\rho^2 - a^2} & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}.$$

Скалярная кривизна рассматриваемой поверхности отрицательна и зависит от ρ: $R = -2(a^2/\rho^4)$. Подстановка полученных величин в (29) приводит к следующему уравнению, описывающему малые колебания мембраны:

$$\frac{\sqrt{r^2-1}}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{r^2-1}\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{2}{r^4}u - \frac{a^2}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\Delta p}{T},$$

где $r = \rho/a$ — безразмерный параметр ($1 \leqslant r < +\infty$).

Список литературы

[1] *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967. 664 с.
[2] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
[3] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука, 1973. 504 с.