01

Усиленный отклик на сигнал в ансамбле взаимодействующих бистабильных элементов

© С.А. Решетняк

Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН,
117924 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 13 августа 1998 г. В окончательной редакции 19 марта 1999 г.)

Аналитически исследован одномерный ансамбль (цепочка), состоящий из большого числа взаимодействующих бистабильных элементов. Найдены стационарные отклики на сигнал как с учетом, так и без учета воздействия шума на цепочку. Сравнение откликов указывает на усиление сигнала при наличии шума в ансамбле. При этом отклик цепочки превышает отклик отдельного элемента на фактор, который экспоненциально возрастает с ростом постоянной взаимодействия. Сделан вывод об усилении эффекта стохастического резонанса в результате взаимодействия бистабильных элементов.

Введение

В настоящее время значительный интерес вызывает так называемое явление стохастического резонанса (СР), которое было предсказано в [1] и экспериментально подтверждено на оптических бистабильных системах [2,3]. В бистабильных нелинейных динамических системах создаются условия для усиления слабого периодического сигнала в результате его взаимодействия с шумом. Кроме оптических систем СР возникает также в физике твердого тела (тунельные диоды [4], джозефсоновские контакты [5]), в химических системах [6], в биологии при моделировании возбуждения нейронов [7]. Из-за универсальности явления можно ожидать его обнаружение и в других областях науки.

Если СР достаточно полно исследован в отдельной бистабильной системе [8–10], то в случае ансамбля взаимодействующих между собой бистабильных элементов СР исследован недостаточно. Известно, что численный анализ [11] указывает на усиление СР при включении взаимодействия. Характерными признаками СР являются аномальный рост либо восприимчивости системы, либо отношения сигнал–шум, либо фурье-образа автокорреляционной функции с увеличением интенсивности шума в определенном диапазоне. Однако необходимым условием существования эффекта СР является усиление отклика шумящей системы на сигнал по сравнению с откликом нешумящей системы.

Цель данной работы — аналитическое определение и сравнение между собой стационарных откликов цепочки взаимодействующих бистабильных элементов как с учетом, так и без учета воздействия на нее шума. Рассматриваемые уравнения совпадают с одномерным уравнением Гинзбурга–Ландау, записанного в конечных разностях. Ниже будет показано, что отклик шумящей системы превышает отклик нешумящей системы на фактор, который экспоненциально растет с ростом константы связи. Следовательно, взаимодействие бистабильных элементов может в значительной мере увеличить отношение сигнал–шум.

Отклик системы на сигнал без учета воздействия шума

Рассмотрим цепочку, состоящую из N взаимодействующих между собой бистабильных элементов на основе следующей системы уравнений:

$$\frac{d\eta_n}{dt} = -U_n' + g(\eta_{n+1} - 2\eta_n + \eta_{n-1}) + F\cos(\omega t), \quad (1)$$

где

$$U_n = -\frac{a}{2}\eta_n^2 + \frac{b}{4}\eta_n^4$$

— потенциал отдельного бистабильного элемента; g — постоянная взаимодействия соседних элементов цепочки; F и ω — амплитуда и частота внешнего поля; $n = 1, 2, \ldots, N$.

В качестве граничных условий рассматриваются условия цикличности

$$\eta_{N+1} = \eta_1, \qquad \eta_N = \eta_0, \quad (2)$$

т.е. первый элемент взаимодействует не только со вторым, но и с последним элементом цепочки. Удобно ввести безразмерные величины $x_n = \eta_n\sqrt{b/a}$ и представить (1) в виде

$$\frac{dx_n}{dt} = -\frac{\partial W}{\partial x_n} + h\cos(\omega t),$$

$$W = \sum_{n=1}^{N}(V_n - gx_nx_{n+1}), \quad V_n = -\frac{a-2g}{2}x_n^2 + \frac{a}{4}x_n^4, \quad (3)$$

где W — потенциальная функция цепочки, $h = F\sqrt{b/a}$.

Система ведет себя устойчивым образом в окрестности точек z_n, где функция W минимальна. Они находятся из решения следующей системы уравнений:

$$-\frac{\partial W}{\partial x_n}\bigg|_{x_n=z_n} = a(z_n - z_n^3) + g(z_{n+1} - 2z_n + z_{n-1}) = 0. \quad (4)$$

В работе будут рассматриваться системы бистабильных элементов с относительно небольшими постоянными связи, удовлетворяющими неравенству $g \ll a$. При этом решение (4) можно искать в виде ряда по степеням g. В отсутствие связи между элементами $z_n = \sigma_n = \pm 1$. В первом приближении по g имеем

$$z_n = \sigma_n + \frac{g}{2a}\,\Delta\sigma_n, \tag{5}$$

где $\Delta\sigma_n = \sigma_{n+1} - 2\sigma_n + \sigma_{n-1}$.

Можно показать, что второй дифференциал d^2W в окрестности точек z_n положителен и они действительно являются точками локального минимума потенциальной функции W. Стартуя из некоторого начального состояния, система по истечении времени динамической релаксации окажется в точках z_n устойчивого равновесия. При воздействии на цепочку небольшого внешнего поля с амплитудой $h \ll a$ ее движение также будет происходить вблизи точек z_n. Поэтому для определения реакции цепочки на внешнее поле решение исходных уравнений (3) можно искать в виде

$$x_n = \sigma_n + y_n, \qquad |y| \ll 1.$$

Небольшие отклонения y_n находятся из следующей линеаризованной системы уравнений (3):

$$\frac{dy_n}{dt} = -\,2ay_n + g(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) + g\Delta\sigma_n + h\cos(\omega t). \tag{6}$$

Решение (6) есть сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Запишем общее решение однородного уравнения

$$y_n^{(0)} = \sum_\alpha C_\alpha e_n^{(\alpha)} \exp(\mu_\alpha t). \tag{7}$$

Здесь C_α — постоянные, определяемые начальными условиями; $e_n^{(\alpha)}$ и μ_α — собственные вектора и собственные значения релаксационной матрицы R_{nm}

$$\sum_{m=1}^{N} R_{nm} e_m^{(\alpha)} = \mu_\alpha e_n^{(\alpha)},$$

$$R_{nn} = -2(a+g), \qquad R_{n,n-1} = R_{n,n+1} = g. \tag{8}$$

Нетрудно убедиться в том, что $\mu_\alpha < 0$ и, следовательно, решение (7) с течением времени стремится к нулю. Действительно, пусть e_n нормирован на единицу (индекс α ниже опускается). Тогда из (8) с учетом условий цикличности (2) получаем

$$\mu = \sum_{n=1}^{N} (R_{nn}e_n^2 + R_{n,n-1}e_n e_{n-1} + R_{n,n+1}e_n e_{n+1}) = -2a - g\sum_{n=1}^{N}(e_n - e_{n+1})^2.$$

Отсюда следует, что абсолютные величины μ_α больше или порядка $2a$. Обратное значение $(2a)^{-1}$ определяет характерное время динамической релаксации из неустойчивого в устойчивое состояние системы.

Из физических соображений ясно, что при стационарном воздействии на цепочку внешнего поля характер движения параметра порядка для каждого элемента цепочки одинаков. Поэтому частное решение, соответствующее воздействию поля, не зависит от номера элемента цепочки. Легко видеть, что частное решение неоднородного уравнения (6) имеет вид

$$y_n^{(H)} = \frac{g}{2a}\,\Delta\sigma_n + \frac{h}{\sqrt{4a^2+\omega^2}}\cos(\omega t - \varphi), \tag{9}$$

где $\tan(\varphi) = \omega/(2a)$, а $\Delta\sigma_n$ определен формулой (5).

Формулы (7) и (9) задают отклик или реакцию цепочки на переменное внешнее поле без учета воздействия на цепочку шума. Для моментов времени $t \gg (2a)^{-1}$ находим стационарный отклик

$$x_n = \sigma_n + y_n^{(H)} = \left[z_n + \frac{h}{\sqrt{4a^2+\omega^2}}\cos(\omega t - \varphi)\right]_{\omega \ll 2a} = z_n + \frac{h}{2a}\cos(\omega t). \tag{10}$$

Отклик системы при воздействии на нее шума

Проанализируем теперь отклик системы при одновременном воздействии на нее и внешнего поля, и шума. Для этого в правую часть уравнения (3) добавим случайную силу $\xi(t)$, которая моделирует, например, воздействие термостата на цепочку и определяется следующими моментами:

$$\langle \xi_n(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi_n(t)\xi_m(t') \rangle = 2d\delta_{nm}\delta(t-t'),$$

где d — интенсивность шума.

Полученная таким образом система ланжевеновских уравнений эквивалентна кинетическому уравнению для функции распределения $G(x_1, x_2, \ldots, x_N, t)$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_n}\left\{\left[W_n' - h\cos(\omega t)\right]G + d\,\frac{\partial G}{\partial x_n}\right\} \tag{11}$$

с граничными условиями

$$\left(W_n' G + d\,\frac{\partial G}{\partial x_n}\right)_{x_n \to \pm\infty} = 0. \tag{12}$$

Будем интересоваться средним значением параметра порядка отдельного бистабильного элемента

$$\langle x_n \rangle = \int x_n G dx_1 dx_2 \ldots dx_N.$$

Амплитуду поля по-прежнему полагаем малой ($h \ll d$), что дает возможность искать функцию распределения в первом порядке теории возмущений по h,

$$G = G^{(0)} + hG^{(1)}. \tag{13}$$

Подставляя (13) в (11) и приравнивая члены с одинаковыми степенями h, имеем

$$\frac{\partial G^{(0)}}{\partial t} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_n}\left(W_n' G^{(0)} + d\frac{\partial G^{(0)}}{\partial x_n}\right),$$

$$\frac{\partial G^{(1)}}{\partial t} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_n}\left(W_n' G^{(1)} + d\frac{\partial G^{(1)}}{\partial x_n}\right) - \cos(\omega t)\sum_{n=1}^{N}\frac{G^{(0)}}{\partial x_n}.$$

Граничные условия для $G^{(0)}$ и $G^{(1)}$ аналогичны (12).

Рассмотрим стационарный процесс воздействия внешнего поля на цепочку. Для достаточно больших моментов времени наблюдения ($t > \tau$ — характерное время релаксации) функция распределения $G^{(0)}$ практически равновесна и имеет вид

$$G^{(0)} = C\exp\left(-\frac{W}{d}\right),$$

$$C^{-1} = \int \exp\left(-\frac{W}{d}\right) dx_1\, dx_2 \ldots dx_N. \tag{14}$$

При этом, определяя отклик системы на внешнее поле, достаточно найти решение стационарного уравнения для $G^{(1)}$ или в силу рассматриваемых граничных условий следующего уравнения:

$$W_n' G^{(1)} + d\,\frac{\partial G^{(1)}}{\partial x_n} = \cos(\omega t) G^{(0)}.$$

Полагая

$$G^{(1)} = \varphi^{(1)}\exp\left(-\frac{W}{d}\right),$$

находим

$$\varphi^{(1)} = \varphi_0^{(0)} + \frac{C}{d}\cos(\omega t)\sum_{i=1}^{N} x_i.$$

Так как равновесная функция распределения (14) является четной, то она вклада в среднее значение параметра порядка не дает. Поэтому

$$\langle x_n\rangle = \frac{Ch}{d}\cos(\omega t) I_n,$$

$$I_n = \sum_{i=1}^{N}\int x_i x_n \exp\left(-\frac{W}{d}\right) dx_1\, dx_2 \ldots dx_N. \tag{15}$$

Формула (15) задает стационарный отклик цепочки на сигнал с частотой $\omega \ll \tau^{-1} \ll a$.

Возникшие в (15) статистические интегралы вычисляются с помощью метода перевала, что правомерно для небольших интенсивностей шума по сравнению с высотой потенциального барьера бистабильного элемента ($d \ll a$). Вычислим сперва постоянную C нормировки функции распределения. Интегрируя раздельно по каждой переменной x_n, получаем

$$C^{-1} = C_0^N Z,$$

$$Z = \sum_{\sigma_1}\sum_{\sigma_2}\cdots\sum_{\sigma_N} \times \exp\Big[k(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \ldots + \sigma_N\sigma_1)\Big], \tag{16}$$

где

$$C_0 = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{\lambda}{4}\right),$$

$\lambda = \frac{a}{d}$, $k = \frac{g}{d}$, $\sigma_n = \pm 1$.

Величина Z совпадает со статсуммой в одномерной модели Изинга для ферромагнетика и вычисляется по известным правилам (см., например, [12])

$$Z = \mathrm{Sp}\,(P^N), \qquad P = \begin{pmatrix} e^k & e^{-k} \\ e^{-k} & e^k \end{pmatrix}.$$

Так как шпур матрицы не изменяется при унитарных преобразованиях, то нетрудно найти преобразование S, которое диагонализует матрицу P,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{P} = S^{-1}PS = \begin{pmatrix} e^k + e^{-k} & 0 \\ 0 & e^k - e^{-k} \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$Z = \mathrm{Sp}\,(\tilde{P}^N) = (e^k + e^{-k})^N + (e^k - e^{-k})^N. \tag{17}$$

Обратимся теперь к расчету статистического интеграла I_n. Снова интегрируя раздельно по каждой переменной, находим

$$I = C_0^N\left(\frac{Z}{2\lambda} + S\right),$$

$$S = \sum_{i=1}^{N}\sum_{\sigma_1}\sum_{\sigma_2}\cdots\sum_{\sigma_N}\sigma_i\sigma_N \times \exp\Big[k(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \ldots + \sigma_N\sigma_1)\Big]. \tag{18}$$

Из-за условий цикличности все элементы в цепочке равноправны, поэтому величины I_n и S_n не зависят от индекса n. Именно поэтому индекс n опущен в формуле (18). Отметим также, что первый член в формуле (18) возник в результате вычисления следующего интеграла по переменной x_n

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_n^2 \exp\left[-\lambda(x_n - \sigma_n)^2\right] dx_n = \sigma_n^2 + \frac{1}{2\lambda}.$$

Для расчета суммы S рассмотрим отдельно случаи с $i = n$, $i = n \pm 1$, $i = n \pm 2$ и т.д. В случае $i = n$ член суммы S совпадает с уже найденной статсуммой Z.

При рассмотрении случая соседних элементов цепочки используется очевидное равенство

$$\sum_{\sigma_1}\sum_{\sigma_2}\dots\sum_{\sigma_N}\sigma_n\sigma_{n\pm1}\exp\Big[k(\sigma_1\sigma_2+\dots+\sigma_N\sigma_1)\Big]$$
$$=\frac{1}{N}\frac{\partial Z}{\partial k}=(e^k+e^{-k})^{N-1}(e^k-e^{-k})$$
$$+(e^k-e^{-k})^{N-1}(e^k+e^{-k}).$$

Нетрудно сделать обобщение, справедливость которого можно проверить путем прямых вычислений

$$\sum_{\sigma_1}\sum_{\sigma_2}\dots\sum_{\sigma_N}\sigma_n\sigma_{n\pm m}\exp\Big[k(\sigma_1\sigma_2+\dots+\sigma_N\sigma_1)\Big]$$
$$=(e^k+e^{-k})^{N-m}(e^k-e^{-k})^m$$
$$+(e^k-e^{-k})^{N-m}(e^k+e^{-k})^m. \quad (19)$$

Заметим, что в предельном случае $m=N$ формула (19) совпадает со статсуммой Z. Это вполне понятно, так как число N является периодом цепочки и $\sigma_{n\pm N}=\sigma_n$, $\sigma_n^2=1$. Используя формулу (19), находим сумму S

$$S=\sum_{m=0}^{N}\sum_{\sigma_1}\sum_{\sigma_2}\cdots\sum_{\sigma_N}\sigma_n\sigma_{n+m}$$
$$\times\exp\Big[k(\sigma_1\sigma_2+\dots+\sigma_N\sigma_1)\Big]=S_1+S_2,$$

$$S_1=\sum_{m=0}^{N-1}(e^k+e^{-k})^{N-m}(e^k-e^{-k})^m=(e^k+e^{-k})^N\,\frac{1-\alpha^N}{1-\alpha},$$

$$S_2=\sum_{m=0}^{N-1}(e^k-e^{-k})^{N-m}(e^k+e^{-k})^m=\alpha S_1,$$

где $\alpha=\tanh(k)$.

Обсуждение полученных результатов

Пусть цепочка состоит из очень большого числа N бистабильных элементов. Так как $\alpha<1$, то малой величиной α^N можно пренебречь по сравнению с единицей и получить окончательный результат

$$\langle x_n\rangle=\left[\frac{h}{2a}+\frac{h}{d}\exp(2k)\right]\cos(\omega t). \quad (20)$$

Формула (20) определяет средний отклик одномерного ансамбля бистабильных элементов на периодический сигнал с частотой $\omega\ll\tau^{-1}$. В случае высоких частот необходимо анализировать нестационарное уравнение для функции распределения $G^{(1)}$.

Сравним теперь отклик (20) на сигнал с откликом (10), полученным без учета воздействия шума на цепочку. Во-первых, в (20) нет постоянного члена, который имеется в (10) и определяет положение минимума потенциала. Это объясняется тем, что при воздействии шума, происходят переходы через потенциальный барьер бистального элемента и вероятности оказаться в левой или правой ямах потенциала совершенно одинаковы. При отсутствии шума система, попав в одну из потенциальных ям, находится там постоянно, что и отражается наличием в (10) члена z_n. Во-вторых, как и должно быть, формулы (10) и (20) содержат одинаковый динамический отклик на сигнал, пропорциональный $h/2a$. В-третьих, результат взаимодействия сигнала и шума представлен вторым членом в формуле (20). Следует отметить резкую экспоненциальную зависимость этого члена от постоянной связи g. Хотя в анализе параметры g и d полагались малыми по сравнению с постоянной a, но их отношение $k=g/d$ может существенно превышать единицу. При этом вызванный шумом отклик системы на сигнал на порядок или больше превышает динамический отклик. В отсутствие связи между элементами цепочки при $g=0$ каждый из них статистически независим и (20) совпадает с откликом [9] на сигнал для отдельного бистабильного элемента.

Таким образом, проведенное исследование показывает, что взаимодействие бистабильных элементов при определенных условиях существенно усиливает отклик на сигнал за счет воздействия на систему шума. Это означает также, что эффект СР, исследованный достаточно полно для отдельного бистабильного элемента, в ансамбле взаимодействующих элементов должен проявиться в еще большей мере. Усиление происходит за счет энергии термостата, моделью которого является случайная сила $\xi(t)$.

Наконец, обратим внимание на то, что исследованная цепочка взаимодействующих бистабильных элементов является непрерывным аналогом одномерной модели Изинга для ферромагнетиков [12]. Как следствие этого классический статистический интеграл совпал с точностью до численного множителя с квантовой статсуммой. Поэтому с большой степенью вероятности можно ожидать реализацию эффекта СР и в ферромагнетиках.

Эффект усиления СР в результате взаимодействия бистабильных элементов можно обнаружить, например, в радиофизических устройствах. Известно [4], что туннельный диод, включенный последовательно с активным сопротивлением R и источником напряжения, задающим гармонический сигнал, постоянную составляющую и шум, является бистабильным элементом. Параметром порядка здесь служит величина $U-U_0$, где U — напряжение на емкости C, включенной параллельно туннельному диоду, U_0 — центральная точка падающего участка ампер-вольтной характеристики с отрицательным сопротивлением $|R_T|\sim 1\,\mathrm{k}\Omega$. Оценки показывают, что для $C\sim 1\,\mathrm{nF}$ параметры a и b потенциальной функции U составляют значения $10^6\,\mathrm{s}^{-1}$ и $3\cdot10^6\,\mathrm{s}^{-1}\mathrm{V}^{-2}$ соответственно. Случай взаимодействующих бистабильных элементов реализуется при последовательном соединении туннельных диодов. Роль постоянной взаимодействия играет величина $g=(RC)^{-1}$. Как показывает анализ, с ростом R параметры a и b насыщаются. Поэтому необходимое из теории условие $g \ll a$ выполняется для $R \gg |R_T|$. При этом частота ω гармонического сигнала должна удовлетворять условию $\omega \ll a$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 96-02-18692.

Список литературы

[1] *Benzi R., Sutera S., Vulpiani A.* // J. Phys. A. 1981. Vol. 14. N 11. P. L453–L457.
[2] *McNamara B., Wiesenfeld K., Roy R.* // Phys. Rev. Lett. 1988. Vol. 60. N 25. P. 2626–2629.
[3] *Дыкман М.И., Великович А.Л., Голубев Г.П.* и др. // Письма в ЖЭТФ. 1992. Т. 53. Вып. 4. С. 182–185.
[4] *Mantegna R.N., Spagnolo B.* // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 49. N 3. P. R1792–R1795.
[5] *Inchiosa M.E., Bulsara A.R., Hibbs A.D., Whitecotton B.R.* // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 80. N 7. P. 1381–1384.
[6] *Dykman M.I., Horita T., Ross J.* // J. Chem. Phys. 1995. Vol. 193. N 3. P. 966–972.
[7] *Chialvo D.R., Longtin A., Muller Gerking J.* // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 55. N 2. P. 1798–1808.
[8] *Gammaitoni L., Hanggi P., Jung P., Marchesoni F.* // Rev. Mod. Phys. 1998. Vol. 70. N 1. P. 223–287.
[9] *Решетняк С.А., Шелепин Л.А.* // Квазистационарные распределения в кинетике. М.: ИПО "Автор", 1996. 295 с.
[10] *Reshetnyak S.A.* // J. Russian Laser Research. 1998. Vol. 19. N 2. P. 175–184.
[11] *Inchiosa M.E., Bulsara A.R.* // Phys. Lett. A. 1995. Vol. 200. N 3–4. P. 283–288.
[12] *Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш.* // Термодинамика, статистическая физика и кинетика. М.: Наука, 1997. 552 с.