

# О преодолении критической скорости подвижной нагрузкой в упругом волноводе

© С.Н. Гаврилов

Институт проблем машиноведения РАН,  
199178 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 7 декабря 1998 г.)

Исследуются явления, возникающие при преодолении скорости звука нагрузкой, движущейся по струне на деформируемом основании. Предложена форма решения, удобная для качественного анализа волновых процессов. Рассмотрены случаи разгона и торможения нагрузки.

## Введение

В работе исследуются явления, возникающие при преодолении скорости звука нагрузкой, движущейся по струне на упруго-вязком основании (рис. 1). Подвижная нагрузка моделируется дельта-функцией Дирака. Данная задача рассматривалась в работе [1], где построена асимптотика решения при ускорении, стремящемся к нулю. В работе [2] показано, что в момент преодоления критической скорости возникает ярко выраженный волновой фронт, перемещающийся вдоль струны со скоростью звука, а также построена асимптотика решения в окрестности данного фронта для больших времен. В настоящей работе подробно анализируется волновая картина в струне в момент преодоления критической скорости. Некоторые из результатов, полученных в настоящей работе, упомянуты в [1], однако без соответствующего обоснования на языке формул. Предложена форма решения, удобная для анализа сингулярностей в выражении для наклона струны, возникающих в этот момент. Показано, что в рамках данной модели для преодоления скорости звука сосредоточенной нагрузкой при разгоне необходима бесконечная сила тяги, несмотря на наличие диссипации в деформируемом основании. Исследованы случаи разгона и торможения нагрузки. Рассмотрена распределенная нагрузка.

## Постановка задачи

Уравнение движения струны и начальные условия имеют следующий вид:

$$u'' - \frac{1}{c^2} \ddot{u} - 2\gamma \dot{u} - ku = \chi(t) \delta(x - l(t)), \quad (1)$$

$$u(x, t) \Big|_{t=0} = 0, \quad \dot{u}(x, t) \Big|_{t=0} = 0. \quad (2)$$

Здесь  $u(x, t)$  — перемещение точки  $x$  на струне в момент  $t$ ;  $c$  — скорость звука;  $k$  и  $\gamma$  — коэффициенты упругости и вязкости деформируемого основания соответственно;  $l(t)$  — координата нагрузки;  $\chi(t)$  — интенсивность нагрузки. Будем предполагать, что  $\chi(t)$  достаточно гладкая функция. Рассматривается задача Коши: предполагается, что  $u \equiv 0$ , если  $|x|$  достаточно велик для данного  $t < \infty$ .

## Общее представление для решения

Нетрудно получить общую формулу для решения задачи (1), (2). Применим преобразование Фурье по координате  $x$  к (1); решение полученного дифференциального уравнения запишем через интеграл Дюамеля, после чего применим обратное преобразование Фурье. Заменяя порядок интегрирования в полученном выражении и вычислив внутренний интеграл, имеем

$$u = -\frac{c}{2} \int_0^t \chi(\tau) e^{-c^2 \gamma (t-\tau)} \theta \left( c - \frac{|x - l(\tau)|}{t - \tau} \right) \times J_0 \left( \sqrt{k_* (c^2 (t - \tau)^2 - (x - l(\tau))^2)} \right) d\tau, \quad (3)$$

$$k_* = k - c^2 \gamma^2, \quad (4)$$

где  $\theta(t)$  — функция Хевисайда.

Мы предполагаем, что вязкость  $\gamma$  достаточно мала, так что  $k_* > 0$ . Формула (3) справедлива для произвольных функций  $l(t)$  и  $\chi(t)$ . Она была получена в работе [1] для случая движения с постоянным ускорением. Вычислим наклон струны  $u'$  исходя из (3)

$$u' = \Psi_1 + \Psi_2. \quad (5)$$

При ограниченных  $x$  и  $t$  функция  $\Psi_2$  непрерывна и ограничена; она возникает при дифференцировании гладких подынтегральных функций в (3). Для  $\Psi_1$  спра-

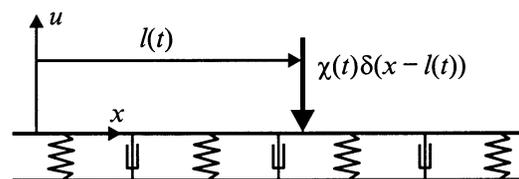


Рис. 1. Струна на деформируемом основании.

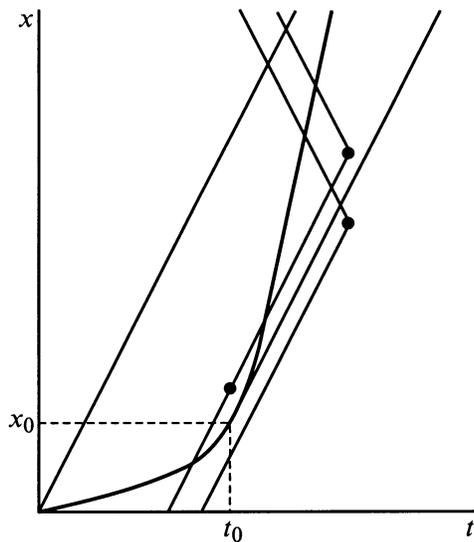


Рис. 2. К определению момента  $t'$ .

ведливо представление ( $v = \dot{l}$ )

$$\Psi_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \chi(t'_i) e^{-c^2 \gamma (t-t'_i)} \times \left( \frac{\theta(x-l(t'_i))}{|1-v(t'_i)/c|} - \frac{\theta(l(t'_i)-x)}{|1+v(t'_i)/c|} \right), \quad (6)$$

где моменты времени  $t'_i$  суть решения уравнения

$$t' + \frac{|x-l(t')|}{c} = t. \quad (7)$$

Функция  $\Psi_1$  возникает при дифференцировании функции Хевисайда в (3). В случае отсутствия деформируемого основания  $u' = \Psi_1$ . В общем случае представление (5)–(7) удобно тем, что все сингулярности в  $u'$  определяются функцией  $\Psi_1$ . Решение задачи в форме (5)–(7) напоминает потенциалы Лиенара–Вихерта в электродинамике.

Определение момента времени  $t'$  можно проиллюстрировать при помощи рис. 2. Жирной линией показано движение нагрузки. Для вычисления моментов  $t'$ , соответствующих данной точке плоскости, необходимо провести через нее два луча с наклоном  $c$  и  $-c$ . Momentами  $t'$  будут абсциссы точек пересечения лучей с кривой движения нагрузки. Легко видеть, что если движение происходит со скоростью, меньшей  $c$ , то такая точка пересечения будет единственной; при наличии участка сверхзвукового движения момент времени  $t'$  может быть не единственным; при этом либо имеется конечное число  $t'_i$ , либо они образуют дискретный спектр. Решения уравнения (7) могут образовывать непрерывный спектр только при наличии интервала времени, где движение происходит со скоростью  $c$ , однако в этом случае решение, как известно [3], разрывно и формула (5) бессмысленна.

## Переход через критическую скорость

Если подвижная нагрузка движется вдоль струны со скоростью звука в течение некоторого промежутка времени, то решение соответствующей задачи будет разрывным [3]. Можно доказать обратное: существование такого промежутка времени — необходимое условие разрывности решения. Это легко сделать, воспользовавшись представлением (3) для решения и теоремой о непрерывности интеграла по параметру. Нас интересуют волновые процессы в струне, возникающие при мгновенном преодолении критической скорости. Исследуем их численно, пользуясь формулой (3). Рассмотрим сначала случай разгона нагрузки. Относительно закона движения нагрузки будем предполагать лишь, что  $\dot{l}(t_0) = a \neq 0$  и  $\dot{l} < c$  для  $t < t_0$ , где  $t_0$  — момент преодоления критической скорости. Оказывается, что в момент  $t_0$  "яма" под нагрузкой начинает отставать от нее (рис. 3) ( $\xi$  — координата в подвижной системе координат, перемещающейся вместе с нагрузкой;  $t_1 - t_0$  — малый промежуток времени). В дальнейшем эта "яма" превращается в ярко выраженный волновой фронт, перемещающийся со скоростью  $c$  вдоль струны. Асимптотика решения в окрестности этого фронта получена в работе [2].

Проанализируем теперь переход через критическую скорость при помощи формул (5)–(7). Рассмотрим поведение струны при  $t = t_0$ ,  $x = x_0 + 0$ , где  $x_0 = l(t_0)$ . Легко видеть, воспользовавшись рис. 2, что первый член в формуле (6) дает при этом  $u' \rightarrow +\infty$ . Далее, мы будем иметь  $u' \rightarrow +\infty$  при  $x = x_0 + ct + 0$  для  $t > t_0$ , что соответствует значению на фронте, порожденному в момент преодоления скорости звука. Для  $x = x_0 - 0$  при  $t = t_0$  будем иметь  $u' = O(1)$ . Таким образом, мы получили, что в момент, когда скорость нагрузки становится равной критической, наклон струны перед ней становится вертикальным, причем эта особенность перемещается по струне перед нагрузкой со скоростью  $c$ ; наклон струны позади нагрузки остается конечным. Возникает вопрос, какую силу тяги необходимо приложить к нагрузке, чтобы преодолеть критическую скорость. В работе [4] при помощи модели, учитывающей инерционность нагрузки, получена формула для продольной силы сопротивления  $\mathcal{F}$ , действующей на нагрузку при

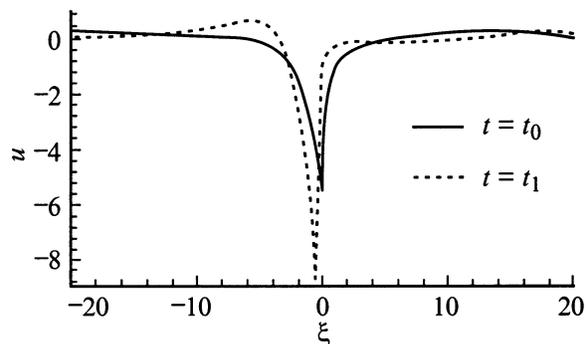


Рис. 3. "Яма" под нагрузкой.

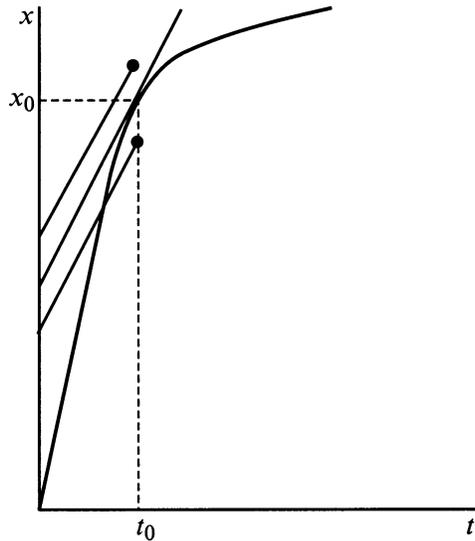


Рис. 4. Переход через критическую скорость при торможении.

ее движении (см. также [5]),

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= -\frac{\rho}{2}(c^2 - v^2)(u'^2) \Big|_{\xi=-0}^{\xi=+0} \\ &= -\frac{T\chi(t)}{2} (u' \Big|_{\xi=-0} + u' \Big|_{\xi=+0}). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $\rho$  — линейная плотность струны,  $T$  — сила натяжения невозмущенной струны. Из (8) сразу получаем, что  $\mathcal{F} = -\infty$  при  $t \rightarrow t_0 - 0$ . Таким образом, для преодоления критической скорости сосредоточенной нагрузкой необходима бесконечно большая сила тяги. Отметим, что результат этот получен при наличии вязкости в деформируемом основании.

Рассмотрим теперь случай перехода через критическую скорость при торможении (рис. 4). В этом случае аналогично можно показать, что  $u' \rightarrow \infty$  при  $t = t_0 - 0$ ,  $x = x_0 - 0$ , а при  $x = x_0 + 0$  имеем  $u' = O(1)$ . Соответственно, опять получаем, что  $\mathcal{F} \rightarrow -\infty$ , однако в этом случае бесконечная сила со стороны струны способствует переходу через критическую скорость.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что весьма полезным будет рассмотрение задачи в нелинейной постановке. Существенные различия здесь будут связаны с наличием связи между поперечными и продольными колебаниями. Явления, возникающие при преодолении критической скорости, должны приводить к существенным изменениям силы натяжения струны на участке перед нагрузкой, т.е. к существенным деформациям струны в продольном направлении, что не учитывается при рассмотрении задачи в линейной постановке.

## Распределенная нагрузка

Рассмотрим теперь распределенную нагрузку. Пусть при  $t = 0$  ее плотность  $\chi_0(x)$ , для определенности пусть  $\chi_0(x) > 0$  при  $x \in [-\alpha; 0]$  и  $\chi_0(x) = 0$  при

$x \notin [-\alpha; 0]$ . Плотность подвижной нагрузки будет  $\chi(x, t) = \chi_0(x - l(t))$ . Для  $u'$  справедливо представление

$$u' = \int_{-\alpha}^0 \chi_0(\sigma) (\Psi_1(x - \sigma, t) + \Psi_2(x - \sigma, t)) d\sigma. \quad (9)$$

Исследуем переход через критическую скорость при разгоне. Вычислим сингулярную часть  $u'$  для  $t = t_0$ ,  $x = x_0 + 0$ ; она дается интегралом

$$\frac{1}{2} \int_{-\alpha}^0 \frac{\chi_0(\sigma) d\sigma}{1 - v(t'(x_0 - \sigma, t_0))/c}. \quad (10)$$

Разложив знаменатель подынтегральной функции (используя уравнение (7)) по степеням  $\sigma$ , легко получить, что характер сингулярности определяется интегралом

$$\frac{c}{2\sqrt{2}} \int_{-\alpha}^0 \frac{\chi_0(\sigma) d\sigma}{\sqrt{|\sigma|a}}, \quad (11)$$

т.е. сингулярность отсутствует. Этот факт может быть пояснен при помощи рис. 2. Физической причиной возникновения сингулярностей при переходе через критическую скорость является "накопление" возмущений в окрестности нагрузки вследствие равенства скоростей движения нагрузки и распространения волны. Для того чтобы определить вклад в интеграл (9) участка нагрузки, имеющего при  $t = t_0$ , координату  $x_0 - \sigma$ , следует найти точку пересечения луча с наклоном  $c$ , проведенного из точки  $(t_0; x_0 + \sigma)$ , с графиком  $l(t)$ . Но  $v(t_0) = c$ , поэтому расстояние до точки пересечения есть величина порядка  $O(\sqrt{\sigma})$  и соответственно  $v(t') - c = O(\sqrt{\sigma})$ . На физическом языке можно сказать: волны от дальнего края нагрузки приходят при  $t = t_0$  с большим опозданием (задержка есть величина  $O(\sqrt{\sigma})$ ), поэтому возмущение, приносимое ими, недостаточно для образования сингулярности.

Автор глубоко благодарен П.А. Жилину и Д.А. Индейцеву за постоянное внимание к работе и ценные советы.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 99-01-00693) и правительства Санкт-Петербурга.

## Список литературы

- [1] Каплунов Ю.Д., Муравский Г.Б. // МТТ. 1986. № 1. С. 155–160.
- [2] Gavrilov S. // J. Sound and Vibration. 1999. Vol. 222(3). P. 345–361.
- [3] Слепян Л.И. Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 374 с.
- [4] Весницкий А.И., Каплан Л.Э., Уткин Г.А. // ПММ. 1983. Т. 47. № 5. С. 863–866.
- [5] Андрианов В.Л. // ПММ. 1993. Т. 57. № 2. С. 156–160.