

01;03

## О некоторых закономерностях поляризации и диспергирования капли в электростатическом поле

© С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
150000 Ярославль, Россия

(Поступило в Редакцию 16 февраля 1999 г.)

Проведен анализ закономерностей распределения вкладов от различных взаимодействий в полную энергию поляризации проводника в однородном электростатическом поле. Показано, что в замкнутой системе возможны лишь такие самопроизвольные изменения формы жидкого проводника со свободной поверхностью во внешнем электростатическом поле, при которых его поляризационный дипольный момент увеличивается. На примере капли проводящей жидкости прослежены закономерности изменения собственной энергии проводника при реализации ее неустойчивости по отношению к поляризационному заряду. Получены аналитические выражения для размеров и зарядов эмиттируемых при неустойчивости капелек.

Несмотря на многочисленные теоретические и экспериментальные исследования закономерностей поляризации проводников во внешних электростатических полях, некоторые касающиеся этого явления вопросы до сих пор изучены слабо. Это связано с известной сложностью решения электростатических задач и идеальностью физических моделей, используемых при теоретическом описании электростатических явлений [1–5]. Достаточно вспомнить хорошо известную задачу о связи поверхностной плотности электрического заряда на проводнике с кривизной его поверхности и идеализации "точечного" заряда, линейного и поверхностного распределений заряда, основанных на пренебрежении собственными размерами зарядов [4,6,7]. Слабо исследована, в частности, и эволюция формы капли электропроводной жидкости во внешнем однородном электростатическом поле  $\mathbf{E}_0$ , теоретическое изучение которой основано на феномене поляризации проводника [8].

1. Выражение для энергии поляризации незаряженно проводника в однородном электростатическом поле напряженности  $\mathbf{E}_0$  легко выводится [1,2] и имеет вид

$$U = -\frac{1}{2} \mathbf{p} \mathbf{E}_0, \quad (1)$$

$\mathbf{p}$  — дипольный момент проводника в поле  $\mathbf{E}_0$ .

С другой стороны, известно [1–5], что энергия  $U_d$  произвольного жесткого диполя  $\mathbf{p}$  в поле  $\mathbf{E}_0$  определена выражением

$$U_d = -\mathbf{p} \mathbf{E}_0. \quad (2)$$

Различие в выражениях (1) и (2) обусловлено тем, что (2) получено в пренебрежении постоянной для модели "жесткого" диполя энергией взаимодействия зарядов диполя друг с другом  $U_*$  и в пренебрежении собственной энергией  $2U_0$  обоих зарядов, которая также постоянна для диполя, построенного как из точечных зарядов, так и из зарядов, распределенных в малых конечных объемах (напомним лишь, что собственная энергия точечных зарядов принимается бесконечной). Пренебрежение постоянными слагаемыми энергии при

выводе соотношения (2) основано на том, что на практике наблюдаются лишь изменения энергии, а не их абсолютные величины [5]. Когда же приходится иметь дело с поляризованным проводником, то и энергия взаимодействия зарядов поляризационного диполя друг с другом  $U_*$ , и собственная энергия  $2U_0$  обоих зарядов уже не могут считаться постоянными, поскольку зависят от величины внешнего поля  $\mathbf{E}_0$ , а для конечных объемов электропроводной жидкости, ограниченных свободной равновесной поверхностью, зависят и от формы поверхности.

Из (1) и (2) несложно видеть, что собственная энергия поляризованного в поле  $\mathbf{E}_0$  проводника  $U_{gd} \equiv U_* + 2U_0$  определится выражением

$$U_{gd} \equiv U_* + 2U_0 = U - U_d = \frac{1}{2} \mathbf{p} \mathbf{E}_0. \quad (3)$$

Энергия взаимодействия между собой зарядов диполя  $U_*$  отрицательна, поскольку заряды диполя имеют противоположные знаки. Собственная энергия  $2U_0$  зарядов диполя всегда положительна и по абсолютной величине удовлетворяет условию [5]

$$2U_0 \geq |U_*|. \quad (4)$$

Ясно, что знак равенства в (4) для рассматриваемой системы поляризационных зарядов стоять не может, так как это противоречило бы соотношению (3).

2. Если дипольный момент проводника известен, то на основе соотношений (1) и (3) легко найти и энергию поляризации проводника  $U$ , и собственную энергию  $U_{gd}$ . Прделаем это для проводника сферической формы. Поверхностная плотность поляризационного заряда  $\varkappa = \varkappa(\Theta)$  на сфере известна [1]

$$\varkappa(\Theta) = \frac{3}{4\pi} E_0 \cos \Theta, \quad (5)$$

где угол  $\Theta$  отсчитывается от направления поля  $\mathbf{E}_0$ .

Следовательно, можно определить характеристики поляризационного диполя — величину составляющих его

зарядов  $q$  и расстояние между "центрами тяжести" зарядов  $l$ . Для нахождения  $q$  достаточно проинтегрировать (5) по половинке сферы при изменении угла  $\Theta$  в диапазоне  $0 \leq \Theta \leq \pi/2$ . В итоге получится

$$q = \frac{3}{4} E_0 R^2. \quad (6)$$

Если умножить (5) на  $2z \equiv 2R \cos \Theta$  и опять проинтегрировать по углу  $\Theta$ , то получим дипольный момент поляризованной сферы [1]

$$\mathbf{p} = R^3 \mathbf{E}_0. \quad (7)$$

Разделив (7) на (6), легко найти длину диполя  $l$

$$l = \frac{4R}{3}. \quad (8)$$

Следовательно, энергия  $U$  проводящей сферы, поляризованной в поле  $\mathbf{E}_0$ , и собственная энергия зарядов поляризованного диполя  $U_{gd}$  определяются соотношением

$$U = -U_{gd} = -\frac{1}{2} R^3 E_0^2.$$

3. Посмотрим, как деформация формы проводника сказывается на энергии  $U$  его поляризации и на собственной энергии  $U_{gd}$  поляризованного диполя в поле  $\mathbf{E}_0$ . Говоря о деформации проводника, будем подразумевать деформации, вызванные действием самого поля  $\mathbf{E}_0$ , имея в виду приложения рассматриваемой задачи к проблеме устойчивости свободной поверхности проводящей жидкости по отношению к собственному и поляризованному зарядам (см., например, [8–12] и указанную там литературу). В частности, известно, что равновесная форма капли проводящей жидкости в поле  $\mathbf{E}_0$  близка к вытянутому сфероиду [1] (совпадает с ним в линейном по квадрату эксцентриситета  $e^2$  приближении [8,13]). Следовательно, в нижеследующем рассмотрении будем принимать, что первоначально сферическая капля проводящей жидкости в постоянном однородном электрическом поле  $\mathbf{E}_0$  будет претерпевать деформацию к вытянутому сфероиду, эксцентриситет которого определяется величиной напряженности однородного внешнего электростатического поля  $E_0$ , коэффициентом поверхностного натяжения жидкости  $\sigma$  и радиусом исходной сферической капли. В линейном приближении по  $e^2$  связь квадрата эксцентриситета равновесной сфероидальной формы с упомянутыми параметрами определяется выражением [7,13]

$$e^2 \cong \frac{9}{16\pi} \frac{R E_0^2}{\sigma}. \quad (9)$$

Это выражение для дипольного момента сфероида справедливо лишь в линейном по  $e^2$  приближении. При произвольных значениях  $e^2$  поляризованный дипольный момент проводящей сфероидальной капли в поле  $\mathbf{E}_0$  имеет вид [1]

$$\mathbf{p} = 3R^3 \frac{e^3}{(1 - e^2)(\operatorname{arth} e - e)} \mathbf{E}_0.$$

Уравнение поверхности сфероида в сферических координатах с началом в его центре имеет вид

$$r(\Theta) = R(1 - e^2)^{1/6} (1 - e^2 \cos^2 \Theta)^{-1/2} \cong R \left[ 1 - \frac{e^2}{6} (1 - 3 \cos^2 \Theta) \right]. \quad (10)$$

Поверхностная плотность поляризационного заряда на вытянутом сфероиде в линейном по квадрату эксцентриситета приближении определяется выражением [1,13]

$$\varkappa(\Theta) = \frac{3E_0}{4\pi} \cos \Theta \left[ 1 - e^2 (0.6 - \cos^2 \Theta) \right]. \quad (11)$$

Проинтегрируем (11) по половинке сфероида, уравнение свободной поверхности которого определяется уравнением (10), при изменении угла  $\Theta$  в диапазоне  $0 \leq \Theta \leq \pi/2$  и найдем величину поляризованного заряда

$$q = \frac{3}{4} E_0 R^2 \left( 1 + \frac{e^2}{15} \right). \quad (12)$$

Чтобы получить величину дипольного момента поляризованного сфероида, умножим (11) на  $2r(\Theta) \cos \Theta$ , а получившееся выражение проинтегрируем по углу  $\Theta$  от 0 до  $\pi/2$ . В итоге получим

$$\mathbf{p} = R^3 \mathbf{E}_0 \left( 1 + \frac{2e^2}{5} \right). \quad (13)$$

Разделив (12) на (13), найдем длину диполя  $l$

$$l = \frac{4R}{3} \left( 1 + \frac{e^2}{3} \right). \quad (14)$$

Если сказанное в этом разделе относить к равновесной в  $\mathbf{E}_0$  сфероидальной форме проводящей капли, то следует помнить, что в выражениях (12)–(14) квадрат эксцентриситета связан с напряженностью внешнего поля соотношением (9).

Сравнивая соотношения (6)–(8) и (12)–(14), несложно видеть, что деформация капли в поле  $\mathbf{E}_0$  от исходной сферической формы к вытянутой сфероидальной приводит к увеличению всех характеристик поляризованного диполя: заряда, длины, момента. В связи с тем, что речь идет о равновесной сфероидальной форме капли и переход от исходной сферической формы к сфероидальной происходит уже при бесконечно малой величине напряженности поля  $\mathbf{E}_0$ , следовательно, такой переход сопровождается уменьшением полной потенциальной энергии замкнутой системы, включающей в себя каплю, однородное внешнее поле  $\mathbf{E}_0$  и создающие это поле бесконечно удаленные заряды.

То обстоятельство, что мы имеем дело с самопроизвольными деформациями капли в замкнутой системе, накладывает определенные ограничения на вид допустимых деформаций. В самом деле, в замкнутой системе могут реализовываться самопроизвольно лишь деформации, сопровождающиеся уменьшением полной потенциальной энергии системы. В рассматриваемой ситуации

проводящей капли в однородном внешнем электростатическом поле допустимы лишь деформации, при которых дипольный момент капли увеличивается, а электрическая часть полной потенциальной энергии (описываемая соотношением (1)) уменьшается, поскольку энергия сил поверхностного натяжения при любых деформациях первоначально сферической капли только увеличивается пропорционально увеличению площади ее поверхности. Собственная энергия поляризационного диполя  $U_{gd}$  при таких деформациях будет, согласно (3), увеличиваться, а энергия взаимодействия между собой поляризационных зарядов  $U_*$  уменьшаться, так как, согласно (12) и (14), при вытягивании капли заряд  $q$  увеличивается существенно медленнее увеличения длины диполя  $l$ . Увеличение  $U_{gd}$  при одновременном уменьшении  $U_*$  может происходить только за счет существенного увеличения собственной электростатической энергии поляризационных зарядов  $2U_0$  (см. (3), (4)).

Из сказанного выше, в частности, следует, что самопроизвольные деформации капли в поле  $\mathbf{E}_0$  к вытянутой сфероидальной форме приводят к уменьшению полной потенциальной энергии системы, а деформации к сплюснутой сфероидальной форме — к ее увеличению. Отметим, что характеристики поляризационного диполя для сплюснутого сфероида, ось симметрии которого параллельна  $\mathbf{E}_0$ , отличаются от (11)–(14) только знаком при  $e^2$ . В задаче о расчете формы пузыря в жидкости во внешнем электростатическом поле будет существовать обратная зависимость: деформация в  $\mathbf{E}_0$  пузыря к сплюснутому сфероиду будет сопровождаться уменьшением энергии поляризации, поскольку основной вклад в энергию поляризации внесет поляризация жидкости, окружающей пузырь. Впрочем, в задаче о пузыре в зависимости от поверхностной подвижности зарядов на стенках пузыря и электропроводности и диэлектрической проницаемости окружающей жидкости (в зависимости от соотношения вкладов в полное изменение потенциальной энергии от поляризации окружающей жидкости и самого пузыря за счет перераспределения свободного заряда на его стенках) могут реализовываться различные типы деформации: сплюснутый сфероид, сфера, вытянутый сфероид, как это и отмечалось ранее [14,15].

Покажем, что и дальнейшая эволюция неустойчивости проводящей капли во внешнем однородном электростатическом поле ведет к уменьшению потенциальной энергии системы.

4. Пусть капля радиуса  $R$  несжимаемой идеально проводящей жидкости с коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$  помещена во внешнее однородное электростатическое поле напряженностью  $\mathbf{E}_0$ , в котором она принимает сфероидальную форму с эксцентриситетом, определенным соотношением (9). По мере увеличения напряженности поля эксцентриситет капли, а также поверхностная плотность индуцированного заряда на ее вершинах будут увеличиваться. При некотором критическом значении  $E_0$  (когда  $E_0 \geq (2.6\sigma/R)^{1/2}$  [7,16]) капля станет неустойчивой по отношению к виртуальному уве-

личению эксцентриситета и начнет быстро вытягиваться (быстрее, чем по экспоненциальному закону [17]). Когда давление электрического поля индуцированного заряда на вершинах капли (растущее с увеличением  $e^2$ ; см. раздел 3) превысит давление капиллярных сил, с обеих вершин капли начнется сброс заряда путем эмиссии высокодисперсных сильно заряженных капелек, а рост эксцентриситета капли прекратится. Величина квадрата эксцентриситета родительской капли  $e^2$  в этот момент неизвестна, поскольку выражение (9) справедливо лишь для равновесных форм.

Отметим, что эмиссия дочерних капелек происходит с вершин эмиссионных выступов, образующихся на вершинах неустойчивой капли за счет суперпозиции теряющих устойчивость при увеличении поверхностной плотности индуцированного заряда высоких мод капиллярных колебаний капли. Собственно эмиссия дочерних капелек — суть отрыв вершин эмиссионных выступов полем вместе со скопившимся на них поляризационным зарядом. Образование же эмиссионных выступов в соответствии с вышесказанным приводит к увеличению дипольного момента капли и к уменьшению полной потенциальной энергии системы.

Предполагая наличие осевой симметрии, а также симметрии относительно экваториальной плоскости, будем считать, что капельки, одновременно отрывающиеся с противоположных вершин родительской капли, имеют одинаковые геометрические размеры, а их заряды равны по величине, но противоположны по знаку. Можно принять, что две одновременно эмиттированные дочерние капельки образуют диполь  $\mathbf{p}$  с жесткой связью, величина которого растет при разлетании капелек. Процесс эмиссии дочерних капелек, таким образом, опять же приводит к увеличению дипольного момента и к уменьшению потенциальной энергии всей системы. Собственная электростатическая энергия системы при эмиссии капелек будет только увеличиваться.

Найдем изменение потенциальной энергии системы при одновременной эмиссии с противоположных вершин родительской капли (с эксцентриситетом  $e$  и большей полуосью  $a$ ) пары одинаковых, но разноименно заряженных дочерних капелек. Влиянием процессов испарения и конденсации будем пренебрегать, а температуру системы будем считать неизменной. Конкретный механизм эмиссии капелек рассматривать не будем (типичные модели можно найти, например, в [11,18]), а положим, что дочерние капельки виртуально образовались на расстоянии порядка характерного линейного размера дочерней капельки (радиуса равновеликой сферической капельки  $r$ ) от вершины родительской капли. Таким образом, расстояние между центрами одновременно эмиттированных дочерних капелек  $l$  определится выражением  $l \approx 2(a+r)$ . Если заряд дочерней капельки обозначить  $q$ , то две разноименно заряженные капельки образуют диполь величины  $p = ql$ .

Выражение для потенциальной энергии родительской капли непосредственно перед началом сброса поверх-

ностного заряда легко выписывается

$$U_1 = 4\pi\sigma R^2 A(e) - \frac{1}{2} R^3 C(e) E_0^2,$$

$$A(e) = \frac{1}{2} (1 - e^2)^{-1/6} \left[ (1 - e^3)^{1/2} + \frac{1}{2} \arcsin e \right],$$

$$C(e) = \frac{3e^3}{(1 - e^2)(\operatorname{arth} e - e)}.$$

Первое слагаемое определяет энергию сил поверхностного натяжения, а второе — энергию поляризации проводящей капли в поле  $\mathbf{E}_0$ .

Потенциальная энергия родительской капли и пары эмиттированных дочерних капелек, образующих диполь  $p$ , имеет вид

$$U_2 = 4\pi\sigma R^2 A(e) \left[ 1 - 2 - \frac{r^3}{R^3} \right]^{2/3} + 8\pi\sigma r^2 A(e_0) - \frac{1}{2} (R^3 - 2r^3) C(e) E_0^2 - \mathbf{p}(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_*) + \frac{2q^2}{2r} B(e_0) - 2\frac{1}{2} r^3 C(e_0) (E_0 + E_*)^2,$$

$$B(e_0) = \frac{1}{e_0} (1 - e_0^2)^{1/3} \operatorname{arth} e_0. \quad (15)$$

Здесь  $E_*$  — напряженность поля индуцированного заряда родительской капли,  $e_0$  — эксцентриситет дочерней капельки. Первое слагаемое в (15) определяет энергию сил поверхностного натяжения родительской капли с учетом уменьшения площади ее поверхности; второе — энергию сил поверхностного натяжения двух дочерних капелек; третье — энергию поляризации остатка родительской капли в поле  $\mathbf{E}_0$ ; четвертое — энергию диполя, составленного из дочерних капелек, в суммарном электрическом поле у вершин родительской капли, которое на характерных пространственных масштабах порядка объемов дочерних капелек принимаем квазиоднородным; пятое — собственную электростатическую энергию дочерних капелек; шестое — энергию поляризации дочерних капелек в суммарном электрическом поле у вершин родительской капли.

При записи выражения (15) мы не учли малые энергетические вклады взаимодействия собственных поляризационных зарядов дочерних капелек друг с другом и взаимодействия зарядов эмиттированных капелек с их изображениями в родительской капле, и в этом смысле (15) является приближенным. Чтобы упорядочить наши представления о соотношении величин различных слагаемых в (15) в соответствии с результатами экспериментальных и теоретических работ (см., например, [8,11,19] и указанную там литературу), за малые первого порядка примем заряд дочерней капельки  $q$  и ее характерный линейный размер, в качестве которого примем радиус равновеликой сферической капельки  $r$ . Ниже следующие расчеты проведем в квадратичном приближении по малым параметрам, что позволит несколько

упростить выражение (15), в котором можно опустить последнее слагаемое, а в первом и третьем слагаемых опустить компоненты третьего порядка малости.

Изменение потенциальной энергии  $\Delta U$  системы при эмиссии пары дочерних капелек примет вид

$$\Delta U = -\mathbf{p}(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_*) + \frac{q^2}{r} B(e_0) + 8\pi r^2 \sigma A(e_0).$$

Эксцентриситет дочерней капельки  $e_0$  связан с ее характерным линейным размером  $r$  и напряженностью поля  $(E_0 + E_*)$  соотношением типа (9) [13]

$$e_0^2 \approx 9w^2 X (1 + W^2) T^2(e, \nu),$$

$$T(e, \nu) \equiv \left\{ 1 - \left[ \operatorname{arth} \frac{e}{\nu} - \frac{e\nu}{\nu^2 - e^2} \right] (\operatorname{arth} e - e)^{-1} \right\},$$

$$W^2 \equiv \frac{q^2}{16\pi\sigma r^3}, \quad w^2 \equiv \frac{E_0^2 R}{16\pi\sigma}, \quad X \equiv \frac{r}{R},$$

$$\nu = \left( 1 + \frac{\xi}{a^2} \right)^{1/2}. \quad (9a)$$

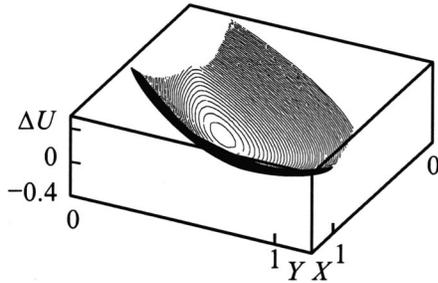
Здесь  $W^2$  — параметр Рэля, характеризующий устойчивость заряженной капли проводящей жидкости по отношению к собственному заряду: капля устойчива при  $W^2 < 1$  и неустойчива при  $W \geq 1$  [8,11,18]; параметр  $w^2$  характеризует устойчивость родительской капли по отношению к поляризационному заряду, капля претерпевает неустойчивость при  $w^2 > 2.6/16\pi$  [16,18];  $\xi$  — сфероидальная координата положения центра дочерней капельки;  $\nu$  — расстояние между центрами дочерней и родительской капелек, обезразмеренное на большую полуось  $a$  сфероидальной родительской капли  $a = R(1 - e^2)^{-1/3}$ . Длина диполя  $l$  связана с безразмерной координатой  $\nu$  простым соотношением

$$l = 2\nu a \equiv 2\nu R (1 - e^2)^{-1/3}.$$

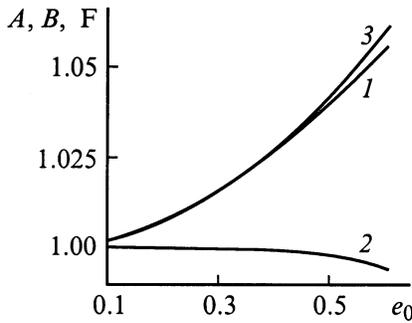
При записи (9a) учтено, что напряженность поля у вершин родительской капли на оси симметрии системы, там, где виртуально образуются (мы отвлекаемся от конкретного механизма эмиссии дочерних капелек) дочерние капельки, определяется известным выражением [1,18]

$$\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_* = \mathbf{E}_0 T(e, \nu).$$

Из рис. 1, где приведена зависимость изменения энергии системы  $\Delta U$ , обезразмеренной на  $8\pi R^2 \sigma$ , от безразмерного радиуса  $X$  и безразмерного заряда капелек  $Y \equiv q/E_0 R^2$  при  $W = \text{const}$ ,  $w = \text{const}$ ,  $\nu = \text{const}$ , несложно видеть, что функция  $\Delta U = \Delta U(X, Y)$  имеет минимум. С физической точки зрения наличие минимума на зависимости  $\Delta U = \Delta U(r, q)$  означает, что в силу принципа минимальности скорости рассеяния энергии в неравновесных процессах (принцип Онзагера) изменение энергии системы при сбросе неустойчивой каплей избыточного заряда экстремально [20]. В малой



**Рис. 1.** Зависимость безразмерного изменения энергии системы при эмиссии двух дочерних капелек от безразмерных радиуса  $X$  и заряда  $Y$  дочерних капелек при  $e = 0.85$ ,  $w^2 = 0.05$ ,  $\nu = 1.32$ .



**Рис. 2.** Зависимости от эксцентриситета дочерней капельки  $e_0$  коэффициентов  $A$ ,  $B$  и  $F$ .

окрестности минимума зависимости  $\Delta U = \Delta U(r, q)$  должны выполняться соотношения

$$\frac{\partial(\Delta U)}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial(\Delta U)}{\partial q} = 0.$$

Эти условия приведут к однородной системе нелинейных алгебраических уравнений для определения заряда  $q$  и радиуса  $r$  дочерних капелек в момент их отрыва от родительской капли

$$-\frac{q^2}{r^2}B(e_0) + 16\pi\sigma rA(e_0) = 0, \quad (16)$$

$$-l(E_0 + E_*) + \frac{2q}{r}B(e_0) = 0. \quad (17)$$

При анализе системы (16), (17) следует помнить, что характерный линейный размер  $r$  и заряд дочерней капельки  $q$ , а также напряженность поля в окрестности эмиттированных капелек ( $E_0 + E_*$ ) являются функциями расстояния  $\nu$  (или, что то же самое, длины диполя  $l$ ). Поэтому для замыкания системы уравнений к (16), (17) необходимо добавить еще одно уравнение, связывающее  $e$ ,  $q$  и  $\nu$ . В качестве такого уравнения возьмем условие баланса сил в перетяжке, связывающей отрывающуюся дочернюю капельку с родительской, в момент разрыва

перетяжки [19]

$$2\pi r_*\sigma = q(E_0 + E_*), \quad (18)$$

где  $r_*$  — радиус перетяжки в месте разрыва.

5. Система уравнений (16)–(18) достаточно громоздка и должна анализироваться численно. Однако определенную полезную информацию о феномене сброса неустойчивой каплей избыточного заряда можно получить и без решения системы (16)–(18) на основе общего ее анализа. Из (16) при делении первого слагаемого на второе получим

$$W^2 \equiv \frac{q^2}{16\pi\sigma r^3} = \frac{A(e_0)}{B(e_0)}. \quad (16a)$$

Из рис. 2, где кривыми 1–3 приведены зависимости функций  $A = A(e_0)$ ,  $B = B(e_0)$  и  $F = F(e_0) \equiv A(e_0)/B(e_0)$ , видно, что для всех дочерних капелек  $W^2 > 1$  (отметим, что расчетная величина  $e_0 \approx 0.4$ ). Таким образом, дочерние капельки, эмиттируемые неустойчивой по отношению к поляризационному заряду родительской каплей, в свою очередь неустойчивы по отношению к собственному заряду и будут распадаться. Распад каплей, не устойчивых по отношению к собственному заряду в зависимости от собственного размера капли и вязкости жидкости, может идти по двум каналам: либо на две части сравнимых размеров, либо путем эмиссии большого количества на два порядка более мелких сильно заряженных капелек [8,11,18,21].

Соотношение (16a) также указывает на разные порядки малости заряда  $q$  и размера  $r$  дочерней капельки. Из (16a) следует, что при варьировании  $r$  заряд  $q$  изменяется по закону  $q \sim r^{3/2}$ . Это обстоятельство, в частности, означает, что при строгом численном анализе в выражении для изменения энергии системы при эмиссии пары дочерних капелек  $\Delta U$  во втором порядке малости по  $q$  необходимо сохранять слагаемые третьего порядка малости по размеру  $\sim r^3$ .

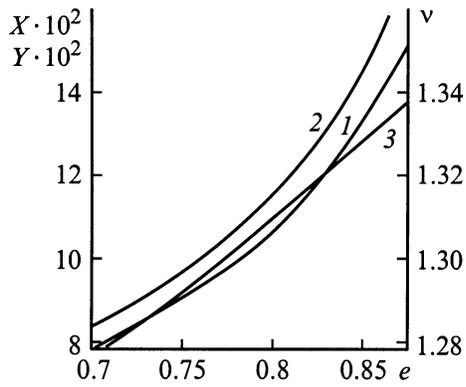
Домножим (17) на  $q/32\pi\sigma r^2A(e_0)$  и, учитывая (16a), получим

$$lq(E_0 + E_*)/32\pi\sigma r^2A(e_0) = 1.$$

Это означает, что отношение энергии диполя из одновременно отрывающихся противоположно заряженных капелек в поле ( $E_0 + E_*$ ) в момент их эмиссии к их энергии сил поверхностного натяжения есть величина постоянная, т.е. не зависит от порядкового номера акта эмиссии.

6. Из системы (16), (17) легко найти аналитические выражения для размеров и зарядов дочерних капелек в виде функций от эксцентриситета родительской капли  $e$  и расстояния  $\nu$

$$\begin{aligned} X(e, \nu) &= \frac{T^2(e, \nu)w^2}{4A(e_0)B(e_0)(1 - e^2)^{2/3}}; \\ Y(e, \nu) &= \frac{T^3(e, \nu)w^2}{8A(e_0)B^2(e_0)(1 - e^2)}. \end{aligned} \quad (19)$$



**Рис. 3.** Зависимости безразмерных радиусов  $X$  (1), зарядов  $Y$  (2) дочерних капелек и расстояния  $\nu$  (3) между центрами родительской и дочерней капель в момент разрыва перетяжки их связывающей от величины эксцентриситета родительской капли  $e$  при  $w^2 = 0.05$ ,  $\beta = 0.9$ .

Связь между эксцентриситетом родительской капли  $e$  и расстоянием  $\nu$  определится уравнением

$$\beta(1 - e_0^2)^{1/6}(1 - e^2)^{1/3}B(e_0) = 4w^2T^2(e, \nu);$$

$$\beta \equiv r_*/r(1 - e_0^2)^{1/6}, \quad (20)$$

получаемыми из (16)–(18). Значение параметра  $\beta$ , связанного с неконтролируемым радиусом перетяжки  $r_*$  ( $\beta$  считается неизменным в процессе сброса родительской каплей избыточного заряда), выбирается на основе полуфеноменологических соображений [11,18]  $\beta = 0.9$ .

Из (19) и рис. 2 видно, что безразмерные размеры и заряды дочерних капелек при фиксированных значениях параметра  $w^2$  и расстояния  $\nu$  существенно зависят лишь от эксцентриситета родительской капли. Из рис. 3, на котором (кривые 1 и 2) приведены зависимости  $X = X(e)$  и  $Y = Y(e)$ , рассчитанные по (9а), (16а), (19), (20), видно, что размеры  $X$  и заряды  $Y$  дочерних капелек снижаются при уменьшении эксцентриситета родительской капли (по мере уменьшения объема родительской капли в процессе сброса поляризационного заряда [8,18,19]). Если при обезразмеривании радиусов и зарядов дочерних капелек использовать в качестве характерного линейного масштаба обезразмеривания не исходный фиксированный радиус родительской капли в начальный момент времени, а текущий ее радиус на момент эмиссии очередной пары капелек, то обезрамеренные таким образом радиусы и заряды дочерних капелек будут увеличиваться при уменьшении эксцентриситета родительской капли или, что то же самое, при увеличении порядкового номера пары эмиттируемых капелек, что и отмечалось в расчетах [18]. Кривой 3 на рис. 3 приведена зависимость  $\nu$  — расстояния между центрами родительской и дочерней капли  $e$ , рассчитанная по (9а), (16а), (19), (20). Видно, что при снижении эксцентриситета родительской капли  $e$  безразмерное расстояние между каплями  $\nu$  уменьшается.

7. Аккуратная оценка вкладов от различных взаимодействий в полную энергию поляризации во внешнем электростатическом поле  $E_0$  жидкого проводника, ограниченного свободной поверхностью, позволяет получить дополнительную информацию о закономерностях его равновесной деформации в поле. Так, в замкнутой системе возможны лишь такие самопроизвольные изменения формы жидкого проводника в  $E_0$ , при которых его поляризационный дипольный момент увеличивается. Это означает, в частности, что первоначально сферическая капля в однородном поле  $E_0$  будет вытягиваться в фигуру, близкую к сфероиду вращения. Пузырь в жидком диэлектрике в поле  $E_0$  при различных значениях поверхностной подвижности свободных зарядов на поверхности пузыря, электропроводности и диэлектрической проницаемости жидкости (при различных законах эволюции поляризационного дипольного момента) может деформироваться к сплюснутому или к вытянутому сфероиду или сохранять сферическую форму. Корректный учет энергии поляризации капли проводящей жидкости, претерпевающей неустойчивость по отношению к поляризационному заряду, позволяет найти аналитические выражения для расчета размеров и зарядов дочерних капелек и указывает на их изначально неустойчивость по отношению к собственному заряду.

## Список литературы

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
- [2] Стреттон Дж.А. Теория электромагнетизма. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 539 с.
- [3] Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: ИЛ, 1954. 604 с.
- [4] Пановский В., Филипс М. Классическая электродинамика. М.: Физматгиз, 1963. 432 с.
- [5] Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1976. 616 с.
- [6] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЭОМ. 1991. № 4. С. 44–46.
- [7] Enze L. // J. Phys. D. 1986. Vol. 19. N 1. P. 1–6.
- [8] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
- [9] Григорьев А.И. // ЖТФ. 1985. Т. 55. Вып. 7. С. 1272–1278.
- [10] Григорьев А.И., Синкевич О.А. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 6. С. 10–15.
- [11] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 3. С. 19–28.
- [12] Григорьев А.И., Григорьев О.А., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 9. С. 12–21.
- [13] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белавина Е.И. // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 1. С. 27–34.
- [14] O'Konski Ch.T., Harris F.E. // J. Phys. Chem. 1957. Vol. 61. N 9. P. 1172–1174.
- [15] Торза С., Кокс Р., Мейсон С. // Реология суспензий. М.: Мир, 1975. С. 285–332.
- [16] Taylor G. // Proc. Roy. Soc. A. 1964. Vol. 280. P. 383–397.
- [17] Григорьев А.И. // ПЖТФ. 1998. Т. 24. Вып. 24. С. 36–40.

- [18] Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ПЖТФ. 1993. Т. 19. Вып. 18. С. 87–92.
- [19] Grigor'ev A.I., Shiryayeva S.O. // J. Phys. D. 1990. Vol. 23. N 11. P. 1361–1370.
- [20] Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ЖТФ. 1995. Т. 65. Вып. 2. С. 11–21.
- [21] Коромыслов В.А., Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 8. С. 31–38.