01;05

О распределении тока в холловской среде с металлическими включениями

© В.Е. Архинчеев

Бурятский научный центр СО РАН,
670047 Улан-Удэ, Россия

(Поступило в Редакцию 18 августа 1998 г.
В окончательной редакции 12 октября 1999 г.)

Рассмотрена холловская ($\sigma_{xx} = 0$, $\sigma_{xy} = \mathrm{const}$) среда с металлическими включениями. Найдено распределение токов (полей) в такой среде. Показано, что электрическое поле во включениях металлической фазы оказывается равным нулю и поэтому электрический ток обтекает эти влкючения. Вычислены эффективные характеристики среды.

В настоящей работе рассмотрен предельный случай двумерной проводящей среды с включениями другой проводящей фазы, помещенной в перпендикулярное магнитное поле, именно когда проводящая матрица является чисто холловской фазой ($\sigma_{xx} = 0$, $\sigma_{xy} = \mathrm{const}$), а включения — металлическими каплями круглой формы радиуса R. Найдено распределение токов и полей в такой среде. Показано, что электрическое поле в металлических включениях оказывается равным нулю. Это означает, что ток вынужден обтекать металлические включения вдоль границы фаз. Следовательно, наличие вкраплений металлической фазы в холловской матрице не влияет на протекание тока, при этом эффективные характеристики неоднородной среды с металлическими включениями оказываются точно равными значениям характеристик холловской фазы

$$\sigma^e_{xx} = 0, \quad \sigma^e_{xy} = \sigma^{(1)}_{xy}. \tag{1}$$

Для решения задачи воспользуемся двумерным характером задачи и перейдем в плоскость комплексной переменной $z = x + iy$. Введем комплексные аналитические функции электрического поля и тока

$$j(z) = j_x(z) - i j_y(z), \quad E(z) = E_x(z) - iE_y(z), \tag{2}$$

связанных законом Ома в виде [1]

$$j(z) = \frac{\sigma}{1 - i\beta} E(z). \tag{3}$$

Здесь $\beta = \tau eH/mc$ — холловский фактор. Для чисто холловской фазы получим

$$j(z) = i\frac{\sigma}{\beta} E(z).$$

Тогда стандартным граничным условиям

$$j_{1n} = j_{2n}, \quad E_{1t} = E_{2t} \tag{4}$$

в нашем случае можно придать вид

$$\mathrm{Re}\,[t\,j(t)]_1 = \mathrm{Re}\,[t\,j(t)]_2,$$

$$\mathrm{Im}\left[ti\frac{\sigma}{\beta} j(t)\right]_1 = \mathrm{Im}\left[t\frac{1 + i\beta}{\sigma} j(t)\right]_2. \tag{5}$$

Здесь $t = \cos\theta + i\sin\theta$ — текущая координата граничного контура, индекс 1 относится к величинам холловской матрицы, индексом 2 обозначаются величины в металлических включениях. Из условий (3) на границе раздела между холловской фазой и металлом сразу следует, что электрическое поле внутри включений должно равняться нулю

$$E_2(z) = 0, \quad |z| < R. \tag{6}$$

Этот результат можно качественно пояснить следующим образом. Протекание тока в среде должно сопровождаться минимальным выделением джоулева тепла. Холловская фаза бездиссипативна (ток перпендикулярен приложенному полю), поэтому для тока предпочтительнее протекание только по холловской фазе. Однако невозможно предположить иную причину, по которой бы ток не протекал через случайно расположенные включения металлической фазы, кроме обращения поля в нуль в этих включениях.

Этот же результат получается при полном решении задачи о распределении тока в проводящей среде с включениями другой проводимости в перпендикулярном магнитном поле. При этом чисто холловская фаза получается путем предельного перехода

$$\sigma_1 \to \infty, \quad \beta_1 \to \infty, \quad \frac{\sigma_1}{\beta_1} = \mathrm{const}. \tag{7}$$

Из аналитичности функций $j_1(z)$ и $j_2(z)$ следует, что в областях своего определения их можно представить сходящимися степенными рядами

$$j_1(z) = A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots\ , \quad |z| > R,$$

$$j_2(z) = B_0 + B_1 z + B_2 z^2 + \dots\ , \quad |z| < R. \tag{8}$$

Далее необходимо учесть, что на бесконечности поле (ток) однородно, $j_1(\infty) = \langle J \rangle$, а внутри включения ток не должен иметь полюсов и также граничные условия (3), (подробнее см., например, [2]). В интересующем нас предельном случае (6) после необходимых вычислений получим следующие результаты:

$$j_1(z) = \langle J \rangle - \langle \bar{J} \rangle \frac{R^2}{z^2}, \qquad j_2(z) = 0. \tag{9}$$

Здесь $\langle J \rangle$ — средний ток в среде, $\langle \bar{J} \rangle$ — комплексно сопряженный ток. Обсудим полученные формулы (9). Задача о распределении токов (полей) в проводящей среде с включениями другой проводящей фазы является классической [3]. Тем не менее в рассмотренном нами пределе получается несколько парадоксальный результат: ток не может протекать через металлические включения из-за обращения в них электрического поля в нуль. Выталкивание электрического поля из металлической фазы и обтекание холловского тока включений металлической фазы вдоль границы раздела приводят к отрицательному дипольному моменту металлического круга. Здесь наблюдается аналогия со сверхпроводящим кругом во внешнем магнитном поле. Магнитное поле выталкивается из сверхпроводящей фазы и дипольный момент круга в магнитном поле также оказывается отрицательным.

Полученные результаты соответствуют результатам работы [4], где другим способом в рамках подхода Дыхне для двухфазной случайно неоднородной среды были определены эффективные характеристики и получены макроскопические формулы вида (1).

Автор выражает благодарность Ю.П. Емцу за возможность ознакомиться с работой [2].

Список литературы

[1] *Балагуров Б.Я.* // ЖЭТФ. 1981. Т. 81. С. 665.

[2] *Емец Ю.П.* // Электрические характеристики композиционных материалов с регулярной структурой. Киев: Наукова думка, 1986. ЖТФ. 1974. С. 916–921.

[3] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* // Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1987.

[4] *Архинчеев В.Е., Батыев Э.Г.* // Sol. St. Commun. 1989. Vol. 12. P. 1059–1060.