01;07

# О частотной и температурной зависимости предельного КПД при прямом использовании квазимонохроматического излучения

© Н.Д. Гудков

Институт фундаментальных проблем биологии РАН,
142292 Пущино, Московская область, Россия

(Поступила в Редакцию 31 декабря 1998 г.)

Известное из литературы решение задачи о предельной (термодинамически допустимой) эффективности $\eta_m$ прямого преобразования (в работу) энергии квазимонохроматического излучения приводит к физически неприемлемым результатам ($\eta_m < 0$) в области малых частот $\nu$ и температур $T_\nu$ преобразуемого излучения. Показано, что отмеченная особенность есть следствие приближенного характера упомянутого решения, полученного без учета фонового теплового излучения: найденное точное выражение для $\eta_m$ справедливо для всех $\nu$, $T_\nu \geqslant 0$ и переходит в известное ранее, если $T_\nu \gg T$ и $h\nu \gtrsim kT$ (где $T$ — температура окружающей среды).

В работе [1] был получен следующий результат для предельной эффективности "прямого" преобразования (в работу) энергии квазимонохроматического излучения в случае полного поглощения "рабочим телом" падающей радиации

$$\eta_m \overset{\text{def}}{=} \frac{N_m}{\Pi_{rs}^{\text{in}}} = 1 - \alpha\frac{T}{T_\nu} + (\alpha - 1)\ln(\alpha - 1)\frac{kT}{h\nu},$$
$$\alpha = e^{h\nu/kT_\nu}. \qquad (1)$$

Здесь $N_m$ — максимальное (термодинамически допустимое) значение мощности, развиваемой преобразователем; $\Pi_{rs}^{\text{in}}$ — поток; $\nu$ — частота; $T_\nu$ — температура падающего на преобразователь излучения; $T$ — температура окружающей среды (и преобразователя); $k$ и $h$ — постоянные Больцмана и Планка соответственно.[1]

В предельных случаях малых и больших частот формула (1) дает [1]

$$\eta_m = \begin{cases} 1 - \dfrac{T}{T_\nu} - \dfrac{kT}{h\nu}, & h\nu \gg kT_\nu, \\ 1 - \dfrac{T}{T_\nu}\left(1 + \ln\dfrac{kT_\nu}{h\nu}\right), & h\nu \ll kT_\nu. \end{cases} \qquad (2)$$

Последняя из формул (2) тем точнее, очевидно (по сравнению с исходной формулой (1)), чем меньше отношение $h\nu/kT_\nu$. Парадокс заключается в том, однако, что при достаточно малых значениях указанного отношения получаем из (2) физически неприемлемый результат $\eta_m < 0$, причем $\eta_m \to -\infty$, если $\nu \to 0$. К такому же результату приводит "высокочастотная" (верхняя) из формул (2), если, фиксировав значение $\nu$, понижать температуру преобразуемого излучения.

"Парадоксы", подобные отмеченным, возникают обыкновенно, когда приближенная формула, считаемая точной, используется вне границ ее применимости. В настоящей работе показано, что разбираемый пример не составляет исключения и, следовательно, выражение (1), полученное без учета фонового теплового излучения, носит приближенный характер и справедливо при одновременном выполнении двух условий: $T_\nu \gg T$ и $h\nu \gtrsim kT$. Легко видеть, что при нарушении именно этих условий формула (1) и приводит к физически бессмысленным значениям для $\eta_m$.[2]

**1**. Из требований термодинамически вытекает следующее ограничение сверху на мощность $N$, развиваемую произвольным устройством, совершающим работу над внешними телами в условиях стационарного обмена энергией с термостатом ("окружающей средой") и полем излучения [2],

$$N \leqslant \Pi_r - T\Sigma_r = N_m. \qquad (3)$$

Здесь $\Pi_r$ и $\Sigma_r$ — полные (net) потоки энергии и энтропии излучения, получаемые устройством ("преобразователем") через его поверхность,

$$\Pi_r = -\int d\nu \int d\sigma \int\limits_{\mathbf{n}\boldsymbol{\omega}\gtrless 0} d\Omega_{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{n}\boldsymbol{\omega} K_\nu, \qquad (4)$$

$$\Sigma_r = -\int d\nu \int d\sigma \int\limits_{\mathbf{n}\boldsymbol{\omega}\gtrless 0} d\Omega_{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{n}\boldsymbol{\omega} L_\nu, \qquad (5)$$

где $K_\nu (= K_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}))$ — спектральная энергетическая яркость излучения частоты $\nu$, распространяющегося в элементарном телесном угле $d\Omega_{\boldsymbol{\omega}}$ в направлении единичного вектора $\boldsymbol{\omega}$ и пересекающего элемент $d\sigma$ поверхности преобразователя (с внешней нормалью $\mathbf{n}$) в

[1] Множитель $\alpha$ во втором слагаемом приведенного выражения отсутствует в цитируемой формуле (12) из [1] из-за очевидной опечатки.

[2] Уместно отметить, что появление этой заметки в известной мере было спровоцировано работами [3], автор которых, оперируя формулой (1) вне границ ее применимости, получает целый ряд любопытных результатов, среди которых "еще один термодинамический способ получения закона равновесного излучения" или, например, вывод (принципиальной важности!) о существовании "основного термодинамического запрета на протекание эндоэргических реакций" (энергия излучения с частотой и яркостью, такими что $\eta_m < 0$, "никаким образом не может быть преобразована в свободную энергию вещества")....

точке **r**; $L_\nu$ — спектральная яркость энтропии излучения, которая (в отсутствие поляризации) однозначно задается величинами $\nu$ и $K_\nu$ [4],

$$L_\nu = L_\nu(K_\nu) = \frac{2k\nu^2}{c^2}[(1+n_\nu)\ln(1+n_\nu) - n_\nu \ln n_\nu], \quad (6)$$

где $c$ — скорость света, $n_\nu$ — среднее число квантов на осциллятор поля

$$n_\nu = c^2 K_\nu / 2h\nu^3. \quad (7)$$

**2**. Спектральная яркость излучения на поверхности преобразователя, которая как видно из выписанных выше формул, только и определяет предельную его (преобразователя) мощность $N_m$, представляется суммой

$$K_\nu = \begin{cases} K_\nu^{\text{in}} + K_\nu^T, & \mathbf{n}\boldsymbol{\omega} \leqslant 0, \\ K_\nu^{\text{out}} + K_\nu^T, & \mathbf{n}\boldsymbol{\omega} > 0. \end{cases} \quad (8)$$

Посредством $K_\nu^{\text{in}}$ здесь обозначена яркость падающего излучения от внешнего источника, $K_\nu^{\text{out}}$ относится к неравновесному излучению, покидающему поверхность преобразователя, и $K_\nu^T$ обозначает яркость фонового теплового излучения, в которое по необходимости "погружена" рассматриваемая система (вместе с окружающей средой) и которое следует считать, очевидно, черным излучением температуры $T$

$$K_\nu^T = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{[\exp(h\nu/kT) - 1]}. \quad (9)$$

Примем, что преобразователь полностью поглощает падающее излучение и не люминесцирует, т. е. положим $K_\nu^{\text{out}} = 0$. Для этого случая выражения (4), (5) с учетом (6)–(9) принимают вид

$$\Pi_r = -\int d\nu \int d\sigma \int\limits_{\mathbf{n}\boldsymbol{\omega}\leqslant 0} d\Omega_{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{n}\boldsymbol{\omega} K_\nu^{\text{in}} = \Pi_{rs}^{\text{in}}, \quad (4')$$

$$\Sigma_r = -\int d\nu \int d\sigma \int\limits_{\mathbf{n}\boldsymbol{\omega}\leqslant 0} d\Omega_{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{n}\boldsymbol{\omega} \left[L_\nu(K_\nu^{\text{in}} + K_\nu^T) - L_\nu(K_\nu^T)\right]. \quad (5')$$

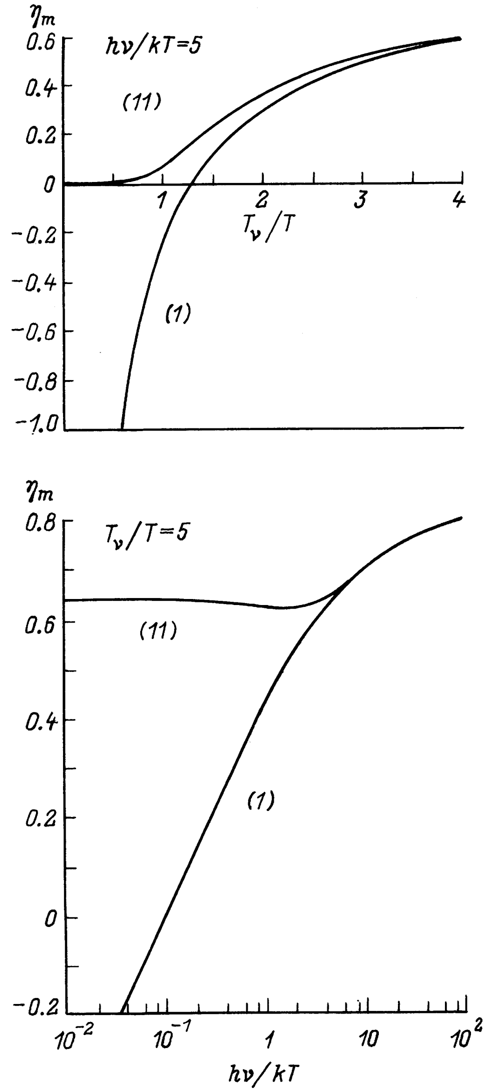
Будем считать далее, что (как это обыкновенно и имеет место на практике) падющее излучение изотропно в пределах телесного угла его распространения.[3] Легко убедиться, что интегрирование по $d\sigma$ и $d\Omega_{\boldsymbol{\omega}}$ в формулах (4′), (5′) выполняется тогда независимо от интегрирования по $d\nu$ и соответственно

$$\Pi_{rs}^{\text{in}} = \Gamma \int d\nu K_\nu^{\text{in}}, \quad (4'')$$

$$\Sigma_r = \Gamma \int d\nu \left[L_\nu(K_\nu^{\text{in}} + K_\nu^T) - L_\nu(K_\nu^T)\right], \quad (5'')$$

где множитель $\Gamma$ имеет смысл "геометрического фактора".

[3] Формально это предположение означает, что $K_\nu^{\text{in}}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})$ представима в виде $K_\nu^{\text{in}} = a(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})K(\nu)$, где $a(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) = 1$, если $(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) \in G$, и $a = 0$, когда **r** и $\boldsymbol{\omega}$ не принадлежат некоторой области $G$ (пятимерного пространства).




Зависимости предельного КПД от температуры и частоты преобразуемого излучения, определяемые формулами (1) и (11) соответственно.

Подставив (4″), (5″) в формулу (3) и разделив полученное таким образом выражение для $N_m$ на мощность $\Pi_{rs}^{\text{in}}$ падающего излучения (формула (4″)), найдем, что предельный КПД в интересующем нас случае падения квазимонохроматического излучения определяется равенством

$$\eta_m = 1 - T\left[L_\nu(K_\nu^{\text{in}} + K_\nu^T) - L_\nu(K_\nu^T)\right]/K_\nu^{\text{in}}, \quad (10)$$

или с учетом (6), (7), (9)

$$\eta_m = 1 - \frac{1}{n_\nu^{\text{in}}}\frac{kT}{h\nu}\left[f(n_\nu^{\text{in}} + n_\nu^T) - f(n_\nu^T)\right], \quad (11)$$

где

$$f(\xi) = (1+\xi)\ln(1+\xi) - \xi\ln\xi, \quad (12)$$

$$n_\nu^T = 1/[\exp(h\nu/kT) - 1], \quad (13)$$

и обычным образом введена температура $T_\nu$ преобразуемого излучения

$$n_\nu^{\rm in} = c^2 K_\nu^{\rm in}/2h\nu^3 = 1/[\exp(h\nu/kT_\nu) - 1]. \tag{14}$$

Выражение (11) составляет конечную цель предыдущих выкладок и работы в целом. Несложный, хотя и громоздкий анализ показывает, что формула (11) в отличие от (1) не содержит каких-либо особенностей и приводит к значениям $\eta_m \geqslant 0$ (отметим, что $\eta_m \leqslant 1$) при любых $T, T_\nu, \nu \geqslant 0$.[4] Иллюстрацией справедливости этого утверждения служит рисунок, из которого видно, кроме того, что при достаточно больших значениях $T_\nu$ и $\nu$ результаты (1) и (11) совпадают. Подробнее условия применимости приближения (1) обсуждаются в нижеследующем Приложении.

## Приложение

Пусть $T_\nu \ll T$. Тогда, как видно из (13), (14),

$$n_\nu^{\rm in} \gg n_\nu^T \tag{15}$$

для любой фиксированной частоты (в частности, $n_\nu^{\rm in}/n_\nu^T \to T_\nu/T$, если $\nu \to 0$). Заметим, что сама по себе величина $n_\nu^T$ вовсе не обязательно мала (по сравнению с единицей) и, напротив, в зависимости от частоты $n_\nu^T$ может существенно превышать единицу, достигая сколь угодно больших значений при $\nu \to 0$. Покажем тем не менее, что в силу монотонно возрастающего и "плавного" вида функции $f(\xi)$ при любом значении $n_\nu^T$ справедливо приближенное равенство

$$f(n_\nu^{\rm in} + n_\nu^T) = f(n_\nu^{\rm in}), \tag{16}$$

точность $\delta$ которого порядка величны отношения $n_\nu^T/n_\nu^{\rm in}$, т.е. $\delta \ll 1$, если имеет место (15). Действительно, по теореме (Лагранжа) о конечном приращении имеем для любых $n_\nu^{\rm in}$ и $n_\nu^T$

$$f(n_\nu^{\rm in} + n_\nu^T) = f(n_\nu^{\rm in}) + n_\nu^T \frac{df}{d\xi}\bigg|_{\xi = n_\nu^{\rm in} + \theta n_\nu^T},$$

где $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

Получаем отсюда следующую оценку для точности замены (16):

$$\delta \leq \delta_m = \frac{n_\nu^T}{f(n_\nu^{\rm in})} \max_\theta \frac{df}{d\xi}.$$

Поскольку $df/d\xi = \ln(1 + 1/\xi)$, то максимум ее достигается при минимально возможном $\xi$, т.е. при $\theta = 0$, если $\xi = n_\nu^{\rm in} + \theta n_\nu^T$. Таким образом,

$$\delta_m = \frac{n_\nu^T}{f(n_\nu^{\rm in})} \ln\left(1 + \frac{1}{n_\nu^{\rm in}}\right)$$

или

$$\delta_m = \frac{n_\nu^T}{f(n_\nu^T/\beta)} \ln(1 + \beta/n_\nu^T). \tag{17}$$

где $\beta = n_\nu^T/n_\nu^{\rm in}$.

Элементарный анализ функции (17) показывает, что при любом $n_\nu^T \geqslant 0$

$$\delta_m \leqslant \beta,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом,

$$\eta_m = 1 - \frac{1}{n_{h\nu}^{\rm in}} \frac{kT}{h\nu} \left[ f(n_\nu^{\rm in}) - f(n_\nu^T) \right], \tag{18}$$

если $T_\nu \gg T$.

Дальнейшее упрощение формулы (18) сводится к замене

$$f(n_\nu^{\rm in}) - f(n_\nu^T) = f(n_\nu^{\rm in}), \tag{19}$$

справедливость которой при выполнении условия (15) на первый взгляд очевидна, если принять во внимание монотонно возрастающий характер функции $f(\xi)$. Однако для достаточно больших $n_\nu^T$ (и, следовательно, при $n_\nu^{\rm in}$, также существенно превышающих единицу в согласии с (15)) скорость возрастания функции $f(\xi)$ невелика, и поэтому ошибка $\delta_1$, возникающая при замене (19), может оказаться большой, если $n_\nu^T \gg 1$.

В самом деле, зависимость $\delta_1$ от $n_\nu^T$ дается равенством

$$\delta_1 = \frac{f(n_\nu^T)}{f(n_\nu^{\rm in})} = \frac{f(n_\nu^T)}{f(n_\nu^T/\beta)}.$$

Обращаясь к явному виду $f(\xi)$, нетрудно показать, что при $n_\nu^T \lesssim 1$ (т.е. при $h\nu \gtrsim kT$)

$$\delta_1\big|_{h\nu \gtrsim kT} \leqslant \beta\big|_{T_\nu \gg T} \ll 1, \tag{20}$$

тогда как в случае $n_\nu^T \gg 1$ ошибка $\delta_1 \sim 1$ и, следовательно, замена (19) некорректна.

Из (18)–(20) следует, что при $T_\nu \gg T$ и $h\nu \gtrsim kT$ справедливо приближение

$$\eta_m = 1 - \frac{1}{n_\nu^{\rm in}} \frac{kT}{h\nu} f(n_\nu^{\rm in}),$$

которое с точностью до очевидных алгебраических преобразований совпадает с формулой (1).

[4] В частности, $\eta_m \to 1 - (T/T_\nu)\ln(1 + T_\nu/T)$, если $\nu \to 0$, и, как и следовало, $\eta_m \to 0$ при $T_\nu \to 0$.

## Список литературы


[1] *Леонтович М.А.* // УФН. 1974. Т. 114. С. 555–558.
[2] *Гудков Н.Д.* // ЖТФ. 1981. Т. 51. С. 1306–1308.
[3] *Чукова Ю.П.* // ДАН СССР. Т. 300. С. 504–507. Биофизика. 1989. Т. 34. С. 898–900. Журн. физ. хим. 1990. Т. 64. С. 28–33. ДАН СССР. 1990. Т. 311. С. 506–508.
[4] *Планк М.* Теория теплового излучения. М.: ОНТИ, 1935.