01;03

Линейная дисперсия и солитоны на цилиндрической оболочке с жидкостью

© А.Н. Кореньков

(Поступило в Редакцию 18 марта 1999 г.)

Исследован случай линейной дисперсии, а также построено солитонное решение задачи о распространении волн в системе, состоящей из упругой цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью. Изучена зависимость решения от параметра, характеризующего взаимное влияние оболочки и жидкости.

Основные уравнения

Рассмотрим задачу о распространении волн в физической системе, состоящей из бесконечной круговой цилиндрической оболочки, заполненной идеальной несжимаемой жидкостью. Нелинейные уравнения динамики безмоментной цилиндрической оболочки, отнесенной к координатам (r, z, φ), запишем в безразмерном виде [1]

$$\frac{\partial T_1}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad T_2 - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} T_1 + \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = \gamma^2 p,$$

$$T_1 = \frac{\partial u}{\partial z} + \nu w + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \nu w^2\right],$$

$$T_2 = w + \nu \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[w^2 + \nu\left(\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right)\right], \quad (1)$$

где $\gamma^2 = R\rho_0/h\rho$; R — радиус оболочки; h — ее толщина; ρ — плотность материала оболочки; ν — коэффициент Пуассона; ρ_0 — плотность жидкости; через u, v, w и p обозначены соответственно компоненты вектора смещения поверхности оболочки и давление, действующее на ее поверхности.

Уравнения Эйлера [2] запишутся в виде

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} = -\frac{\partial p}{\partial r},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\partial p}{\partial z}. \quad (2)$$

Здесь p — давление в жидкости; $\varphi(r, z, t)$ — потенциал скоростей $u = \mathrm{grad}\varphi$. Потенциал скоростей удовлетворяет уравнению неразрывности

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right] + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (3)$$

На поверхности оболочки $(r = 1)$ нормальная компонента скорости жидкости связана с поперечным смещением условием непротекания

$$u_r(1, z, t) = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right|_{r=1} = \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (4)$$

Будем считать, что на бесконечности $z \to +\infty$ оболочка неподвижна, а движение жидкости является невозмущенным $u_r = u_z = 0$, $p = 0$. Система уравнений (1)–(4) образует контактную задачу гидроупругости; эта задача содержит безразмерный параметр γ, характеризующий степень взаимного влияния оболочки и жидкости, который мы будем называть параметром связанности задачи.

Линейная дисперсия

Ниже мы построим решения контактной задачи (1)–(4), отвечающие нелинейным волнам малой амплитуды бесконечного периода. Главный член в разложении фазовой скорости с распространением таких волн по степеням малого параметра (амплитуды) совпадает с фазовой скоростью распространения линейных волн, для определения которой построим дисперсионное соотношение, соответствующее линеаризованной задаче.

Будем считать, что зависимость всех функций от координаты z и времени t имеет вид $\exp[i(\kappa z - \omega t)]$, где κ — волновое число и ω — циклическая частота колебаний. Фазовая скорость волны определяется выражением $c = \omega/\kappa$.

Из условия существования нетривиальных решений линеаризованной системы (1)–(4) получим дисперсионное соотношение

$$c^4(\kappa^2 + \gamma^2\delta) - c^2(1 + \kappa^2 + \gamma^2\delta) + (1 - \nu^2) = 0,$$

$$\delta(\kappa) = \kappa I_0(\kappa)/I_1(\kappa). \quad (5)$$

Здесь $I_0(\kappa)$ и $I_1(\kappa)$ — бесселевы функции первого рода. Уравнение (5) имеет два положительных корня c_1^2 и c_2^2. Таким образом, для всякого волнового числа существуют две волны, распространяющиеся с фазовыми скоростями c_1 и c_2 в положительном или отрицательном направлении.

Полагая формально $\gamma = 0$ в уравнении (5), получим дисперсионное соотношение, отвечающее "сухой" оболочке. Если $\kappa \ll 1$, т.е. рассматриваются длинноволновые колебания, его корни принимают вид

$$c_1^2 = 1 - \nu^2 + O(\kappa^2),$$

$$c_2^2 = 1/\kappa^2 + O(1).$$

Исследуем теперь зависимость фазовых скоростей c_1 и c_2 от параметра связанности задачи γ, учитывая, что

$\delta(\kappa) = O(1)$ при $0 \leqslant \kappa < \infty$. Случай $\gamma \ll 1$ при $\kappa = O(1)$ сводится к исследованию дисперсионного соотношения "сухой" оболочки. Если же $\kappa \to 0$, то уравнение (5) вырождается сингулярно. Корень c_1^2 определяется прежним выражением. Для корня c_2^2 вопрос сводится по существу к соотношению между параметрами γ и κ.

Пусть теперь $\gamma \to \infty$. Будем искать решения уравнения (5) в виде разложений по обратным степеням γ^2. Тогда получим

$$c_1^2 = \gamma^{-2}(1-\nu^2)(1/\delta - \gamma^{-2}(\kappa^2+\nu^2)/\delta^2 + O(\gamma^{-4})),$$

$$c_2^2 = 1 + \gamma^{-2}\nu^2/\delta + O(\gamma^{-4}).$$

Данные представления являются равномерными по κ.

Рассмотрим теперь случай распространения длинных ($\kappa \ll 1$) волн; при этом будем считать, что $\gamma = O(1)$. Фазовую скорость ищем в виде ряда по степеням κ^2. Тогда с точностью до $O(\kappa^2)$ фазовая скорость определяется из уравнения

$$2\gamma^2 c^4 - (1-2\gamma^2)c^2 + (1-\nu^2) = 0.$$

Дискриминант этого уравнения строго больше нуля, и уравнение имеет два положительных корня, удовлетворяющих неравенствам $0 \leqslant c_1^2 \leqslant 1-\nu^2$ и $1 \leqslant c_2^2$.

Волны бесконечного периода

Будем рассматривать случай распространения длинных волн малой амплитуды. Имея намерение построить первый член асимптотического разложения решения, используем формальный малый параметр ε и введем новые переменные $\xi = \varepsilon(z - ct)$, $\eta = \varepsilon^3 t$. Решение задачи будем искать в виде

$$w(\xi,\eta) = \varepsilon^2[w^{(0)}(\xi,\eta) + \varepsilon^2 w^{(1)}(\xi,\eta) + O(\varepsilon^4)],$$

$$u(\xi,\eta) = \varepsilon[u^{(0)}(\xi,\eta) + \varepsilon^2 u^{(1)}(\xi,\eta) + O(\varepsilon^4)],$$

$$T_i(\xi,\eta) = \varepsilon^2[T^{(0)} - i(\xi,\eta) + \varepsilon^2 T_i^{(1)}(\xi,\eta) + O(\varepsilon^4)],$$

$$p(r,\xi,\eta) = \varepsilon^2[p^{(0)}(r,\xi,\eta) + \varepsilon^2 p^{(1)}(r,\xi,\eta) + O(\varepsilon^4)],$$

$$\varphi(r,\xi,\eta) = \varepsilon\big[\varphi^{(0)}(r,\xi,\eta) + \varepsilon^2\varphi^{(1)}(r,\xi,\eta) + \varepsilon^4\varphi^{(2)}(r,\xi,\eta) + O(\varepsilon^6)\big]. \quad (6)$$

Заметим, что для получения первого приближения к решению задачи мы вынуждены рассматривать в разложении потенциала скоростей члены до $\varphi^{(2)}$ включительно. Подставим разложения (6) в уравнения (1)–(4) и приравняем нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε. Уравнение неразрывности (3) даст теперь

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial\varphi^{(n)}}{\partial r}\right] = -\frac{\partial^2\varphi^{(n-1)}}{\partial\xi^2}; \quad n = 0,1,2. \quad (7)$$

Здесь принято $\varphi^{(-1)} = 0$. Система (7) легко интегрируется. Из условия ограниченности потенциала скоростей при $r = 0$ немедленно следует, что начальное приближение не зависит от радиальной координаты; последующие приближения являются полиномами различных степеней r

$$\varphi^{(0)} = \bar\varphi^{(0)}(\xi,\eta), \quad \varphi^{(1)} = -\frac{r^2}{4}\frac{\partial^2\bar\varphi^{(0)}}{\partial\xi^2} + \bar\varphi^{(1)}(\xi,\eta),$$

$$\varphi^{(2)} = \frac{r^4}{64}\frac{\partial^4\bar\varphi^{(0)}}{\partial\xi^4} - \frac{r^2}{4}\frac{\partial^2\bar\varphi^{(1)}}{\partial\xi^2} + \bar\varphi^{(2)}(\xi,\eta). \quad (8)$$

Здесь $\bar\varphi^{(0)}(\xi,\eta)$, $\bar\varphi^{(1)}(\xi,\eta)$ и $\bar\varphi^{(2)}(\xi,\eta)$ — функции, возникающие при интегрировании по r и подлежащие определению при помощи контактного условия. Подстановка (6) в контакное условие (4) дает

$$\left.\frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial r}\right|_{r=1} = 0; \quad \left.\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial r}\right|_{r=1} = -c\frac{\partial w^{(0)}}{\partial\xi},$$

$$\left.\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial r}\right|_{r=1} = -c\frac{\partial w^{(1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial w^{(0)}}{\partial\eta}. \quad (9)$$

Решения (8) позволяют записать

$$\left.\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial r}\right|_{r=1} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2\bar\varphi^{(0)}}{\partial\xi^2},$$

$$\left.\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial r}\right|_{r=1} = \frac{1}{16}\frac{\partial^4\bar\varphi^{(0)}}{\partial\xi^4} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\bar\varphi^{(1)}}{\partial\xi^2}.$$

Наконец, сравнивая выражения (9) и (10), получим

$$\frac{\partial^2\bar\varphi^{(0)}}{\partial\xi^2} = 2c\frac{\partial w^{(0)}}{\partial\xi},$$

$$\frac{\partial^2\bar\varphi^{(1)}}{\partial\xi^2} = 2c\frac{\partial w^{(1)}}{\partial\xi} - 2\frac{\partial w^{(0)}}{\partial\eta} + \frac{c}{4}\frac{\partial^3 w^{(0)}}{\partial\xi^3}.$$

Из уравнений Эйлера (2) будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[p^{(0)} - c\frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial\xi}\right] = 0, \ \frac{\partial}{\partial\xi}\left[p^{(0)} - c\frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial\xi}\right] = 0. \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[p^{(1)} - c\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial\xi}\right] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[p^{(1)} - c\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial\xi}\right] = -\frac{\partial^2\varphi^{(0)}}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial\xi}\frac{\partial^2\varphi^{(0)}}{\partial\xi^2}. \quad (13)$$

Используя первое из соотношений (11) и второе соотношение (12), справедливое, в частности, на поверхности $r = 1$, получим

$$\left.\frac{\partial p^{(0)}}{\partial\xi}\right|_{r=1} = 2c^2\frac{\partial w^{(0)}}{\partial\xi}. \quad (14)$$

С учетом условия на бесконечности имеем также в силу (12)

$$\left.\frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial\xi}\right|_{r=1} = 2cw^{(0)}.$$

Это выражение используем для исключения $\varphi^{(0)}$ из правой части второго из соотношений (13), которое будем рассматривать при $r = 1$. Исключая также функцию $\varphi^{(1)}$ при помощи (8) и (11), получим выражение для тангенциальной производной давления на поверхности оболочки

$$\left.\frac{\partial p^{(1)}}{\partial \xi}\right|_{r=1} = 2c^2\frac{\partial w^{(1)}}{\partial \xi} - 4c\frac{\partial w^{(0)}}{\partial \eta} - 4c^2 w^{(0)}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial \xi} - \frac{c^2}{4}\frac{\partial^3 w^{(0)}}{\partial \xi^3}. \tag{15}$$

Подставим теперь разложения (6) в уравнения оболочки (1), которые в начальном приближении дадут

$$\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial \xi} = c^2\frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial \xi^2}, \quad T_2^{(0)} = \gamma^2 p^{(0)},$$

$$T_1^{(0)} = \frac{\partial u^{(0)}}{\partial \xi} + \nu w^{(0)}, \quad T_2^{(0)} = w^{(0)} + \nu\frac{\partial u^{(0)}}{\partial \xi}. \tag{16}$$

С учетом (14) уравнения (16) сводятся к однородной алгебраической относительно производных функций $w^{(0)}$ и $u^{(0)}$ системе уравнений

$$(1 - 2\gamma^2 c^2)\frac{\partial w^{(0)}}{\partial \xi} + \nu\frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial \xi^2} = 0,$$

$$(1 - c^2)\frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial \xi^2} + \nu\frac{\partial w^{(0)}}{\partial \xi} = 0.$$

Условие существования нетривиальных решений этой системы дает уравнение для определения скорости c системы координат (ξ, η)

$$2\gamma^2 c^4 - (1 + 2\gamma^2)c^2 + (1 - \nu^2) = 0, \tag{17}$$

которое совпадает с уравнением для определения начального приближения к фазовой скорости длинных волн при рассмотрении линейной дисперсии.

Рассмотрение следующего приближения дает

$$\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial \xi} = c^2\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial \xi^2} - 2c\frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial \xi \partial \eta},$$

$$T_2^{(1)} = \gamma^2 p^{(1)} - c^2\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial \xi^2},$$

$$T_1^{(1)} = \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi} + \nu w^{(1)} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial \xi}\right)^2 = \nu w^{(0)^2}\right],$$

$$T_2^{(1)} = w^{(1)} + \nu\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\left[w^{(0)^2} + \nu\left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial \xi}\right)^2\right]. \tag{18}$$

С учетом условия на бесконечности имеем, очевидно,

$$\frac{\partial u^{(0)}}{\partial \xi} = -\frac{\nu}{1 - c^2}w^{(0)}.$$

Дифференцируя второе уравнение равновесия (18), используя (15) и исключая продольные усилия $T_1^{(1)}$ и $T_2^{(1)}$, получим

$$(1 - 2\gamma^2 c^2)\frac{\partial w^{(1)}}{\partial \xi} + \nu\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial \xi^2} = -4c\gamma^2\frac{\partial w^{(0)}}{\partial \eta} - (1 + 4c^2\gamma^2)\omega^{(0)}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial \xi} - \nu\frac{\partial u^{(0)}}{\partial \xi}\frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial \xi^2} - c^2(1 + \gamma^2/4)\frac{\partial^3 w^{(0)}}{\partial \xi^3},$$

$$(1 - c^2)\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial \xi^2} + \nu\frac{\partial w^{(1)}}{\partial \xi} = -\frac{\partial u^{(0)}}{\partial \xi}\frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial \xi^2} - 2c\frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial \xi \partial \eta} - \nu w^{(0)}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial \xi}.$$

Требование существования решения этой неоднородной системы линейных относительно производных функций $w^{(1)}$ и $u^{(1)}$ уравнений с равным нулю в силу (17) определителем приводит к уравнению Кортевега-де-Фриза

$$\frac{\partial w^{(0)}}{\partial \eta} + aw^{(0)}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial \xi} + b\frac{\partial^3 w^{(0)}}{\partial \xi^3} = 0. \tag{19}$$

Решение уравнения (19) в виде одиночного солитона амплитуды U имеет вид [3,4]

$$w^{(0)} = U\operatorname{sech}^2[(\xi - V\eta)/L],$$
$$V = Ua/3, \quad L = 2\sqrt{3b/aU}. \tag{20}$$

Значения коэффициентов a и b даются формулами

$$a = \frac{(1 + 4\gamma^2 c^2)(1 - c^2)^3 - \nu^2(1 - c^2)^2 - \nu^3 c^2}{2c(1 - c^2)(\nu^2 + 2\gamma^2(1 - c^2)^2)},$$

$$b = \frac{c(1 - c^2)^2(1 + \gamma^2/4)}{2(\nu^2 + 2\gamma^2(1 - c^2)^2)}.$$

Скорость c подвижной системы координат определяется из (17). При использовании линеаризованных уравнений безмоментной оболочки для коэффициента a в уравнении Кортевега-де-Фриза получим

$$a = \frac{2c\gamma^2(1 - c^2)^2}{\nu^2 + 2\gamma^2(1 - c^2)^2},$$

коэффициент b определяется прежним выражением.

Солитонное решение

Используя (20) и переходя к координатам z, t, запишем решение в виде

$$w = W\operatorname{sech}^2[\kappa(z - vt)], \quad p = P\operatorname{sech}^2[\kappa(z - vt)],$$
$$u = U\{1 - \tanh[\kappa(z - vt)]\}, \tag{21}$$

где

$$\kappa = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{aW}{3b}}, \quad P = 2c^2W, \quad U = \frac{2\nu}{1-c^2}\sqrt{\frac{3bW}{a}}.$$

Скорость волны v складывается из скорости линейных волн c и поправки, зависящей от амплитуды волны $v = c + V$ и $V = Wa/3$.

Как следует из (17), при наличии жидкости внутри оболочки для заданной амплитуды всегда существует два солитона, различающихся скоростями распространения: "медленный" и "быстрый". В этом смысле ситуация здесь аналогична той, которая наблюдалась при рассмотрении линейных волн, где заданному κ отвечали две волны с фазовыми скоростями c_1 и c_2. Поскольку знаки коэффициентов a и b одинаковые, то оба солитона имеют характер вздутия на оболочке, скорость распространения которого несколько выше скорости линейных волн.

Как можно заметить, коэффициенты a и b, определяющие вклад каждого из этих эффектов, зависят по существу от единственного параметра γ, определяющего характер взаимодействия оболочки и жидкости. Случай $\gamma \ll 1$ отвечает легкой жидкости или газу; для тяжелой жидкости и тонкой оболочки имеем $\gamma \gg 1$. Рассмотрим теперь, что происходит с солитонным решением задачи в этих предельных ситуациях.

Полагая в задаче $\gamma = 0$ и рассматривая решение, отвечающее "медленному" солитону, придем к рассмотрению оболочки без жидкости. Тогда $c^2 = 1 - \nu^2$ и

$$a = -\frac{\sqrt{1-\nu^2}}{2\nu}, \quad b = \frac{\nu^2}{2}\sqrt{1-\nu^2},$$

$$\kappa = \frac{1}{2}\sqrt{-W/3\nu^3}, \quad V = 1 - \nu^2 - \frac{W}{6\nu}\sqrt{1-\nu^2}.$$

Так как κ вещественно, $W < 0$ и волна имеет характер вмятины с глубиной W и характерной длиной $1/\kappa$, скорость распространения которой также превышает фазовую скорость линейных волн.

При использовании линейных соотношений для медленного солитона имеем $a \to 0$ и $b = O(1)$. При этом в задаче преобладает влияние дисперсии, что приводит к "размазыванию" волнового профиля.

Пусть теперь $\gamma \to \infty$. Тогда для решения, отвечающего корню c_1 характеристического уравнения (17), имеем

$$a = \gamma^{-1}a_0 + O(\gamma^{-3}), \quad b = \gamma^{-1}b_0 + O(\gamma^{-3}),$$

$$c = \gamma^{-1}c_0 + O(\gamma^{-3}),$$

причем значения коэффициента a_0 получаются различными при использовании для описания оболочки линейных или нелинейных соотношений

$$a_0 = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-\nu^2}}{\sqrt{2}} & \text{для линейной оболочки;} \\[2ex] \dfrac{3\sqrt{1-\nu^2}}{2\sqrt{2}} & \text{для нелинейной оболочки;} \end{cases}$$

$$b_0 = \frac{2\sqrt{1-\nu^2}}{32}, \qquad c_0 = \frac{\sqrt{1-\nu^2}}{\sqrt{2}}.$$

Как показывают выражения (21), давление p на поверхности оболочки в рассматриваемом случае является величиной более высокого порядка малости, чем смещения u и w: оно стремится к нулю как $O(1/\gamma^2)$. Скорость v солитона также является величиной порядка $O(1/\gamma^2)$.

Исследовать поведение "быстрого" солитона при интересующих нас предельных значениях параметра с помощью полученных разложений не представляется возможным. Действительно, при $\gamma \to 0$ уравнение (17) вырождается сингулярно и для начального приближения к скорости волны получим $c_2 \to \infty$.

В случае $\gamma \to \infty$ для второго корня дисперсионного соотношения имеем $c_2 = 1 + O(1/\gamma^2)$ и формула (21) для продольного смещения дает $U \to \infty$. Этот случай вырождения связанной задачи также можно было бы назвать сингулярным, имея в виду напрашивающуюся аналогию со структурой разложений решений краевых задач для дифференциальных уравнений с пограничными слоями.

Список литературы

[1] *Товстик П.Е.* Устойчивость тонких оболочек. М.: Наука, 1995. 320 с.

[2] *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Том I. М.: Наука, 1983. 528 с.

[3] *Лэм Дж.Л.* Введение в теорию солитонов. Могилев: Бибфизмат, 1997. 294 с.

[4] *Ланда П.С.* Нелинейные колебания и волны. М.: Наука; Физматлит, 1997. 495 с.