01

Вычисление электрической емкости системы проводов круглого и эллиптического сечения и в виде пластин в присутствии проводящей плоскости

© З.М. Наркун

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы,
230023 Гродно, Белоруссия

(Поступило в Редакцию 27 марта 1998 г. В окончательной редакции 30 января 1999 г.)

Предлагается метод вычисления электрических емкостей системы параллельных бесконечно длинных проводов круглого и эллиптического сечения и в виде пластин в присутствии проводящей плоскости. Метод основан на точном построении потенциала электростатического поля. Указан алгоритм получения приближенных расчетных формул. Рассмотрены некоторые частные случаи.

В справочнике [1] приведены приближенные расчетные формулы для вычисления электрических емкостей на единицу длины одно-, двух- и трехпроводных линий параллельных бесконечно длинных проводов круглого сечения в присутствии проводящей плоскости. В настоящей работе эта задача решается для любого конечного числа проводов круглого и эллиптического сечения, и в виде пластин.

Рассматриваемая электростатическая система является плоскопараллельной, поэтому в дальнейшем плоскость, перпендикулярная осям проводов, принимается за координатную плоскость xOy, а вместо проводов и плоскости рассматриваются окружности, эллипсы, отрезки прямых и прямая, по которым плоскость xOy пересекает систему проводов.

Все величины с линейными размерами считаются безразмерными, т. е. рассматриваются по отношению к некоторой выбранной единице масштаба. Пусть в полуплоскости $x < 0$ имеется N_1 окружностей Γ_j радиусов R_j с центрами в точках O_j, $j = \overline{1, N_1}$ и N_2 $(N_1 + N_2 = N)$ эллипсов Γ_j с центрами в точках O_j, $J = \overline{N_1 + 1, N}$, причем часть эллипсов (или все) может вырождаться в отрезки прямых. Окружности и эллипсы расположены внешним образом по отношению друг к другу и не имеют общих точек ни между собой, ни с осью ординат $X = 0$.

Математически задача определения потенциала φ электростатического поля состоит в нахождении в полуплоскости $x < 0$ и вне Γ_j, $j = \overline{1, N}$ (область G) решения уравнения Лапласа

$$\Delta\varphi = 0, \tag{1}$$

ограниченного на бесконечности и удовлетворяющего граничным условиям

$$\varphi\Big|_{x=0} = 0, \quad \varphi\Big|_{\Gamma_j} = f_j, \quad j = \overline{1, N}, \qquad (2), (3)$$

где f_j равны нулю или единице в зависимости от вычисляемой емкости.

Для решения задачи обозначим зеркальные отображения кривых Γ_j относительно прямой $x = 0$ через $\bar{\Gamma}_j$, $\bar{O}_j$ — образцы центров O_j. Свяжем с каждой окружностью Γ_j, $\bar{\Gamma}_j$, $j = \overline{1, N_1}$, локальные декартовые $x_jO_jy_j$, $\bar{x}_j\bar{O}_j\bar{y}_j$ и полярные (ρ_j, Θ_j), $(\bar{\rho}_j, \bar{\Theta}_j)$ координаты, а с каждым эллипсом Γ_j, $\bar{\Gamma}_j$, $j = \overline{N_1 + 1, N}$ — локальные декартовые $x_jO_jy_j$, $\bar{x}_j\bar{O}_j\bar{y}_j$ и эллиптические (μ_j, ϑ_j), $(\bar{\mu}_j, \bar{\vartheta}_j)$ координаты [2], так что в связанных с окружностью Γ_j полярных координатах ее уравнение будет

$$\rho_j = R_j, \qquad j = \overline{1, N_1},$$

а в связанных с эллипсом Γ_j эллиптических координатах его уравнение

$$\mu_j = \mu_j^0, \quad \mu_j^0 = \text{const}, \quad j = \overline{N_1 + 1, N}.$$

В частности, если некоторые $\mu_k^0 = 0$, то эллипс превращается в отрезок прямой длины h_k. В дальнейшем учитывается, что полярные оси сонаправлены с осью Ox, оси $\bar{O}_j\bar{y}_j$ являются зеркальными отображениями осей O_jy_j, а оси $\bar{O}_j\bar{x}_j$ выбираются так, чтобы системы координат $\bar{x}_j\bar{O}_j\bar{y}_j$ были правыми.

Потенциал φ поля будем искать в виде

$$\begin{aligned}\varphi(M) = A &+ \sum_{j=1}^{N}\left(A_j \ln\frac{1}{\rho_j} + \bar{A}_j \ln\frac{1}{\bar{\rho}_j}\right)\\ &+ \sum_{j=1}^{N_1}\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\big(a_k^j \cos k\Theta_j + b_k^j \sin k\Theta_j\big)\rho_j^{-k}\\ &+ \big(\bar{a}_k^j \cos k\bar{\Theta}_j + \bar{b}_k^j \sin k\bar{\Theta}_j\big)\bar{\rho}_j^{-k}\Big]\\ &+ \sum_{j=N_1+1}^{N}\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\big(a_k^j \cos k\vartheta_j + b_k^j \sin k\vartheta_j\big)\exp(-k\mu_j)\\ &+ \big(\bar{a}_k^j \cos k\bar{\vartheta}_j + \bar{b}_k^j \sin k\bar{\vartheta}_j\big)\exp(-k\bar{\mu}_j)\Big],\end{aligned} \tag{4}$$

где $M \in G$ — любая точка; (ρ_j, Θ_j), $(\bar{\rho}_j, \bar{\Theta}_j)$ — ее координаты в полярных системах с полюсами O_j, $\bar{O}_j$, $j = \overline{1, N_1}$; (μ_j, ϑ_j), $(\bar{\mu}_j, \bar{\vartheta}_j)$ — ее координаты в эллиптических системах координат с центрами O_j, $\bar{O}_j$,

$j = \overline{N_1+1, N}$; коэффициенты подлежат определению из граничных условий и условия на бесконечности.

Подчеркнем, что если в (4) (и в дальнейшем) в сумме по j верхний индекс меньше нижнего (что будет, если нет окружностей: $N_1 = 0$, или нет эллипсов: $N_2 = 0$, $N = N_1$), то соответствующая сумма принимается равной нулю. В дальнейшем также считаются равными нулю величины с индексами, если начальное значение индекса меньше конечного; например, $A_s = 0$, если $s = \overline{1, 0}$.

Для ограниченности функции (4) на бесконечности и удовлетворения условию (2) достаточно положить

$$A = 0, \quad \bar{A}_j = -A_j, \quad \bar{a}_k^j = -(1)^{k+1} a_k^j,$$

$$\bar{b}_k^j = (-1)^k b_k^j, \qquad j = \overline{1, N}, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Для определения оставшихся коэффициентов A_j, a_k^j, b_k^j выразим с помощью теорем сложения для разделенных решений уравнения Лапласа в полярных [3], эллиптических [4] системах, где учтено, что оси декартовых координат не обязательно параллельны, и введены новые обозначения и полярных, и эллиптических [2]; все переменные в (4) в локальных координатах, связанных с Γ_s, $s = \overline{1, N}$. Применим условия (3) и приравняем в получившихся равенствах коэффициенты при функциях cos и sin от соответствующих аргументов. В результате получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений.

1) Для иллюстрации этой схемы проведем выкладки более подробно в случае одного эллипса. Для произвольно расположенных декартовых координат с различными началами формулы (14) и (15) из [4] запишем в виде

$$\exp(-k\mu_1)\cos k\vartheta_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu \Big[Ac_\nu^{(k)}(\mu_{21}, \vartheta_{21}; h_2/h_1, \alpha_{21})$$
$$\times \operatorname{ch}\nu\mu_2 \cos\nu\vartheta_2 + As_\nu^{(k)}(\mu_{21}, \vartheta_{21}; h_2/h_1, \alpha_{21})$$
$$\times \operatorname{sh}\nu\mu_2 \sin\nu\vartheta_2 \Big], \quad \mu_2 < \mu_{21},$$

$$\exp(-k\mu_1)\sin k\vartheta_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu \Big[As_\nu^{(k)}(\mu_{21}, \vartheta_{21}; h_2/h_1, \alpha_{21})$$
$$\times \operatorname{ch}\nu\mu_2 \cos\nu\vartheta_2 - Ac_\nu^{(k)}(\mu_{21}, \vartheta_{21}; h_2/h_1, \alpha_{21})$$
$$\times \operatorname{sh}\nu\mu_2 \sin\nu\vartheta_2 \Big], \quad \mu_2 < \mu_{21}, \tag{5}$$

где

$$Ac_\nu^{(k)}(\mu, \vartheta; h, \alpha)$$
$$= (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty} \frac{k(n+2r+k-1)!(n+\nu+2r+k-1)!}{h^{2r+k} n!(n+\nu)!r!(k+r)!(2r+k-1)!}$$
$$\times \exp\Big[-(2n+\nu+2r+k)\mu\Big]$$
$$\times \cos\Big[(2n+\nu+2r+k)\vartheta + (2r+k)\alpha\Big],$$

$As_\nu^{(k)}(\ldots)$ получается из $Ac_\nu^{(k)}(\ldots)$ заменой функции cos на sin; (μ_i, ϑ_i) — координаты произвольной точки в i-й эллиптической системе координат, связанной с соответствующей декартовой системой формулами

$$x_i = \frac{1}{2} h_i \operatorname{ch}\mu_i \cos\vartheta_i, \quad y_i = \frac{1}{2} h_i \operatorname{sh}\mu_i \sin\vartheta_i; \quad i = 1, 2,$$

μ_{21}, ϑ_{21} — координаты старого начала O_1 в новой системе; α_{21} — угол между осями O_1x_1 и O_2x_2, отсчитываемый от оси O_1x_1 против часовой стрелки; $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_\nu = 2$ для $\nu > 0$.

Потенциал (4) имеет вид

$$\varphi(M) = A_1 \left(\ln\frac{1}{\rho_1} - \ln\frac{1}{\bar\rho_1} \right)$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \Big[\big(a_k^1 \cos k\vartheta_1 + b_k^1 \sin k\vartheta_1 \big) \exp(-k\mu_1)$$
$$+ (-1)^{k+1} \big(a_k^1 \cos k\bar\vartheta_1 - b_k^1 \sin k\bar\vartheta_1 \big) \exp(-k\bar\mu_1) \Big]. \tag{6}$$

Для удовлетворения граничному условию на эллипсе Γ_1 выразим с помощью формулы (6) из [4]

$$\ln\frac{1}{\rho_1} = \ln\frac{4}{h_2} - \mu_{21} + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \Big(\operatorname{ch}\nu\mu_2 \cos\nu\vartheta_{21} \cos\nu\vartheta_2$$
$$+ \operatorname{sh}\nu\mu_2 \sin\nu\vartheta_2 \Big) \exp(-\nu\mu_{21}),$$

формул (5) и функции источника в эллиптических координатах [5]

$$\ln\frac{1}{\rho_1} = \ln\frac{4}{h_1} - \mu_1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \exp(-\nu\mu_1) \cos\nu\frac{\pi}{2} \cos\nu\vartheta_1,$$

все переменные в (6) — через μ_1, ϑ_1. В результате получим (с учетом принятых обозначений, которые пояснены ниже)

$$\varphi(M) = A_1 \Big[-\mu_1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \exp(-\nu\mu_1) \cos\frac{\nu\pi}{2} \cos\nu\vartheta_1$$
$$+ \bar\mu_{11} - 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} (\operatorname{ch}\nu\mu_1 \cos\nu\bar\vartheta_{11} \cos\nu\vartheta_1$$
$$+ \operatorname{sh}\nu\mu_1 \sin\nu\bar\vartheta_{11} \sin\nu\vartheta_1) \exp(-\nu\bar\mu_{11}) \Big]$$
$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \big(a_\nu^1 \cos\nu\vartheta_1 + b_\nu^1 \sin\nu\vartheta_1 \big) \exp(-\nu\mu_1)$$
$$- \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k^1 \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu \Big[Ac_\nu^{(k)}(\bar\mu_{11}, \bar\vartheta_{11}; 1, \bar\alpha_{11}) \operatorname{ch}\nu\mu_1 \cos\nu\vartheta_1$$
$$+ As_\nu^{(k)}(\bar\mu_{11}, \bar\vartheta_{11}; 1, \bar\alpha_{11}) \operatorname{sh}\nu\mu_1 \sin\nu\vartheta_1 \Big]$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k^1 \sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon_\nu\Big[As_\nu^{(k)}(\bar{\mu}_{11},\bar{\vartheta}_{11};1,\bar{\alpha}_{11})\operatorname{ch}\nu\mu_1\cos\nu\vartheta_1$$

$$-Ac_\nu^{(k)}(\bar{\mu}_{11},\bar{\vartheta}_{11};1,\bar{\alpha}_{11})\operatorname{sh}\nu\mu_1\sin\nu\vartheta_1\Big].$$

Отсюда, удовлетворяя граничному условию $\varphi(M)\big|_{\Gamma_1} = \varphi(M)\big|_{\mu_1=\mu_1^0} = 1$, в силу единственности разложения в ряд Фурье, получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$A_1(\bar{\mu}_{11}-\mu_1^0)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\xi_{0k}^1A_k^1-\tilde{\omega}_{0k}B_k^1\right)=1,$$

$$\varepsilon_\nu^1A_1+A_\nu^1-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\xi_{\nu k}^1A_k^1-\tilde{\omega}_{\nu k}B_k^1\right)=0,$$

$$\tilde{\varepsilon}_\nu^1A_1+B_\nu^1-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\tilde{\xi}_{\nu k}^1A_k^1+\omega_{\nu k}^1B_k^1\right)=0;\quad \nu=1,2,\ldots, \quad (7)$$

которая получается при $N_1=0$, $N_2=1$ из приведенной ниже системы для произвольных N_1 и N_2; там же определены новые переменные и коэффициенты системы.

2) Проделав аналогочные выкладки в общем случае, получим следующую систему:

$$-A_s\ln q_s+\sum_{j=1,\,j\neq s}^{N}A_j\ln\frac{\bar{\rho}_{sj}}{\rho_{sj}}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\Big[-A_k^sq_s^k+\sum_{j=1,\,j\neq s}^{N_1}\left(\sigma_{0k}^{sj}A_k^j+\tilde{\tau}_{0k}^{sj}B_k^j\right)$$

$$+\sum_{j=N_1+1}^{N}\left(\alpha_{0k}^{sj}A_k^j+\tilde{\beta}_{0k}^{sj}B_k^j\right)\Big]=f_s.$$

$$A_q(\bar{\mu}_{qq}-\mu_q^0)+\sum_{j=1,\,j\neq q}^{N}A_j(\bar{\mu}_{qj}-\mu_{qj})$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\sum_{j=1}^{N_1}\left(\gamma_{0k}^{qj}A_k^j+\tilde{\delta}_{0k}^{qj}B_k^j\right)-\xi_{0k}^qA_k^q+\tilde{\omega}_{0k}^qB_k^q$$

$$+\sum_{j=N_1+1,\,j\neq q}^{N}\left(\eta_{0k}^{qj}A_k^j+\tilde{\zeta}_{0k}^{qj}B_k^j\right)\Big]=f_q,$$

$$-\frac{1}{\nu}q_s^\nu A_s+\sum_{j=1,\,j\neq s}^{N}\sigma_\nu^{sj}A_j+A_\nu^s$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\Big[-L_{\nu k}q_s^{\nu+k}A_k^s+\sum_{j=1,\,j\neq s}^{N_1}\left(\sigma_{\nu k}^{sj}A_k^j+\tilde{\tau}_{\nu k}^{sj}B_k^j\right)$$

$$+\sum_{j=N_1+1}^{N}\left(\alpha_{\nu k}^{sj}A_k^j+\tilde{\beta}_{\nu k}^{sj}B_k^j\right)\Big]=0,$$

$$\sum_{j=1,\,j\neq s}^{N}\tilde{\sigma}_\nu^{sj}A_j+B_\nu^s+\sum_{k=1}^{\infty}\Big[-L_{\nu k}q_s^{\nu+k}B_k^s$$

$$+\sum_{j=1,\,j\neq s}^{N_1}\left(\tilde{\sigma}_{\nu k}^{sj}A_k^j-\tau_{\nu k}^{sj}B_k^j\right)$$

$$+\sum_{j=N_1+1}^{N}\left(\tilde{\alpha}_{\nu k}^{sj}A_k^j-\beta_{\nu k}^{sj}B_k^j\right)\Big]=0,$$

$$\varepsilon_\nu^qA_q+\sum_{j=1,\,j\neq q}^{N}\tau_\nu^{qj}A_j+A_\nu^q$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\sum_{j=1}^{N_1}\left(\gamma_{\nu k}^{qj}A_k^j+\tilde{\delta}_{\nu k}^{qj}B_k^j\right)-\xi_{\nu k}^qA_k^q+\tilde{\omega}_{\nu k}^qB_k^q$$

$$+\sum_{j=N_1+1,\,j\neq q}^{N}\left(\eta_{\nu k}^{qj}A_k^j+\tilde{\zeta}_{\nu k}^{qj}B_k^j\right)\Big]=0,$$

$$\tilde{\varepsilon}_\nu^qA_q+\sum_{j=1,\,j\neq q}^{N}\tilde{\tau}_\nu^{qj}A_j+B_\nu^q$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\sum_{j=1}^{N_1}\left(\tilde{\gamma}_{\nu k}^{qj}A_k^j-\delta_{\nu k}^{qj}B_k^j\right)-\tilde{\xi}_{\nu k}^qA_k^q-\omega_{\nu k}^qB_k^q$$

$$+\sum_{j=N_1+1,\,j\neq q}^{N}\left(\tilde{\eta}_{\nu k}^{qj}A_k^j-\zeta_{\nu k}^{qj}B_k^j\right)\Big]=0;$$

$$s=\overline{1,N_1};\quad q=\overline{N_1+1,N};\quad \nu=1,2,\ldots, \quad (8)$$

где

$$A_\nu^s=a_\nu^sR_s^{-\nu},\quad B_\nu^s=b_\nu^sR_s^{-\nu};\quad s=\overline{1,N_1},$$

$$A_\nu^q=a_\nu^q\exp(-\nu\mu_q^0),\ \ B_\nu^q=b_\nu^q\exp(-\nu\mu_q^0);\ \ q=\overline{N_1+1,N};$$

$$q_s=\frac{R_s}{2l_s},\qquad L_{\nu k}=\frac{(\nu+k-1)!}{\nu!(k-1)!},$$

l_s — расстояние от точки O_s до прямой $x=0$;

$$\varepsilon_\nu^q=\frac{2}{\nu}\Big[\exp(-\nu\mu_q^0)\cos\nu\frac{\pi}{2}-\exp(-\nu\bar{\mu}_{qq})\operatorname{ch}\nu\mu_q^0\cos\nu\bar{\vartheta}_{qq}\Big],$$

$$\tilde{\varepsilon}_\nu^q=-\frac{2}{\nu}\exp(-\nu\bar{\mu}_{qq})\operatorname{sh}\nu\mu_q^0\sin\nu\bar{\vartheta}_{qq},$$

$$\sigma_\nu^{sj}=\frac{1}{\nu}\left[\left(\frac{R_s}{\rho_{sj}}\right)^\nu\cos\nu\Theta_{sj}-\left(\frac{R_s}{\bar{\rho}_{sj}}\right)^\nu\cos\nu\bar{\Theta}_{sj}\right],$$

$$\sigma_\nu^{sj}=\frac{1}{\nu k}\Big[(-1)^k\left(\frac{R_s}{\rho_{sj}}\right)^\nu\left(\frac{R_j}{\rho_{sj}}\right)^k\cos(\nu+k)\Theta_{sj}$$

$$-\left(\frac{R_s}{\bar{\rho}_{sj}}\right)^\nu\left(\frac{R_j}{\bar{\rho}_{sj}}\right)^k\cos(\nu+k)\bar{\Theta}_{sj}\Big],$$

$\tau_{\nu k}^{sj}$ получается из $\sigma_{\nu k}^{sj}$ заменой знака – между слагаемыми на $+$,

$$\tau_\nu^{qj} = \frac{2}{\nu}\Big[\exp(-\nu\mu_{qj})\cos\nu\vartheta_{qj} - \exp(-\nu\bar{\mu}_{qj})\cos\nu\bar{\vartheta}_{qj}\Big]\operatorname{ch}\nu\mu_q^0;$$

$\tilde{\sigma}_\nu^{sj}$, $\tilde{\sigma}_{\nu k}^{sj}$, $\tilde{\tau}_{\nu k}^{sj}$, $\tilde{\tau}_\nu^{qj}$ получаются из соответствуующих величин без волны заменой cos на sin, ch, на sh

$$\alpha_{\nu k}^{sj} = R_s^\nu\Big[Lc_\nu^{(k)}(\rho_{sj},\Theta_{sj};h_j,\alpha_{sj}) - (-1)^k Lc_\nu^{(k)}(\bar{\rho}_{sj},\bar{\Theta}_{sj};h_j,\bar{\alpha}_{sj})\Big]\exp k\mu_j^0;$$

$\beta_{\nu k}^{sj}$ получается из $\alpha_{\nu k}^{sj}$ заменой знака – между слагаемыми на $+$; $\tilde{\alpha}_{\nu k}^{sj}$, $\tilde{\beta}_{\nu k}^{sj}$ получаются из соответствующих величин без волны заменой $Lc_\nu^{(k)}(\dots)$ на $Ls_\nu^{(k)}(\dots)$; функции $Lc_\nu^{(k)}(\dots)$, $Ls_\nu^{(k)}(\dots)$, $Dc_\nu^{(k)}(\dots)$, $Ds_\nu^{(k)}(\dots)$ определены в [2];

$$\gamma_{\nu k}^{qj} = 2R_j^k\Big[Dc_\nu^{(k)}(\mu_{sj},\vartheta_{qj};h_q,\alpha_{qj}) - (-1)^k Dc_\nu^{(k)}(\bar{\mu}_{qj},\bar{\vartheta}_{qj};h_q,\bar{\alpha}_{qj})\Big]\operatorname{ch}\nu\mu_q^0,$$

$$\delta_{\nu k}^{qj} = 2R_j^k\Big[Dc_\nu^{(k)}(\mu_{qj},\vartheta_{qj};h_q,\alpha_{qj}) + (-1)^k Dc_\nu^{(k)}(\bar{\mu}_{qj},\bar{\vartheta}_{qj};h_q,\bar{\alpha}_{qj})\Big]\operatorname{sh}\nu\mu_q^0,$$

$$\eta_{\nu k}^{qj} = 2\Big[Ac_\nu^{(k)}(\mu_{qj},\vartheta_{qj};h_q/h_j,\alpha_{qj}) + (-1)^k Ac_\nu^{(k)}(\bar{\mu}_{qj},\bar{\vartheta}_{qj};h_q/h_j,\bar{\alpha}_{qj})\Big]\exp k\mu_j^0\operatorname{ch}\nu\mu_q^0,$$

$$\zeta_{\nu k}^{qj} = 2\Big[Ac_\nu^{(k)}(\mu_{qj},\vartheta_{qj};h_q/h_j,\alpha_{qj}) + (-1)^k Ac_\nu^{(k)}(\bar{\mu}_{qj},\bar{\vartheta}_{qj};h_q/h_j,\bar{\alpha}_{qj})\Big]\exp k\mu_j^0\operatorname{sh}\nu\mu_q^0,$$

$$\xi_{\nu k}^{q} = 2(-1)^k\exp k\mu_q^0\operatorname{ch}\nu\mu_q^0 Ac_\nu^{(k)}(\bar{\mu}_{qq},\bar{\vartheta}_{qq};1,\bar{\alpha}_{qq}),$$

$$\omega_{\nu k}^{q} = 2(-1)^k\exp k\mu_q^0\operatorname{sh}\nu\mu_q^0 Ac_\nu^{(k)}(\bar{\mu}_{qq},\bar{\vartheta}_{qq};1,\bar{\alpha}_{qq}),$$

$\tilde{\gamma}_{\nu k}^{qj}$, $\tilde{\delta}_{\nu k}^{qj}$, $\tilde{\eta}_{\nu k}^{qj}$, $\tilde{\zeta}_{\nu k}^{qj}$, $\tilde{\xi}_{\nu k}^{q}$, $\tilde{\omega}_{\nu k}^{q}$ получаются из соответствующих величин без волны, если заменить $Xc_\nu^{(k)}(\dots)$ на $Xs_\nu^{(k)}(\dots)$ и поменять местами ch и sh; $(\rho_{sj},\Theta)sj)$, $(\bar{\rho}_{sj},\Theta_{sj})$ — координаты точек O_j, $\bar{O}_j$ в полярных координатах с полюсом O_s; $(\mu_{qj},\vartheta_{qj})$, $(\bar{\mu}_{qj},\bar{\vartheta}_{qj})$ — координаты этих же точек в эллиптических координатах с центром O_q; α_{pr}, $\bar{\alpha}_{pr}$ — углы между осью O_px_p и соответственно осями O_rx_r, $\bar{O}_r\bar{x}_r$, отсчитываемые от последних против часовой стрелки; $p, r = \overline{1,N}$.

Так как окружности и эллипсы не имеют общих точек ни между собой, ни с прямой $x = 0$, то система (8) обладает вполне непрерывной формой [6] и в силу единственности решения рассматриваемой задачи имеет единственное решение, принадлежащее пространству l^2, которое может быть найдено методом редукции. Из (4) вытекает, что

$$\int\limits_{\Gamma_j}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dl = 2\pi A_j;\quad j=\overline{1,N}, \tag{9}$$

т.е. для вычисления любой емкости достаточно знать только коэффициенты A_j, $j = \overline{1,N}$. Коэффициенты и свободные члены усеченной системы (минимальной размерности)

$$-A_s\ln q_s + \sum_{j=1,\,j\neq s}^{N} A_j\ln\frac{\bar{\rho}_{sj}}{\rho_{sj}} = f_s,$$

$$A_q(\bar{\mu}_{qq}-\mu_q^0) + \sum_{j=1,\,j\neq q}^{N} A_j(\bar{\mu}_{qj}-\mu_{qj}) = f_q;\quad s=\overline{1,N_1};\quad q=\overline{N_1+1,N} \tag{10}$$

полностью и однозначно определяют размеры и взаимное расположение проводов и граничные условия. Система (10) дает возможность определить все коэффициенты A_j, поэтому естественно ее использовать для приближенного вычисления электрических емкостей.

Подчеркнем, что если $s = \overline{1,0}$, то (10) не содержит первого уравнения; если же $a = \overline{N_1+1,N_1}$ — второго.

3) Рассмотрим некоторые частные случаи.

а) $N_1 = 1$, $N_2 = 0$. В этом случае система (10) примет вид

$$-A_1\ln q_1 = 1,$$

тогда

$$C_l \approx 2\pi\varepsilon/(2l_1/R_1),$$

что согласуется с [1,(4)–(1)] с учетом свойства емкости [1,(B-18)].

Если же $N_1 = 0$, $N_2 = 1$, то система (10) примет вид

$$A_1(\bar{\mu}_{11}-\mu_1^0) = 1,$$

тогда

$$C_l \approx 2\pi\varepsilon/(\bar{\mu}_{11}-\mu_1^0),$$

что согласуется с [7,(13)] с учетом того же свойства емкости. Для вычисления $\bar{\mu}_{11}$ можно использовать указанный в [7] способ.

б) $N_1 = 1$, $N_2 = 1$. Система (10) примет вид

$$-A_1\ln q_1 + A_2\ln(\bar{\rho}_{12}/\rho_{12}) = f_1,$$

$$A_1(\bar{\mu}_{21}-\mu_{21}) + A_2(\bar{\mu}_{22}-\mu_2^0) = f_2. \tag{11}$$

При $f_1 = 1$, $f_2 = 0$ (или наоборот) получим

$$C_{12} = C_{21} \approx \pi\varepsilon\Big[\mu_{21}-\bar{\mu}_{21}+\ln)\rho_{12}/\bar{\rho}_{12})\Big]\Big/\Delta \tag{12}$$

(так как с помощью системы (11) получаем $C_{12}\neq C_{21}$, то здесь взято их среднее арифметическое значение).

При $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ получим

$$C_{10} \approx 2\pi\varepsilon\Big[\ln(\bar{\rho}_{12}/\rho_{12}) - \big(\bar{\mu}_{22} - \mu_2^0\big)\Big]\Big/\Delta, \qquad (13)$$

$$C_{20} \approx 2\pi\varepsilon\big[\ln q_1 + (\bar{\mu}_{21} - \mu_{21})\big]\big/\Delta, \qquad (14)$$

где

$$\Delta = (\bar{\mu}_{21} - \mu_{21})\ln(\bar{\rho}_{12}/\rho_{12}) + (\bar{\mu}_{22} - \mu_2^0)\ln q_1.$$

В частности, если центр окружности находится (в системе xOy) в точке $O_1(-l_1, 0)$, центр эллипса с полуосями a, b — в точке $O_1(-l_2, 0)$, $l_2 > l_1$, большая ось эллипса перпендикулярна прямой $x = 0$, то ($c = \sqrt{a^2 - b^2}$)

$$\mu_{21} = \mathrm{Arch}\,\frac{l_2 - l_1}{c}, \qquad \bar{\mu}_{21} = \mathrm{Arch}\,\frac{l_1 + l_2}{c},$$

$$\bar{\mu}_{22} = \mathrm{Arch}\,\frac{2l_2}{c}, \qquad \mu_2^0 = \mathrm{Arch}\,\frac{a}{c},$$

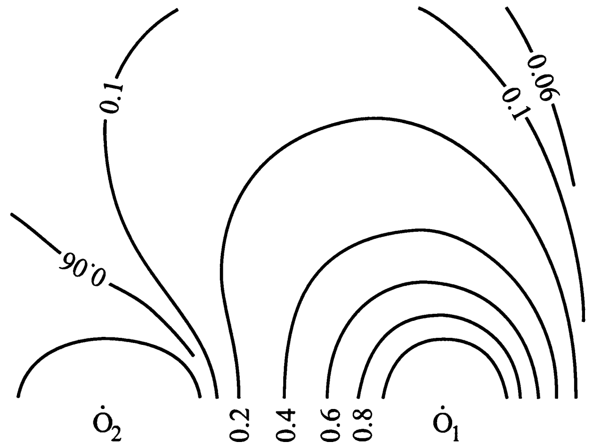
$$\rho_{12} = l_2 - l_1, \qquad \bar{\rho}_{12} = l_1 + l_2.$$

Для вычисления погрешности формул (12)–(14) проводился численный эксперимент, состоящий в решении методом редукции системы (8) и сравнении "точного" значения емкости с приближенным. Система (8) в этом случае распадается на две: однородную для B_ν^1 и B_ν^2 с нулевым решением и неоднородную для A_1, A_2, A_ν^1, A_ν^2, $\nu = 1, 2, \ldots$. В таблице приведены некоторые результаты вычислений в этом частном случае для эллипса с полуосями $a = 5$, $b = 3$ и окружности радиуса $R_1 = 5$ в зависимости от l_1 и l_2.

l_1	l_2	Значение $C_{12}/(2\pi\varepsilon)$		Относительная ошибка, %
		"точное"	приближенное	
15.5	36.5	0.207196	0.203787	1.6452
15.5	46.5	0.129713	0.132149	−1.8774
25.5	46.5	0.222773	0.214002	3.9374
25.5	56.5	0.143918	0.143126	0.5500
25.5	66.5	0.107671	0.108142	−0.4381
35.5	56.5	0.232711	0.222177	4.5269
35.5	66.5	0.153371	0.151506	1.2160
35.5	76.5	0.116508	0.116210	0.2554
35.5	86.5	0.094395	0.094538	−0.1518

Отметим, что размерность усеченной системы для получения "точного" решения сильно зависит от взаимного расположения проводов и плоскости. Для получения приведенных в таблице значений с шестью верными знаками после точки достаточно взять десять уравнений, с тремя — пять. Если, например, $l_1 = 6$, $l_2 = 17$, то уже для получения значения с шестью верными знаками после точки нужно взять 38 уравнений.

На рисунке показаны эквипотенциальные линии поля. В силу симметрии линии изображены только для $y \geq 0$. Вычисления проведены для $a = 3$, $b = 2$, $R_1 = 2$, $l_1 = 5$, $l_2 = 16$.



Для любых N_1 и N_2 с помощью определителей легко написать приближенную расчетную формулу для вычисления любой емкости аналогично формулам [1, (6)–(21)].

Предложенный метод точного и приближенного вычисления электрических емкостей можно использовать в научной и практической деятельности инженерам и научным работникам различных специальностей.

Список литературы

[1] *Иоссель Ю.Я., Кочанов Э.С., Струнский М.Г.* Расчет электрической емкости. Л.: Энергоиздат, 1981. 288 с.
[2] *Наркун З.М.* // Дифференциальные уравнение. 1983. Т. 19. № 4. С. 654–660.
[3] *Наркун З.М.* // Исследование по математике и физике. Сб. ст. Гродно: Гродненский гос. университет, 1978. С. 144–147.
[4] *Наркун З.М.* // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. № 2. С. 357–359.
[5] *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 2. М.: ИЛ, 1960. 866 с.
[6] *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. 5-е изд. М.; Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
[7] *Бойко В.К., Наркун З.М.* // Электричество. 1991. № 2. С. 76–78.