01;03

Неустойчивость заряженной плоской границы раздела сред по отношению к тангенциальному разрыву на ней зависящего от времени поля скоростей

© А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова,
150000 Ярославль, Россия

(Поступило в Редакцию 10 ноября 1998 г.)

Дифференциальное уравнение, описывающее эволюцию со временем возмущений плоской заряженной границы раздела двух несмешивающихся жидкостей, когда верхняя жидкость движется относительно нижней параллельно границе раздела с зависящей от времени скоростью, является уравнением Хилла. Граница раздела сред в такой системе при различных значениях физических параметров способна претерпевать неустойчивости трех видов: Кельвина–Гельмгольца, Тонкса–Френкеля и параметрическую. При определенных значениях физических параметров возможна реализация параметрической стабилизации границы раздела сред, неустойчивой по отношению к поверхностному заряду и к тангенциальному скачку поля скоростей на границе раздела сред.

Введение

Исследование неустойчивостей Кельвина–Гельмгольца и Тонкса–Френкеля представляет интерес в связи с многочисленными приложениями в геофизике, технической физике и химической технологии [1–4]. В частности, представляется актуальным решение задачи об устойчивости тангенциального разрыва двух несмешивающихся жидкостей разной плотности ρ_1 и ρ_2, каждая из которых заполняет полубесконечное пространство, верхняя жидкость движется со скоростью $U = U(t)$ параллельно границе раздела, а на границе раздела имеется электрический заряд с постоянной поверхностной плотностью σ. Такая задача представляет собой комбинацию классических неустойчивостей Кельвина–Гельмгольца и Тонкса–Френкеля с параметрической неустойчивостью границы раздела и является адекватной матфизической моделью такого природного явления, как огни св. Эльма, появляющиеся во время бурь и гроз в окрестности высоких обдуваемых ветром предметов, покрытых водяной пленкой или каплями воды [5].

1. Нижеследующее рассмотрение проведем на простейшей модели идеальных несжимаемых жидкостей, Эволюций капиллярных волн в такой системе может быть определена на основе решения задачи для нахождения гармонических потенциалов скоростей волнового движения в верхней $\Psi_1(\mathbf{r}, t)$ и нижней $\Psi_2(\mathbf{r}, t)$ жидкостях в декартовой системе координат, плоскость $X0Y$ которой совпадает с невозмущенной границей раздела, а ось $0Z$ направлена вниз, в направлении действия силы тяжести [3,6,7],

$$\Delta\Psi_j = 0; \qquad j = 1, 2; \tag{1}$$

$$z \to -\infty \qquad \Psi_1 - xU(t) \to \mathrm{const} = 0; \tag{2}$$

$$z \to \infty \qquad \Psi_2 \to \mathrm{const} = 0; \tag{3}$$

$$z = \xi(x; t): \qquad \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} \approx U\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial t}; \tag{4}$$

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \approx \frac{\partial \xi}{\partial t}; \tag{5}$$

$$\rho_1\frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + \rho_1 g\xi + \frac{1}{2}\rho_1\Big[(\nabla\Psi_1)^2 - U^2(t)\Big]$$

$$= \rho_2\frac{\partial \Psi_2}{\partial t} + \rho_2 g\xi + P_\sigma - \alpha\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \tag{6}$$

где $\rho(x, t)$ — возмущение границы раздела, связанное с тепловым капиллярным волновым движением, которое без ограничения общности можно считать не зависящим от координаты y [3,6,7]; $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t)$ — однородная по координатам x и z, зависящая от времени скорость движения верхней жидкости относительно нижней; направление вектора $\mathbf{U}$ определяет ориентацию оси $0X$; α — коэффициент поверхностного натяжения границы раздела; $P_\sigma = 4\pi\sigma^2 k\xi$ — электростатическое давление на границу раздела [7], связанное с возмущением поверхности $z = \xi$; k — волновое число.

Потенциал поля скоростей движения жидкости, связанного с направленным движением верхней жидкости вида (7), имеет вид $xU(t)$, что учтено при записи граничного условия (2). Полный потенциал поля скоростей верхней жидкости будет иметь вид

$$\Psi_1(\mathbf{r}, t) = xU(t) + \Psi_1^0(\mathbf{r}, t),$$

где компонента $\Psi_1^0(\mathbf{r}, t)$ описывает капиллярное волновое движение в верхней жидкости.

Зададимся целью вывести дифференциальное уравнение, описывающее временну́ю эволюцию (в результате действия давления электрического поля и тангенциального разрыва поля скоростей на границе раздела сред) амплитуд фиксированных мод тепловых капиллярных волн. Учтем, что потенциалы поля скоростей в обеих средах при бесконечном удалении от границы раздела должны убывать до нуля. Это означает, согласно [7–9], что $\Psi_1^0(\mathbf{r},t) \sim \exp(kz)$, а $\Psi_2^0(\mathbf{r},t) \sim \exp(-kz)$. Это требование приводит к соотношениям

$$\frac{\partial \Psi_1^0}{\partial z} = k\Psi_1^0; \qquad \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} = -k\Psi_2. \tag{7}$$

Учтем теперь, что возмущение границы раздела, связанное с капиллярным волновым движением, должно иметь периодический вид

$$\xi \sim \exp(ikx) \tag{8}$$

и, подставляя (7), (8) в граничные условия (4), (5), найдем

$$\Psi_1^0(\mathbf{r},t) = \frac{1}{k}\left(U(t)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial t}\right) = \frac{1}{k}\left(ikU(t)\xi + \frac{\partial \xi}{\partial t}\right);$$

$$\Psi_1(\mathbf{r},t) = xU(t) + \frac{1}{k}\left(ikU(t)\xi + \frac{\partial \xi}{\partial t}\right); \tag{9}$$

$$\Psi_2(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{k}\frac{\partial \xi}{\partial t}, \tag{10}$$

где i — мнимая единица.

Подставим теперь (9), (10) в (6) и в линейном по ξ приближении получим искомое дифференциальное уравнение, описывающее эволюцию со временем амплитуд капиллярных волн,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + 2ik\rho U(t)\frac{\partial \xi}{\partial t} + ik\rho\frac{\partial U(t)}{\partial t}\xi + \frac{k}{(\rho_2+\rho_1)}\Big[g(\rho_2-\rho_1) + \alpha k^2 - 4\pi\sigma^2 k - k\rho_1 U^2(t)\Big]\xi = 0; \qquad \rho = \frac{\rho_1}{(\rho_2+\rho_1)}. \tag{11}$$

При $U(t) = U_0 = \text{const}$ это уравнение становится обыкновенным диффференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, описывает временнýю эволюцию амплитуд капиллярных волн при реализации неустойчивости Кельвина–Гельмгольца и Тонкса–Френкеля и имеет решение

$$\xi = \xi_0 \mathrm{Re}\Big\{\exp\big[-ik\rho U_0 t + itF^{1/2}(k)\big]\Big\};$$

$$F(k) \equiv F(k,\alpha,\sigma,U_0,g,\rho_1,\rho_2) \equiv \frac{k}{(\rho_2+\rho_2)}\Big[g(\rho_2-\rho_1) + \alpha k^2 - 4\pi\sigma^2 k\xi - k\rho_1 U_0^2 + kU_0^2\rho\rho_1\Big]. \tag{12}$$

Критические условия наступления обеих упомянутых неустойчивостей определяются из требования прохождения функции $F(k)$ через нуль и могут быть легко получены путем стандартного исследования, достаточно подробно описанного в [6,7].

2. Для конкретизации дальнейшего исследования зададимся определенным видом зависимости скорости верхней среды от времени, принимая

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}_0 + \mathbf{U}_* \cos\omega_0 t \quad (\mathbf{U}_0 \parallel \mathbf{U}_*). \tag{13}$$

Подставляя (13) в (11), получим для характеристики временнóй эволюции амплитуд капиллярных волн в описанной системе дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами. Для отыскания его решений произведем замену искомой переменной [9]

$$\xi(t) = \zeta(t)\exp[i\Phi(t)];$$

$$\Phi(t) = -k\rho\left(U_0 - \frac{U_*}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right). \tag{14}$$

В итоге (11) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \zeta F(k) - \zeta D(k)\cos\omega_0 t + \zeta L(k)\cos^2\omega_0 t = 0;$$

$$D(k) \equiv D(k,U_0,U_*,\rho_1,\rho_2) \equiv 2k^2\frac{\rho_1\rho_2}{(\rho_2+\rho_1)^2}U_0U_*;$$

$$L(k) \equiv L(k,U_*,\rho_1,\rho_2) \equiv k^2\frac{\rho_1\rho_2}{(\rho_2+\rho_1)^2}U_*^2. \tag{15}$$

Получившееся уравнение с зависящими от времени коэффициентами при произвольных отличных от нуля U_0 и U_* является уравнением Хилла, которое в зависимости от соотношения величин коэффициентов F, D, L и частоты ω_0 может иметь либо параметрически устойчивые, либо параметрически неустойчивые, экспоненциально нарастающие со временем решения. В использованном приближении идеальной жидкости параметрическая неустойчивость реализуется при как угодно малой амплитуде переменной компоненты скорости U_*. Для реальной жидкости раскачка параметрической неустойчивости начнется лишь с некоторого порогового значения U_*, величина которого будет зависеть от длины капиллярной волны и вязкостей сред [9–13].

При $U_0 = 0$ верхняя жидкость совершает колебательное движение, параллельное границе раздела. При этом в уравнении (5) $D(k) = 0$, и оно приводится к уравнению Матье

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \omega^2(1 + h\cos 2\omega_0 t)\zeta = 0;$$

$$\omega^2 \equiv F(k) + 0.5L(k); \quad h \equiv 0.5L(k)\omega^{-2}, \tag{16}$$

решения, зоны существования устойчивых и неустойчивых решений которого достаточно подробно исследованы и описаны (см., например, [10]). В [9] детально проанализированы решения уравнения, которое получается из (15) при $D(k) = 0$. В частности, в упомянутых источниках показано, что при $h \ll 1$ зоны неустойчивости решений (16) расположены в малых окрестностях точек $(2\omega/\omega_0) = n$, где n — целое число. Ширины зон неустойчивости определяются параметром h и быстро убывают с увеличением номера n. Три первые зоны неустойчивости во втором порядке приближений по малому параметру h определяются соотношениями [11]

$$1-\frac{1}{2}h+\frac{7}{32}h^2 \ll \left(\frac{2\omega}{\omega_0}\right)^2 \ll 1+\frac{1}{2}h+\frac{7}{32}h^2;$$

$$4+\frac{3}{2}h^2-h^2 \ll \left(\frac{2\omega}{\omega_0}\right)^2 \ll 4+\frac{3}{2}h^2+h^2;$$

$$9+\frac{81}{64}h^2-\frac{3^6}{2^9}h^3 \ll \left(\frac{2\omega}{\omega_0}\right)^2 \ll 9+\frac{81}{64}h^2+\frac{3^6}{2^9}h^3.$$

В этих выражениях ω имеет смысл частоты капиллярных волн. Если нижнюю жидкость считать не идеальной, а вязкой с коэффициентом кинематической вязкости ν, декремент затухания капиллярных волн в которой определяется известным выражением $\gamma \equiv 2\nu k^2$ [6], то, как отмечалось выше, появляется порог по амплитуде U_* или в обозначениях (16) по величине h, начиная с которого может реализоваться параметрическая неустойчивость. Высота такого порога растет с увеличением номера зоны неустойчивости n. Для первых трех зон критические значения h определяются соотношениями [11]: для первой зоны

$$h > 4\gamma\cdot\omega_0^{-1};$$

для второй зоны

$$h > 2(2\gamma\cdot\omega_0^{-1})^{1/2};$$

для третьей зоны

$$h > \frac{8}{3}\left(\frac{2\gamma}{3\omega_0}\right)^{1/3}.$$

Поскольку параметр h считался малым, то и приведенные соотношения справедливы лишь для малых значений декрементов γ.

При $U_0 \gg U_*$, проводя линеаризацию уравнения (15) по малому параметру (U_*/U_0), в линейном приближении мы опять прийдем к уравнению Матье, с точностью до обозначений совпадающему с (16), но с частотой параметрического возбуждения, в 2 раза меньшей. Все, вышесказанное о решениях (16), остается в силе с поправкой на уменьшение частоты параметрического возбуждения.

При $U_* = 0$, т.е. когда скорость движения верхней среды относительно нижней становится постоянной, коэффициенты D и L обращаются в нуль, а уравнение (15) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение, а его решение, позволяющее определить критические условия реализации неустойчивостей Кельвина–Гельмгольца и Тонкса–Френкеля при $F(k) \leqslant 0$ (при $\omega^2 \leqslant 0$), с учетом (14) совпадает с (12).

В общем случае при произвольных, отличных от нуля U_0 и U_* в большей части области $\omega^2 \leqslant 0$ (в которой в отсутствие параметрического возбуждения капиллярные волны в принципе неустойчивы, поскольку при $\omega^2 \leqslant 0$ реализуются неустойчивости Кельвина–Гельмгольца и Тонкса–Френкеля) решения уравнения Хилла (15) также неустойчивы. Тем не менее на плоскости параметров U_* и ω^2 в малой окрестности начала координат, в области $\omega^2 \leqslant 0$, имеется область существования устойчивых решений уравнения (15) [14], в которой возможна параметрическая стабилизация капиллярных волн, неустойчивых в смысле неустойчивостей Кельвина–Гельмгольца и Тонкса–Френкеля. Это обстоятельство делает анализируемую задачу еще более актуальной, поскольку дает возможность управления неустойчивостями, подавления их в ситуациях, когда они играют паразитную роль.

Заключение

Наличие переменной во времени составляющей тангенциального скачка поля скоростей на заряженной границе раздела сред приводит как к расширению диапазона неустойчивостей, которые могут реализоваться в системе, так и к возможности управления условиями реализации неустойчивостей за счет параметрического подавления неустойчивых капиллярных волн.

Список литературы

[1] *Власов В.П., Жданов С.К., Трубников Б.А.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 3. С. 10–16.
[2] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
[3] *Григорьев О.А., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 2. С. 23–34.
[4] *Лушников П.М.* // Изв. РАН ФАО. 1998. Т. 34. № 3. С. 413–421.
[5] *Grigor'ev A.I., Grigor'eva I.D., Shiryaeva S.O.* // J. Sci. Expl. 1991. Vol. 5. № 2. P. 163–190.
[6] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
[7] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
[8] *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз. 1959. 699 с.
[9] *Любимов Д.В., Хеннер М.В., Шоц М.М.* // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 3. С. 25–31.
[10] *Справочник* по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 831 с.
[11] *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
[12] *Григорьев А.И.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 1. С. 50–56.
[13] *Ширяева С.О., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1992. Т. 62. №. 11. С. 49–56.
[14] *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1987. 304 с.